Matemáticas 2 ESO

Biblioteca del profesorado

SOLUCIONARIO

El Solucionario de **Matemáticas**
para 2.º de ESO es una obra colectiva
concebida, diseñada y creada en el
departamento de Ediciones Educativas de
Santillana Educación, S. L., dirigido
por **Enrique Juan Redal**.

En su realización ha participado
el siguiente equipo:

Ana María Gaztelu
Augusto González

EDICIÓN
Angélica Escoredo
Rafael Nevado
Carlos Pérez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

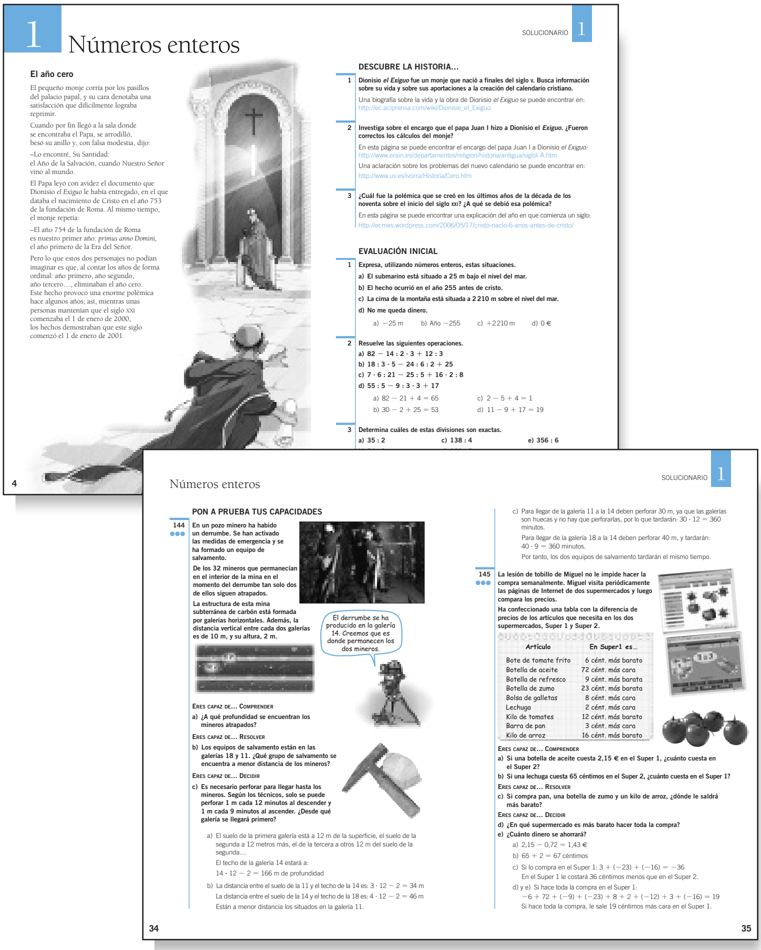
Proyecto **Los Caminos del Saber**

Santillana

Presentación

El nombre de la serie, **Los Caminos del Saber**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de la etapa obligatoria de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno. Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento, sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.



1 Números enteros

El año cero

El pequeño monje corría por los pasillos del palacio papal, y su cara denotaba una satisfacción que difícilmente lograba reprimir.

Cuando por fin llegó a la sala donde se encontraba el Papa, se arrodilló, besó su anillo y, con falsa modestia, dijo:

–Lo encontré, Su Santidad: el Año de la Salvación, cuando Nuestro Señor vino al mundo.

El Papa leyó con avidez el documento que Dionisio *el Exiguo* le había entregado, en el que databa el nacimiento de Cristo en el año 753 de la fundación de Roma. Al mismo tiempo, el monje repetía:

–El año 754 de la fundación de Roma es nuestro primer año: *primus anno Domini,* el año primero de la Era del Señor.

Pero lo que estos dos personajes no podían imaginar es que, al contar los años de forma ordinal: año primero, año segundo, año tercero…, eliminaban el año cero. Este hecho provocó una enorme polémica hace algunos años; así, mientras unas personas mantenían que el siglo XXI comenzaba el 1 de enero de 2000, los hechos demostraban que este siglo comenzó el 1 de enero de 2001.

4

SOLUCIONARIO 1

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Dionisio *el Exiguo* fue un monje que nació a finales del siglo V. Busca información sobre su vida y sobre sus aportaciones a la creación del calendario cristiano.**

Una biografía sobre la vida y la obra de Dionisio *el Exiguo* se puede encontrar en: http://ec.aciprensa.com/wiki/Dionisio_el_Exiguo

2 **Investiga sobre el encargo que el papa Juan I hizo a Dionisio el *Exiguo*. ¿Fueron correctos los cálculos del monje?**

En esta página se puede encontrar el encargo del papa Juan I a Dionisio *el Exiguo:* http://www.erain.es/departamentos/religion/historia/antigua/siglol-A.htm

Una aclaración sobre los problemas del nuevo calendario se puede encontrar en:

http://www.uv.es/ivorra/Historia/Cero.htm

3 **¿Cuál fue la polémica que se creó en los últimos años de la década de los noventa sobre el inicio del siglo XXI? ¿A qué se debió esa polémica?**

En esta página se puede encontrar una explicación del año en que comienza un siglo: http://ecmes.wordpress.com/2006/05/17/cristo-nacio-6-anos-antes-de-cristo/

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Expresa, utilizando números enteros, estas situaciones.**

a) El submarino está situado a 25 m bajo el nivel del mar.

b) El hecho ocurrió en el año 255 antes de cristo.

c) La cima de la montaña está situada a 2 210 m sobre el nivel del mar.

d) No me queda dinero.

a) −25 m b) Año −255 c) +2210 m d) 0 €

2 **Resuelve las siguientes operaciones.**

a) $82 - 14 : 2 \cdot 3 + 12 : 3$

b) $18 : 3 \cdot 5 - 24 : 6 : 2 + 25$

c) $7 \cdot 6 : 21 - 25 : 5 + 16 \cdot 2 : 8$

d) $55 : 5 - 9 : 3 \cdot 3 + 17$

a) $82 - 21 + 4 = 65$ c) $2 - 5 + 4 = 1$

b) $30 - 2 + 25 = 53$ d) $11 - 9 + 17 = 19$

3 **Determina cuáles de estas divisiones son exactas.**

a) 35 : 2 c) 138 : 4 e) 356 : 6

Números enteros

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

144 **En un pozo minero ha habido un derrumbe. Se han activado las medidas de emergencia y se ha formado un equipo de salvamento.**

De los 32 mineros que permanecían en el interior de la mina en el momento del derrumbe tan solo dos de ellos siguen atrapados.

La estructura de esta mina subterránea de carbón está formada por galerías horizontales. Además, la distancia vertical entre cada dos galerías es de 10 m, y su altura, 2 m.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿A qué profundidad se encuentran los mineros atrapados?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Los equipos de salvamento están en las galerías 18 y 11. ¿Qué grupo de salvamento se encuentra a menor distancia de los mineros?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Es necesario perforar para llegar hasta los mineros. Según los técnicos, solo se puede perforar 1 m cada 12 minutos al descender y 1 m cada 9 minutos al ascender. ¿Desde qué galería se llegará primero?

a) El suelo de la primera galería está a 12 m de la superficie, el suelo de la segunda a 12 metros más, el de la tercera a otros 12 m del suelo de la segunda…

El techo de la galería 14 estará a:

$14 \cdot 12 - 2 = 166$ m de profundidad

b) La distancia entre el suelo de la 11 y el techo de la 14 es: $3 \cdot 12 - 2 = 34$ m

La distancia entre el suelo de la 14 y el techo de la 18 es: $4 \cdot 12 - 2 = 46$ m

Están a menor distancia los situados en la galería 11.

c) Para llegar de la galería 11 a la 14 deben perforar 30 m, ya que las galerías son huecas y no hay que perforarlas, por lo que tardarán: $30 \cdot 12 = 360$ minutos.

Para llegar de la galería 18 a la 14 deben perforar 40 m, y tardarán: $40 \cdot 9 = 360$ minutos.

Por tanto, los dos equipos de salvamento tardarán el mismo tiempo.

34

SOLUCIONARIO 1

145 **La lesión de tobillo de Miguel no le impide hacer la compra semanalmente. Miguel visita periódicamente las páginas de Internet de dos supermercados y luego compara los precios.**

Ha confeccionado una tabla con la diferencia de precios de los artículos que necesita en los dos supermercados, Super 1 y Super 2.

Artículo	En Super1 es…
Bote de tomate frito	6 cént. más barato
Botella de aceite	72 cént. más cara
Botella de refresco	9 cént. más barata
Botella de zumo	23 cént. más barata
Bolsa de galletas	8 cént. más cara
Lechuga	2 cént. más cara
Kilo de tomates	12 cént. más barato
Barra de pan	3 cént. más cara
Kilo de arroz	16 cént. más barato

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si una botella de aceite cuesta 2,15 € en el Super 1, ¿cuánto cuesta en el Super 2?

b) Si una lechuga cuesta 65 céntimos en el Super 2, ¿cuánto cuesta en el Super 1?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si compra pan, una botella de zumo y un kilo de arroz, ¿dónde le saldrá más barato?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) ¿En qué supermercado es más barato hacer toda la compra?

e) ¿Cuánto dinero se ahorrará?

a) $2{,}15 - 0{,}72 = 1{,}43$ €

b) $65 + 2 = 67$ céntimos

c) Si lo compra en el Super 1: $3 + (-23) + (-16) = -36$

En el Super 1 le costará 36 céntimos menos que en el Super 2.

d) y e) Si hace toda la compra en el Super 1:

$-6 + 72 + (-9) + (-23) + 8 + 2 + (-12) + 3 + (-16) = 19$

Si hace toda la compra, le sale 19 céntimos más cara en el Super 1.

35

Índice

1 Números enteros

El año cero

El pequeño monje corría por los pasillos del palacio papal, y su cara denotaba una satisfacción que difícilmente lograba reprimir.

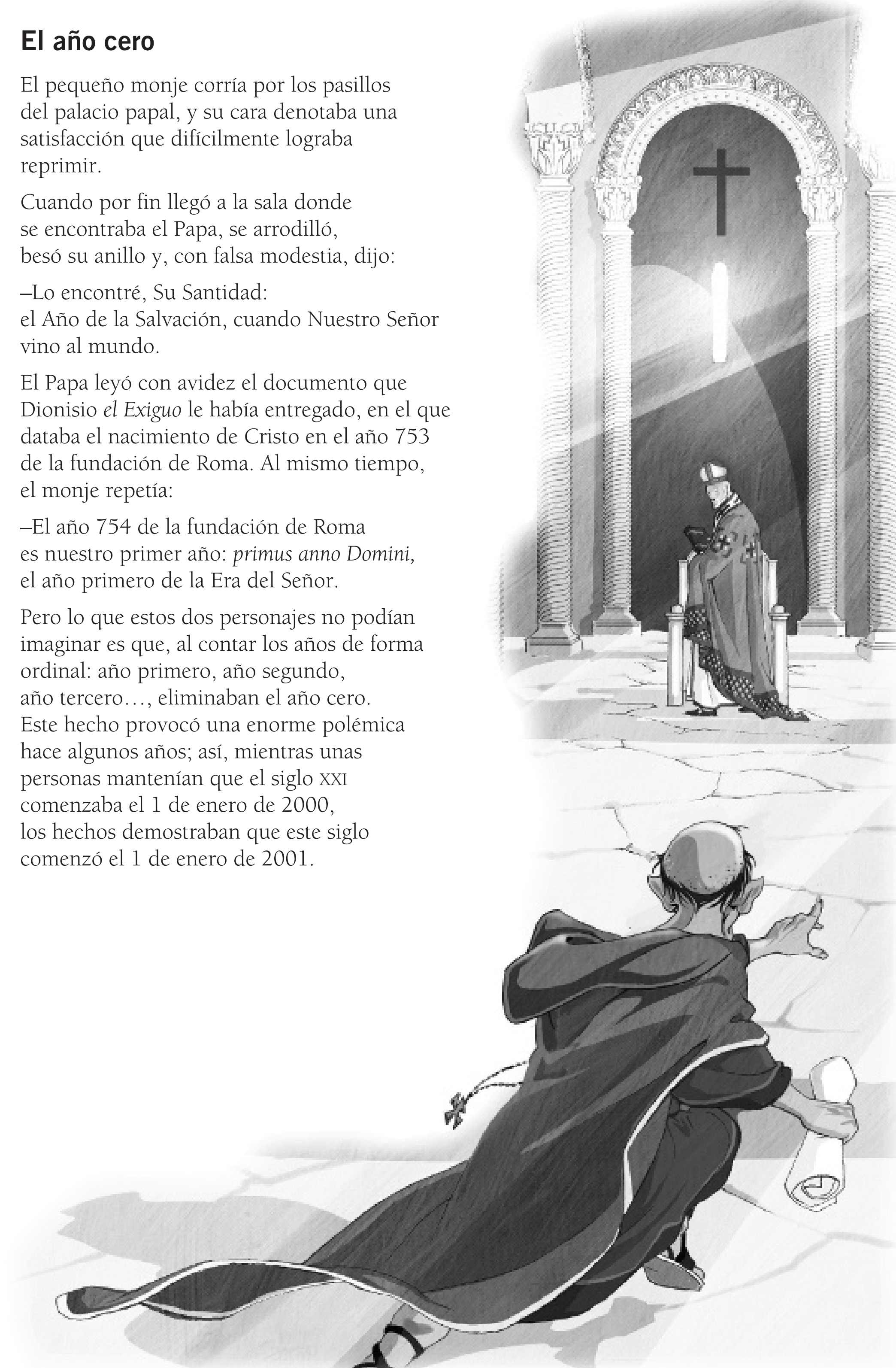
Cuando por fin llegó a la sala donde se encontraba el Papa, se arrodilló, besó su anillo y, con falsa modestia, dijo:

–Lo encontré, Su Santidad: el Año de la Salvación, cuando Nuestro Señor vino al mundo.

El Papa leyó con avidez el documento que Dionisio *el Exiguo* le había entregado, en el que databa el nacimiento de Cristo en el año 753 de la fundación de Roma. Al mismo tiempo, el monje repetía:

–El año 754 de la fundación de Roma es nuestro primer año: *primus anno Domini,* el año primero de la Era del Señor.

Pero lo que estos dos personajes no podían imaginar es que, al contar los años de forma ordinal: año primero, año segundo, año tercero…, eliminaban el año cero. Este hecho provocó una enorme polémica hace algunos años; así, mientras unas personas mantenían que el siglo XXI comenzaba el 1 de enero de 2000, los hechos demostraban que este siglo comenzó el 1 de enero de 2001.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Dionisio *el Exiguo* fue un monje que nació a finales del siglo v. Busca información sobre su vida y sobre sus aportaciones a la creación del calendario cristiano.**

Una biografía sobre la vida y la obra de Dionisio *el Exiguo* se puede encontrar en: http://ec.aciprensa.com/wiki/Dionisio_el_Exiguo

2 **Investiga sobre el encargo que el papa Juan I hizo a Dionisio el *Exiguo*. ¿Fueron correctos los cálculos del monje?**

En esta página se puede encontrar el encargo del papa Juan I a Dionisio *el Exiguo:* http://www.erain.es/departamentos/religion/historia/antigua/siglol-A.htm

Una aclaración sobre los problemas del nuevo calendario se puede encontrar en: http://www.uv.es/ivorra/Historia/Cero.htm

3 **¿Cuál fue la polémica que se creó en los últimos años de la década de los noventa sobre el inicio del siglo xxi? ¿A qué se debió esa polémica?**

En esta página se puede encontrar una explicación del año en que comienza un siglo: http://ecmes.wordpress.com/2006/05/17/cristo-nacio-6-anos-antes-de-cristo/

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Expresa, utilizando números enteros, estas situaciones.**

a) El submarino está situado a 25 m bajo el nivel del mar.

b) El hecho ocurrió en el año 255 antes de cristo.

c) La cima de la montaña está situada a 2 210 m sobre el nivel del mar.

d) No me queda dinero.

a) −25 m b) Año −255 c) +2210 m d) 0 €

2 **Resuelve las siguientes operaciones.**

a) $82 - 14 : 2 \cdot 3 + 12 : 3$

b) $18 : 3 \cdot 5 - 24 : 6 : 2 + 25$

c) $7 \cdot 6 : 21 - 25 : 5 + 16 \cdot 2 : 8$

d) $55 : 5 - 9 : 3 \cdot 3 + 17$

a) $82 - 21 + 4 = 65$

b) $30 - 2 + 25 = 53$

c) $2 - 5 + 4 = 1$

d) $11 - 9 + 17 = 19$

3 **Determina cuáles de estas divisiones son exactas.**

a) 35 : 2 **c) 138 : 4** **e) 356 : 6**

b) 84 : 3 **d) 223 : 5**

Solo es exacta la división del apartado b).

Números enteros

EJERCICIOS

001 **Expresa con números enteros.**

a) El avión vuela a una altura de tres mil metros.
b) El termómetro marca tres grados bajo cero.
c) Le debo cinco euros a mi hermano.

a) $+3000$ m
b) -3 °C
c) -5 €

002 **Halla el valor absoluto de:**

$$\mathbf{-4 \quad +5 \quad -13 \quad +27 \quad -1 \quad +18}$$

$|-4| = 4$
$|+5| = 5$
$|-13| = 13$
$|+27| = 27$
$|-1| = 1$
$|+18| = 18$

003 **Escribe situaciones que correspondan a estos números.**

a) $+57$ €
b) -100 m
c) -6 °C
d) $+2$

a) El precio del taladro es cincuenta y siete euros.
b) El calamar vive a cien metros de profundidad.
c) La temperatura mínima en enero fue de seis grados bajo cero.
d) Somos dos hermanos.

004 **El valor absoluto de un número entero *a* es 7. ¿Qué número es?**

Si $|a| = 7$, entonces $a = +7$ o $a = -7$.

005 **Escribe el opuesto de estos números.**

a) -8
b) $+54$
c) $+3$
d) -5

a) $\text{Op}(-8) = +8$
b) $\text{Op}(+54) = -54$
c) $\text{Op}(+3) = -3$
d) $\text{Op}(-5) = +5$

006 **Copia y completa con el signo < o >, según corresponda.**

a) $-2 \square -5$ **b) $-7 \square 0$** **c) $-1 \square +2$**

a) $-2 > -5$ b) $-7 < 0$ c) $-1 < +2$

007 **Ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros:**

$$+8 \quad -2 \quad +3 \quad +11 \quad 0 \quad -7 \quad -9$$

$-9 < -7 < -2 < 0 < 3 < 8 < 11$

008 **Si $a < -3$, ¿puede ser $a < 0$?**

Como $a < -3$ y $-3 < 0$, entonces $a < 0$ siempre.

009 **Calcula utilizando los dos métodos estudiados.**

a) $-11 + 8 - 6 - 7 + 9$

b) $3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4$

c) $15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6$

d) $-(4 - 9 + 3) + (11 - 8 - 7) + (-15)$

e) $(+3) - (4 + 7 - 9) - (-19 + 3 - 10) + (-2)$

a) $-11 + 8 - 6 - 7 + 9 = -3 - 6 - 7 + 9 = -9 - 7 + 9 = -16 + 9 = -7$

$-11 + 8 - 6 - 7 + 9 = (8 + 9) - (11 + 6 + 7) = 17 - 24 = -7$

b) $3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 = -5 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 =$
$= 7 - 15 - 1 + 10 - 4 =$
$= -8 - 1 + 10 - 4 =$
$= -9 + 10 - 4 = 1 - 4 = -3$

$3 - 8 + 12 - 15 - 1 + 10 - 4 = (3 + 12 + 10) - (8 + 15 + 1 + 4) =$
$= 25 - 28 = -3$

c) $15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6 = 1 + 9 - 21 - 13 + 6 = 10 - 21 - 13 + 6 =$
$= -11 - 13 + 6 = -24 + 6 = -18$

$15 - 14 + 9 - 21 - 13 + 6 = (15 + 9 + 6) - (14 + 21 + 13) =$
$= 30 - 48 = -18$

d) $-4 + 9 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 = 5 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 =$
$= 2 + 11 - 8 - 7 - 15 =$
$= 13 - 8 - 7 - 15 =$
$= 5 - 7 - 15 = -2 - 15 = -17$

$-4 + 9 - 3 + 11 - 8 - 7 - 15 = (9 + 11) - (4 + 3 + 8 + 7 + 15) =$
$= 20 - 37 = -17$

e) $3 - 4 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 = -1 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 =$
$= -8 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 =$
$= 1 + 19 - 3 + 10 - 2 =$
$= 20 - 3 + 10 - 2 =$
$= 17 + 10 - 2 = 27 - 2 = 25$

$3 - 4 - 7 + 9 + 19 - 3 + 10 - 2 =$
$= (3 + 9 + 19 + 10) - (4 + 7 + 3 + 2) =$
$= 41 - 16 = 25$

010 **Cathy tenía en el banco 250 €. Después ha pagado un recibo de 485 € y ha cobrado 900 €. ¿Cuál es su saldo actual?**

$250 - 485 + 900 = -235 + 900 = 665$ €

011 **Calcula el valor de *a*:**

$$\mathbf{4 - (a + 2) - 3 = -1}$$

$4 - a - 2 - 3 = -1 \rightarrow -1 - a = -1 \rightarrow a = 0$

012 **Resuelve estas multiplicaciones.**

a) $(-3) \cdot (+2)$
b) $(-2) \cdot (-8)$
c) $(+7) \cdot (-4)$
d) $(+2) \cdot (+7)$
e) $(+5) \cdot (-4)$
f) $(-5) \cdot (-7)$

a) -6
b) 16
c) -28
d) 14
e) -20
f) 35

013 **Calcula las divisiones.**

a) $(-12) : (+6)$
b) $(-6) : (-2)$
c) $(+28) : (-4)$
d) $(+21) : (+7)$
e) $(+24) : (-4)$
f) $(-42) : (-7)$

a) -2
b) 3
c) -7
d) 3
e) -6
f) 6

014 **Resuelve estas operaciones.**

a) $(-4) \cdot (+2) \cdot (-6)$
b) $(+8) \cdot (-3) \cdot (-4)$
c) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$
d) $(+20) : (+2) : (-5)$
e) $(-32) : (-4) : (-8)$
f) $(-80) : (-20) : (-4)$

a) 48
b) 96
c) -24
d) -2
e) -1
f) -1

015 **Copia y completa con los números adecuados.**

a) $(\square) : 4 = -10$
b) $40 : (\square) = -8$
c) $(-100) : (\square) = -25$
d) $(\square) : (-12) = 6$

a) $(-40) : 4 = -10$
b) $40 : (-5) = -8$
c) $(-100) : 4 = -25$
d) $(-72) : (-12) = 6$

016 **Escribe cómo se leen las potencias y calcula su valor.**

a) 3^5 **c) $(-8)^6$** **e) 10^3** **g) $(-4)^2$**
b) 2^2 **d) $(-5)^3$** **f) 4^2** **h) $(-2)^3$**

a) 3 elevado a 5 es 243.
b) 2 al cuadrado es 4.
c) −8 elevado a 6 es 262 144.
d) −5 al cubo es −125.
e) 10 al cubo es 1 000.
f) 4 al cuadrado es 16.
g) −4 al cuadrado es 16.
h) −2 al cubo es −8.

017 **Expresa en forma de potencia y halla su valor.**

a) $6 \cdot 6 \cdot 6$ **c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$**
b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ **d) $(-5) \cdot (-5)$**

a) $6^3 = 216$
b) $2^5 = 32$
c) $(-2)^3 = -8$
d) $(-5)^2 = 25$

018 **Calcula el exponente de estas potencias.**

a) $3^{\square} = 27$ **c) $4^{\square} = 64$**
b) $(-3)^{\square} = -27$ **d) $(-2)^{\square} = 16$**

a) $3^3 = 27$
b) $(-3)^3 = -27$
c) $4^3 = 64$
d) $(-2)^4 = 16$

019 **Busca dos números tales que, al elevarlos a la cuarta potencia, tengan el mismo valor. ¿Cuántos números cumplen esta condición?**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $2^4 = 16 = (-2)^4$

Todo número y su opuesto elevados a la cuarta dan el mismo resultado.

020 **Expresa estas operaciones con potencias con una sola potencia, y utiliza la calculadora para resolverlas.**

a) $3^4 \cdot 3^5$ **c) $4^{12} : 4^8$** **e) $(-3)^6 \cdot (-3)^2$** **g) $(-4)^{12} : (-4)^8$**
b) $5^3 \cdot 5^2$ **d) $7^4 : 7$** **f) $(-5)^3 \cdot (-5)^2$** **h) $(-7)^4 : (-7)$**

a) $3^9 = 19\,683$
b) $5^5 = 3\,125$
c) $4^4 = 256$
d) $7^3 = 343$
e) $(-3)^8 = 6\,561$
f) $(-5)^5 = -3\,125$
g) $(-4)^4 = 256$
h) $(-7)^3 = -343$

021 **Resuelve las operaciones.**

a) $5^2 \cdot 5^2 + 3^6 : 3^5 + 10^2 \cdot 10^3$

b) $5^2 : 5 + 3^3 \cdot 3^2 + 10^2 : 10^2$

a) $5^2 \cdot 5^2 + 3^6 : 3^5 + 10^2 \cdot 10^3 = 5^4 + 3 + 10^5 = 625 + 3 + 100\,000 =$
$= 100\,628$

b) $5^2 : 5 + 3^3 \cdot 3^2 + 10^2 : 10^2 = 5 + 3^5 + 1 = 5 + 243 + 1 = 249$

022 **Calcula el exponente que falta.**

a) $4^6 \cdot 4^{\square} = 4^9$ **b)** $(-7)^{\square} : (-7)^3 = (-7)^3$

a) $4^6 \cdot 4^3 = 4^9$ b) $(-7)^6 : (-7)^3 = (-7)^3$

023 **Calcula estas potencias.**

a) $(7^4)^6$ **c)** 4^0 **e)** $(-4)^1$

b) $[(-2)^3]^4$ **d)** $(-2)^0$ **f)** 23^1

a) 7^{24}

b) $(-2)^{12}$

c) 1

d) 1

e) -4

f) 23

024 **Expresa como un producto o una división de potencias.**

a) $(3 \cdot 2)^3$ **c)** $[(-3) \cdot 2]^3$ **e)** $[(-3) \cdot (-2)]^3$

b) $(8 : 4)^4$ **d)** $[(-8) : 4]^4$ **f)** $[(-8) : (-4)]^4$

a) $3^3 \cdot 2^3$

b) $8^4 : 4^4$

c) $(-3)^3 \cdot 2^3$

d) $(-8)^4 : 4^4$

e) $(-3)^3 \cdot (-2)^3$

f) $(-8)^4 : (-4)^4$

025 **Expresa como una sola potencia.**

a) $8^3 \cdot 2^3$ **c)** $(-12)^5 \cdot 4^5$ **e)** $(-14)^8 \cdot (-7)^8$

b) $8^3 : 2^3$ **d)** $(-12)^5 : 4^5$ **f)** $(-14)^8 : (-7)^8$

a) 16^3

b) 4^3

c) $(-48)^5$

d) $(-3)^5$

e) 98^8

f) 2^8

026 **Sin operar, di si las desigualdades son ciertas.**

a) $(1 : 2)^3 < \frac{1}{4}$ **b)** $(-2 : 7)^3 > 1$

a) Cierta b) Falsa

027 **Halla la raíz cuadrada de estos números.**

a) 169 **c)** 196 **e)** 225

b) 400 **d)** 900 **f)** 1 600

a) ±13 c) ±14 e) ±15

b) ±20 d) ±30 f) ±40

028 **Calcula la raíz cuadrada entera y el resto.**

a) 45 **b)** 87 **c)** 115

a) Raíz: 6, resto: 9 b) Raíz: 9, resto: 6 c) Raíz: 10, resto: 15

029 **Obtén un número cuya raíz cuadrada entera sea 6 y su resto 2.**

$6 \cdot 6 + 2 = 36 + 2 = 38$

030 **¿Cuánto puede valer como máximo el resto de una raíz cuadrada entera?**

El resto es, como máximo, el doble de la raíz entera.

031 **Calcula.**

a) $(+4) \cdot (-7) + (-3) \cdot (-2)$
b) $(+16) : (-8) + (-24) : (-6)$
c) $(-4) \cdot (-5) - (+3) \cdot (-2)$
d) $(-12) : (-3) - (+4) : (-2)$

a) $-28 + 6 = -22$
b) $-2 + 4 = 2$
c) $20 - (-6) = 26$
d) $4 - (-2) = 6$

032 **Haz estas operaciones.**

a) $(+7) - (-12) \cdot (+5)$
b) $(-5) - [(-6) - (-5) \cdot (-9)]$
c) $[4^2 - (-4)] : [2 \cdot (-2)]$
d) $(3^2 - 4) \cdot (-5) - 1$

a) $(+7) - (-12) \cdot (+5) = 7 + 60 = 67$

b) $(-5) - [(-6) - (-5) \cdot (-9)] = -5 - [-6 - 45] = -5 - (-51) =$
$= -5 + 51 = 46$

c) $[4^2 - (-4)] : [2 \cdot (-2)] = [16 - (-4)] : (-4) = (16 + 4) : (-4) =$
$= 20 : (-4) = -5$

d) $(3^2 - 4) \cdot (-5) - 1 = (9 - 4) \cdot (-5) - 1 = 5 \cdot (-5) - 1 =$
$= -25 - 1 = -26$

033 **Resuelve las operaciones.**

a) $(+45) : [(-7) + (+2)]$
b) $(+2) \cdot [(-63) : (-7)]$
c) $(-25) : [(+3) - (+8)]$
d) $(-8) \cdot [(+21) : (-3)]$
e) $(-7) - [(-14) : (+2) - (-7)]$

a) $(+45) : [(-7) + (+2)] = 45 : [-7 + 2] = 45 : (-5) = -9$

b) $(+2) \cdot [(-63) : (-7)] = 2 \cdot 9 = 18$

c) $(-25) : [(+3) - (+8)] = -25 : (-5) = 5$

d) $(-8) \cdot [(+21) : (-3)] = -8 \cdot (-7) = 56$

e) $(-7) - [(-14) : (+2) - (-7)] = -7 - (-7 + 7) = -7$

034 **Calcula.**

a) $(+50) - (-4)^2 + (-3)^3$
b) $-4^3 - (-5)^2 - (-12)$

a) $(+50) - (-4)^2 + (-3)^3 = 50 - (+16) + (-27) = 50 - 16 - 27 =$
$= 50 - 43 = 7$

b) $-4^3 - (-5)^2 - (-12) = -64 - 25 + 12 = -77$

035 **Calcula diez múltiplos y todos los divisores de estos números.**

a) 8 **b) 7** **c) 4** **d) 10**

¿Cuántos múltiplos tiene un número entero?

a) $\dot{8} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80\}$
Div (8) $= \{1, 2, 4, 8\}$

b) $\dot{7} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70\}$
Div (7) $= \{1, 7\}$

c) $\dot{4} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$
Div (4) $= \{1, 2, 4\}$

d) $\dot{10} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$
Div (10) $= \{1, 2, 5, 10\}$

Un número entero tiene infinitos múltiplos.

036 **¿Cuáles de los siguientes números son primos?**

4 5 9 11 14 17 21

Son primos 5, 11 y 17. Todos los demás números son divisibles por 2 o por 3.

037 **Copia en tu cuaderno y completa.**

Div (18) = {1, □, □, 6, □, 18} **Div (45) = {1, □, □, □, □, 45}**

Div (18) $= \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ Div (45) $= \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

038 **Determina el valor de *a*.**

Div (*a*) = {1, 5, 11, □}

$a = 55$

039 **Comprueba si son divisibles por 2, 3, 5, 10 y 11.**

a) 145 **b) 3 467** **c) 12 624** **d) 212**

a) 145 es divisible por 5.
b) 3 467 no es divisible por ninguno de estos números.
c) 12 624 es divisible por 2 y 3.
d) 212 es divisible por 2 y 11.

040 **Descompón en factores primos.**

a) 210 **b) 270** **c) 66** **d) 92**

a) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
b) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$
c) $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
d) $92 = 2^2 \cdot 23$

041 **Escribe todas las parejas de números cuyo producto dé como resultado 30.**

1 y 30, 2 y 15, 3 y 10, 5 y 6

042 **Calcula *a* para que 3*a*6 sea múltiplo de 11.**

$a = 3 + 6 = 9$

043 **Descompón estos números en factores primos, y calcula su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.**

a) 18 y 20

b) 28 y 42

c) 18 y 4

d) 18 y 32

e) 48 y 32

f) 21 y 28

a) $18 = 2 \cdot 3^2$
$20 = 2^2 \cdot 5$
m.c.d. (18, 20) = 2
m.c.m. (18, 20) = 180

b) $28 = 2^2 \cdot 7$
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
m.c.d. (28, 42) = 14
m.c.m. (28, 42) = 84

c) $18 = 2 \cdot 3^2$
$4 = 2^2$
m.c.d. (18, 4) = 2
m.c.m. (18, 4) = 36

d) $18 = 2 \cdot 3^2$
$32 = 2^5$
m.c.d. (18, 32) = 2
m.c.m. (18, 32) = 288

e) $48 = 2^4 \cdot 3$
$32 = 2^5$
m.c.d. (48, 32) = 16
m.c.m. (48, 32) = 96

f) $21 = 3 \cdot 7$
$28 = 2^2 \cdot 7$
m.c.d. (21, 28) = 7
m.c.m. (21, 28) = 84

044 **Halla el m.c.d. y el m.c.m. de estos números.**

a) 10, 12 y 35

b) 15, 20 y 27

a) $$\left.\begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{m.c.d. } (10, 12, 35) = 1 \\ \text{m.c.m. } (10, 12, 35) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420 \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \\ 27 = 3^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{m.c.d. } (15, 20, 27) = 1 \\ \text{m.c.m. } (15, 20, 27) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540 \end{array}$$

045 **Da dos valores de *x* para que se cumpla que m.c.m. (*x*, 8) = 40.**

x puede tomar cualquiera de estos valores: 5, 10, 20 o 40.

Números enteros

ACTIVIDADES

046 **Expresa con un número entero.**

a) Luis ganó 6 000 € en la lotería.

b) El termómetro marcó 7 °C bajo cero.

c) Marta vive en el cuarto piso.

d) La tienda está en el segundo sótano.

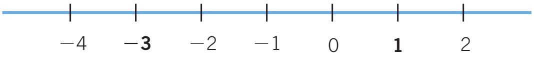
a) $+6000$

b) -7

c) $+4$

d) -2

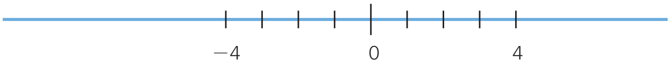
047 **Copia y completa esta recta numérica:**



048 **Representa estos números enteros en una recta numérica:**

-5, 7, -9, 0, -3 y 2

049 **¿Cuántos números enteros hay entre -4 y 4?**



Hay 7 números.

050 **Copia y completa con el signo < o >.**

a) $-9 \square -12$

b) $3 \square -2$

c) $-1 \square -4$

d) $-7 \square -5$

a) $-9 > -12$

b) $3 > -2$

c) $-1 > -4$

d) $-7 < -5$

051 **Halla el número anterior y posterior.**

a) $\square < 4 < \square$

b) $\square < 12 < \square$

c) $\square < -4 < \square$

d) $\square < -8 < \square$

a) $3 < 4 < 5$

b) $11 < 12 < 13$

c) $-5 < -4 < -3$

d) $-9 < -8 < -7$

052 ●

Determina un número entero que esté comprendido entre los números que se indican.

a) $-3 < \square < 0$

b) $-8 < \square < -5$

c) $7 < \square < 10$

d) $-4 < \square < -2$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $-3 < -2 < 0$

b) $-8 < -6 < -5$

c) $7 < 9 < 10$

d) $-4 < -3 < -2$

053 ●

Escribe dos números enteros.

a) **Menores que $+3$ y mayores que -1.**

b) **Menores que -3.**

c) **Mayores que -6.**

d) **Mayores que -2 y menores que $+1$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $-1 < 0 < +2 < +3$

b) $-6 < -5 < -3$

c) $-6 < -4 < -3$

d) $-2 < -1 < 0 < +1$

054 ●

Ordena, de menor a mayor, los siguientes números: -4, 6, -7, 11, -9, -6, 0, 2 y -1.

$-9 < -7 < -6 < -4 < -1 < 0 < 2 < 6 < 11$

055 ●●

El opuesto de un número es -5. ¿Cuál es el número?

Si $\text{Op}(n) = -5$, entonces $n = 5$.

056 ●●

El opuesto del opuesto de un número es $+3$. ¿Cuál es ese número?

Si $\text{Op}(\text{Op}(n)) = +3$, entonces $n = 3$.

057 ●●

¿Qué valores puede tomar *a* en cada caso?

a) $|a| = 6$

b) $|a| = 17$

a) $a = -6$ o $a = 6$

b) $a = -17$ o $a = 17$

058 ●●

¿Cómo es el valor absoluto de un número cualquiera y de su opuesto?

El valor absoluto es siempre positivo; por ejemplo: $|-3| = 3$ y $|3| = 3$

059 ●●

¿Puede ser $|x| = -1$? Razónalo.

No, porque el valor absoluto de cualquier número es siempre positivo.

060 ●

Calcula las siguientes sumas y restas.

a) $(+12) + (+25)$

b) $(-9) + (+13)$

c) $(-3) + (-11)$

d) $(+17) + (-8)$

e) $(+19) - (+5)$

f) $(-21) - (+33)$

g) $(-7) - (-11)$

h) $(+22) - (-15)$

a) 37 c) -14 e) 14 g) 4

b) 4 d) 9 f) -54 h) 37

061 ●

Copia y completa esta tabla:

a	b	$a - b$	$b - a$	$a + b$	$b + a$
-7	**$+9$**	-16	16	2	2
-12	**-5**	-7	7	-17	-17
$+11$	**-18**	29	-29	-7	-7
$+23$	**$+17$**	6	-6	40	40

Fíjate en las dos últimas columnas. ¿Qué observas?

La suma cumple la propiedad conmutativa, pero la resta no la cumple.

062 ●

Realiza las siguientes sumas.

a) $(+10) + (-5) + (+7) + (-9)$

b) $(-29) + (-12) + (-9) + (+17)$

c) $(-20) + (+33) + (+21) + (-23)$

d) $(-23) + (-41) + (-16) + (+50)$

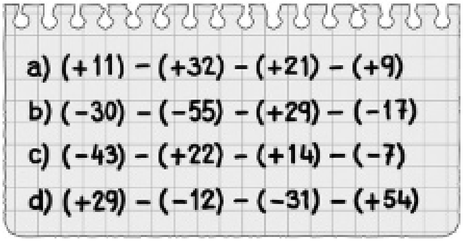
a) $(+10) + (-5) + (+7) + (-9) = 10 - 5 + 7 - 9 = 17 - 14 = 3$

b) $(-29) + (-12) + (-9) + (+17) = -29 - 12 - 9 + 17 =$
$= 17 - 50 = -33$

c) $(-20) + (+33) + (+21) + (-23) = -20 + 33 + 21 - 23 =$
$= 54 - 43 = 11$

d) $(-23) + (-41) + (-16) + (+50) = -23 - 41 - 16 + 50 =$
$= 50 - 80 = -30$

063 **Calcula estas restas.**



a) $(+11) - (+32) - (+21) - (+9)$

b) $(-30) - (-55) - (+29) - (-17)$

c) $(-43) - (+22) - (+14) - (-7)$

d) $(+29) - (-12) - (-31) - (+54)$

a) $(+11) - (+32) - (+21) - (+9) = 11 - 32 - 21 - 9 =$
$= 11 - 62 = -51$

b) $(-30) - (-55) - (+29) - (-17) = -30 + 55 - 29 + 17 =$
$= 72 - 59 = 13$

c) $(-43) - (+22) - (+14) - (-7) = -43 - 22 - 14 + 7 =$
$= 7 - 79 = -72$

d) $(+29) - (-12) - (-31) - (+54) = 29 + 12 + 31 - 54 =$
$= 72 - 54 = 18$

064 **Realiza estas sumas y restas combinadas.**

a) $(-21) + (-12) - (+9)$

b) $(+17) - (+23) + (+34)$

c) $(-32) + (-19) - (-11)$

d) $(-54) - (+22) + (-10)$

a) $(-21) + (-12) - (+9) = -21 - 12 - 9 = -42$

b) $(+17) - (+23) + (+34) = 17 - 23 + 34 = 51 - 23 = 28$

c) $(-32) + (-19) - (-11) = -32 - 19 + 11 = 11 - 51 = -40$

d) $(-54) - (+22) + (-10) = -54 - 22 - 10 = -86$

065 **Calcula.**

a) $8 - 7 + 4 - 3 - 2$

b) $-7 - 5 + 3 - 9 - 1 + 11$

c) $-4 - 2 + 5 - 1 - 4 + 1$

d) $6 - 3 + 3 - 10 - 4 + 13$

e) $-9 - 14 + 4 - 56 - 16 + 1$

f) $9 + 14 - 6 - 93 + 19$

a) 0	d) 5
b) -8	e) -90
c) -5	f) -57

066 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE SUMAS Y RESTAS COMBINADAS CON PARÉNTESIS?

Calcula: $-3 + (-8 + 9) - (3 - 6)$

PRIMERO. Se eliminan los paréntesis.

- Si están precedidos por el signo $+$, se mantienen las operaciones del interior como aparecen.
- Si están precedidos por el signo $-$, todos los signos del interior se transforman en sus opuestos.

$$+(-8+9) = -8+9$$

$$-3 + (-8 + 9) - (3 - 6) = -3 - 8 + 9 - 3 + 6$$

$$-(3-6) = -3+6$$

SEGUNDO. Se agrupan los sumandos positivos, por un lado, y los negativos, por otro.

$$-3 - 8 + 9 - 3 + 6 = (9 + 6) - (3 + 8 + 3) =$$
$$= 15 - 14 = 1$$

067 ●●

Realiza estas operaciones.

a) $6 + (-4 + 2) - (-3 - 1)$

b) $7 - (4 - 3) + (-1 - 2)$

c) $3 + (2 - 3) - (1 - 5 - 7)$

d) $-8 + (1 + 4) + (-7 - 9)$

a) $6 - 4 + 2 + 3 + 1 = 8$

b) $7 - 4 + 3 - 1 - 2 = 3$

c) $3 + 2 - 3 - 1 + 5 + 7 = 13$

d) $-8 + 1 + 4 - 7 - 9 = -19$

068 ●●

Copia y completa los huecos para que las igualdades sean ciertas.

a) $(-11) + \square = +4$

b) $(+13) + \square = +12$

c) $\square + (-20) = -12$

d) $(+3) - \square = -7$

e) $(-15) - \square = +9$

f) $\square - (+8) = +7$

a) $(-11) + 15 = +4$

b) $(+13) + (-1) = +12$

c) $8 + (-20) = -12$

d) $(+3) - 10 = -7$

e) $(-15) - (-24) = +9$

f) $15 - (+8) = +7$

069 ●

Calcula los siguientes productos.

a) $(+12) \cdot (+4)$

b) $(-42) \cdot (-3)$

c) $(+5) \cdot (-35)$

d) $(-14) \cdot (+5)$

a) 48

b) 126

c) -175

d) -70

070 ●

Copia y completa esta tabla:

a	***b***	***a · b***	***b · a***
−4	**−6**	24	24
+6	**−8**	−48	−48
−9	**+5**	−45	−45
+7	**+8**	56	56

¿Qué observas en las dos últimas columnas?

La multiplicación cumple la propiedad conmutativa.

071 ●

Calcula los siguientes productos.

a) (+21) · (+3) · (+4)
b) (+19) · (−2) · (+3)
c) (+13) · (−5) · (−6)
d) (−20) · (−9) · (−3)

a) 252 b) −114 c) 390 d) −540

072 ●●

Copia y completa estos productos.

a) (−5) · ☐ = −30
b) ☐ · (+3) = 45
c) (−9) · ☐ = 27
d) ☐ · (−8) = −48

a) (−5) · 6 = −30
b) 15 · (+3) = 45
c) (−9) · (−3) = 27
d) 6 · (−8) = −48

073 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE SACA FACTOR COMÚN EN OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS?

Calcula: −12 · (−27) + (−12) · (+17)

PRIMERO. Se determina si existe un factor que se repite en todos los sumandos. A este número se le denomina factor común.

$$\mathbf{-12} \cdot (-27) + (\mathbf{-12}) \cdot (+17)$$

−12 se repite en los dos sumandos

SEGUNDO. El factor que se repite multiplica a la suma o resta de los sumandos.

$$\mathbf{-12} \cdot (-27) + (\mathbf{-12}) \cdot (+17) =$$
$$= \mathbf{-12} \cdot [(-27) + (+17)] = \mathbf{-12} \cdot (-10) = 120$$

074 ●●

Resuelve sacando factor común.

a) $(-3) \cdot (-4) + (-3) \cdot (-9)$

b) $7 \cdot (-12) + 7 \cdot (+6)$

c) $(-5) \cdot (+11) + (-5) \cdot (-10)$

a) $(-3) \cdot [(-4) + (-9)] = 39$

b) $7 \cdot [(-12) + (+6)] = -42$

c) $(-5) \cdot [(+11) + (-10)] = -5$

075 ●●

Copia y completa sacando factor común.

a) $5 \cdot (-4) + 5 \cdot (-7) = 5 \cdot [\square + (-7)]$

b) $(-9) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4) = \square \cdot [2 + (-4)]$

a) $5 \cdot (-4) + 5 \cdot (-7) = 5 \cdot [(-4) + (-7)]$

b) $(-9) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4) = (-9) \cdot [2 + (-4)]$

076 ●●

Realiza estas divisiones.

a) $(+35) : (-7) : (-5)$

b) $(-21) : (-7) : (-1)$

c) $(+32) : (-8) : (-2)$

d) $(-4) : (+4) : (-1)$

a) 1

b) -3

c) 2

d) 1

077 ●●

Opera.

a) $(+21) \cdot (+2) : (-14)$

b) $(+5) : (-5) \cdot (-4)$

c) $(+2) \cdot (+9) : (-3)$

d) $[(-2) \cdot (+7)] : (-14) \cdot (+3)$

e) $(+36) : [(-9) : (+3)] \cdot (+5)$

f) $(+36) : (-9) : (+2) \cdot (+5)$

a) $42 : (-14) = -3$

b) $(-1) \cdot (-4) = 4$

c) $18 : (-3) = -6$

d) $(-14) : (-14) \cdot (+3) = 3$

e) $(+36) : (-3) \cdot (+5) = -60$

f) $(-4) : (+2) \cdot (+5) = -10$

078 ●●

Copia y completa las siguientes divisiones.

a) $(-36) : \square = -4$

b) $(-54) : \square = +9$

c) $\square : (-6) = -42$

d) $(+48) : \square = -6$

e) $(-63) : \square = -7$

f) $\square : (+8) = +2$

a) $(-36) : (+9) = -4$

b) $(-54) : (-6) = +9$

c) $(+252) : (-6) = -42$

d) $(+48) : (-8) = -6$

e) $(-63) : (+9) = -7$

f) $(+16) : (+8) = +2$

079 ●

Escribe en forma de potencia, e indica la base y el exponente.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

b) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

c) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

a) $7^4 \longrightarrow$ Base: 7, exponente: 4

b) $(-2)^3 \rightarrow$ Base: −2, exponente: 3

c) $(-5)^5 \rightarrow$ Base: −5, exponente: 5

080 ●

Escribe en forma de potencia y en forma de producto.

a) Base 11 y exponente 4.

b) Base −2 y exponente 3.

a) $11^4 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

081 ●●

Calcula las siguientes potencias.

a) 4^5 **c) 14^2** **e) 7^3** **g) 5^4**

b) $(-2)^6$ **d) $(-4)^4$** **f) $(-9)^2$** **h) $(-6)^4$**

a) 1024

b) 64

c) 196

d) 256

e) 343

f) 81

g) 625

h) 1296

082 ●●

Copia y completa.

a) $(-2)^{\square} = 4$

b) $(-3)^{\square} = 9$

c) $(-2)^{\square} = -8$

d) $(-3)^{\square} = -27$

a) $(-2)^2 = 4$

b) $(-3)^2 = 9$

c) $(-2)^3 = -8$

d) $(-3)^3 = -27$

083 ●

Calcula las siguientes potencias.

a) 5^0 **b) 23^1** **c) $(-3)^0$** **d) $(-57)^1$**

a) 1

b) 23

c) 1

d) −57

084 ●

Expresa como una sola potencia.

a) $5^3 \cdot 5^4$

b) $11^6 \cdot 11^4$

c) $(-3)^5 \cdot (-3)^3$

d) $(-8)^4 \cdot (-8)$

a) 5^7

b) 11^{10}

c) $(-3)^8$

d) $(-8)^5$

085 ●

Expresa como una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^3 \cdot 4$

b) $9^5 \cdot 9^2 \cdot 9^4$

c) $(-2)^6 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)$

d) $(-7)^3 \cdot (-7) \cdot (-7)^6$

a) 4^7

b) 9^{11}

c) $(-2)^{11}$

d) $(-7)^{10}$

086 ●●

Copia y completa.

a) $5^4 \cdot 5^{\square} \cdot 5^2 = 5^9$

b) $13 \cdot 13^3 \cdot 13^{\square} = 13^5$

c) $(-11)^{\square} \cdot (-11)^4 \cdot (-11) = (-11)^7$

d) $(-21)^8 \cdot (-21)^3 \cdot (-21)^{\square} = (-21)^{11}$

a) $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^2 = 5^9$

b) $13 \cdot 13^3 \cdot 13 = 13^5$

c) $(-11)^2 \cdot (-11)^4 \cdot (-11) = (-11)^7$

d) $(-21)^8 \cdot (-21)^3 \cdot (-21)^0 = (-21)^{11}$

087 ●

Expresa como una sola potencia.

a) $7^5 : 7^3$

b) $12^8 : 12^5$

c) $(-9)^6 : (-9)^3$

d) $(-6)^7 : (-6)$

a) 7^2

b) 12^3

c) $(-9)^3$

d) $(-6)^6$

088 ●●

Expresa como una sola potencia.

a) $(2^8 : 2^3) \cdot 2^3$

b) $3^5 : (3^7 : 3^4)$

c) $[(-4)^6 : (-4)] : (-4)^2$

d) $(-5)^3 : [(-5)^4 : (-5)]$

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^8$

b) $3^5 : 3^3 = 3^2$

c) $(-4)^5 : (-4)^2 = (-4)^3$

d) $(-5)^3 : (-5)^3 = (-5)^0 = 1$

089 ●

Expresa como una sola potencia.

a) $(5^4)^3$

b) $(7^5)^2$

c) $[(-3)^4]^3$

d) $[(-9)^3]^3$

a) 5^{12}

b) 7^{10}

c) $(-3)^{12}$

d) $(-9)^9$

090 ●●

Copia y completa.

a) $(3^6)^{\square} = 3^{18}$

b) $(8^5)^{\square} = 8^{20}$

c) $[(-2)^{\square}]^4 = (-2)^8$

d) $[(-7)^3]^{\square} = (-7)^9$

a) $(3^6)^3 = 3^{18}$

b) $(8^5)^4 = 8^{20}$

c) $[(-2)^2]^4 = (-2)^8$

d) $[(-7)^3]^3 = (-7)^9$

091 ●●

Expresa como una sola potencia.

a) $(2^5)^2 \cdot (2^2)^4$

b) $(10^3)^3 \cdot (10^2)^4$

c) $[(-3)^5]^3 \cdot [(-3)^4]^3$

d) $[(-10)^2]^2 \cdot [(-10)^3]^3$

a) $2^{10} \cdot 2^8 = 2^{18}$

b) $10^9 \cdot 10^8 = 10^{17}$

c) $(-3)^{15} \cdot (-3)^{12} = (-3)^{27}$

d) $(-10)^4 \cdot (-10)^9 = (-10)^{13}$

092 ●●

Expresa como una sola potencia.

a) $(6^2)^5 : (6^3)^3$

b) $(23^7)^2 : (23^3)^4$

c) $[(-14)^9]^2 : [(-14)^3]^5$

d) $[(-2)^8]^3 : (-2)^4$

a) $6^{10} : 6^9 = 6$

b) $23^{14} : 23^{12} = 23^2$

c) $(-14)^{18} : (-14)^{15} = (-14)^3$

d) $(-2)^{24} : (-2)^4 = (-2)^{20}$

093

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PRODUCTOS DE POTENCIAS CUANDO LAS BASES TIENEN FACTORES PRIMOS COMUNES?

Simplifica estos productos de potencias.

a) $8^4 \cdot 16^2$ **b)** $3^4 \cdot 9^2$ **c)** $(-3)^4 \cdot 18^2$

PRIMERO. Se descomponen las bases de las potencias en producto de factores primos.

a) $8 = 2^3$, $16 = 2^4$

b) $3 = 3$, $9 = 3^2$

c) $-3 = -1 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$

SEGUNDO. Se sustituyen las bases por su descomposición en factores y se opera.

a) $8^4 \cdot 16^2 = (2^3)^4 \cdot (2^4)^2 = 2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

b) $3^4 \cdot 9^2 = 3^4 \cdot (3^2)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^8$

c) $(-3)^4 \cdot 18^2 = (-1 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 =$
$= (-1)^4 \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^4 =$
$= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^8 = 2^2 \cdot 3^8$

094 ●●●

Simplifica estos productos de potencias.

a) $5^4 \cdot 25^3$

b) $8^4 \cdot 16^2$

c) $6^3 \cdot 12^5$

d) $4^7 \cdot 32$

e) $(-12)^3 \cdot 18^5$

f) $(-63)^5 \cdot 21^2$

g) $32^2 \cdot (-24)^3$

h) $-72^3 \cdot (-4)^7$

a) $5^4 \cdot 5^6 = 5^{10}$

b) $2^{12} \cdot 2^8 = 2^{20}$

c) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 = 2^{13} \cdot 3^8$

d) $2^{14} \cdot 2^5 = 2^{19}$

e) $(-1) \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = (-1) \cdot 2^{11} \cdot 3^{13}$

f) $(-1) \cdot 3^{10} \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (-1) \cdot 3^{12} \cdot 7^7$

g) $2^{10} \cdot (-1) \cdot 2^9 \cdot 3^3 = (-1) \cdot 2^{19} \cdot 3^3$

h) $(-1) \cdot 2^9 \cdot 3^6 \cdot (-1) \cdot 2^{14} = 2^{23} \cdot 3^6$

095 ●●● **Escribe como potencia de una potencia.**

a) 7^9 **b)** 6^8 **c)** $(-12)^6$ **d)** $(-8)^{12}$

a) $(7^3)^3$ b) $(6^4)^2$ c) $[(-12)^2]^3$ d) $[(-8)^4]^3$

096 ●●● **Copia y completa.**

a) $(\square)^4 = 256$ **c)** $(\square)^3 = -27$

b) $(\square)^5 = 243$ **d)** $(\square)^7 = -128$

a) $(4)^4 = 256$ c) $(-3)^3 = -27$

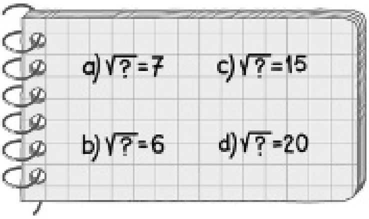
b) $(3)^5 = 243$ d) $(-2)^7 = -128$

097 ● **Calcula la raíz cuadrada de estos números.**

a) 64 **b)** 121 **c)** 144 **d)** 196

a) ± 8 b) ± 11 c) ± 12 d) ± 14

098 ●● **Copia y completa.**



a) $\sqrt{49} = \pm 7$ b) $\sqrt{36} = \pm 6$ c) $\sqrt{225} = \pm 15$ d) $\sqrt{400} = \pm 20$

099 ●● **Calcula, sin operar, la raíz cuadrada y el resto de estos números.**

a) 93 **b)** 59 **c)** 130 **d)** 111

a) $\sqrt{93} = 9 \rightarrow$ Resto $= 12$ c) $\sqrt{130} = 11 \rightarrow$ Resto $= 9$

b) $\sqrt{59} = 7 \rightarrow$ Resto $= 10$ d) $\sqrt{111} = 10 \rightarrow$ Resto $= 11$

100 ● **Halla el resto en cada caso.**

a) Raíz = 12
Radicando = 160

c) Raíz = 30
Radicando = 901

b) Raíz = 23
Radicando = 532

d) Raíz = 32
Radicando = 1 030

a) Resto = radicando − (raíz)^2 $= 160 - 12^2 = 160 - 144 = 16$

b) Resto = radicando − (raíz)^2 $= 532 - 23^2 = 532 - 529 = 3$

c) Resto = radicando − (raíz)^2 $= 901 - 30^2 = 901 - 900 = 1$

d) Resto = radicando − (raíz)^2 $= 1\,030 - 32^2 = 1\,030 - 1\,024 = 6$

101 ●●

Señala, sin realizar cálculos, cuáles de las afirmaciones son falsas.

a) $\sqrt{23} = 4$ **y resto 7**
b) $\sqrt{30} = 5$ **y resto 10**
c) $\sqrt{45} = 7$ **y resto 4**
d) $\sqrt{60} = 7$ **y resto 11**
e) $\sqrt{80} = 9$ **y resto 1**
f) $\sqrt{85} = 9$ **y resto 5**
g) $\sqrt{96} = 9$ **y resto 15**
h) $\sqrt{204} = 14$ **y resto 2**

a) Verdadera
b) Falsa: $5^2 + 10 = 35 \neq 30$
c) Falsa: $7^2 + 4 = 53 \neq 45$
d) Verdadera
e) Falsa: $9^2 + 1 = 82 \neq 80$
f) Falsa: $9^2 + 5 = 86 \neq 85$
g) Verdadera
h) Falsa: $14^2 + 2 = 198 \neq 204$

102 ●●

Escribe todos los números enteros de dos cifras cuya raíz cuadrada entera tenga de resto 2.

6, 11, 18, 27, 38, 51, 66 y 83

103 ●●

Escribe todos los números de tres cifras menores de 500 cuya raíz tenga de resto 10.

110, 131, 154, 206, 235, 266, 299, 334, 371, 410, 451 y 494

104 ●●

Un número tiene por raíz cuadrada entera 5 y su resto es el máximo posible. ¿Cuál es el resto? ¿Y cuál es el número?

El resto es 10 y el número es 35.

105 ●●●

Halla el menor número que sumado a 265 da un cuadrado perfecto.

El número es 24, ya que:
$265 + 24 = 289 = 17^2$

106 ●●

Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-13) \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7)$
b) $(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4)$
c) $(-35) : (-7) + (-54) : (+9)$
d) $[(-25) + 5 - (-4)] : (-8)$
e) $[(-16) + (-9) + 5] : (-4)$
f) $[(-4) + (-3) \cdot (-6)] : 7$

a) $(-13) \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7) = -39 + 84 = 45$
b) $(-3) \cdot (-12) - (-15) \cdot (-4) = 36 - 60 = -24$
c) $(-35) : (-7) + (-54) : (+9) = 5 + (-6) = 5 - 6 = -1$
d) $[(-25) + 5 - (-4)] : (-8) = [-25 + 5 + 4] : (-8) = -16 : (-8) = 2$
e) $[(-16) + (-9) + 5] : (-4) = [-16 - 9 + 5] : (-4) = -20 : (-4) = 5$
f) $[(-4) + (-3) \cdot (-6)] : 7 = [-4 + 18] : 7 = 14 : 7 = 2$

107 ●●

Resuelve las operaciones.

a) $(-11)\cdot[10+(-7)]+36:[(-1)-(-10)]$

b) $(-8)\cdot[5-(-2)]-48:[6+(-14)]$

c) $42:[(-6)-(-3)]+28:[-6-(-8)]$

d) $32:[(-19)+3]-24:[(-11)-(-5)]$

a) $(-11)\cdot[10+(-7)]+36:[(-1)-(-10)]=(-11)\cdot 3+36:9=$
$=-33+4=-29$

b) $(-8)\cdot[5-(-2)]-48:[6+(-14)]=(-8)\cdot 7-48:(-8)=$
$=-56+6=-50$

c) $42:[(-6)-(-3)]+28:[-6-(-8)]=42:(-3)+28:2=$
$=-14+14=0$

d) $32:[(-19)+3]-24:[(-11)-(-5)]=32:(-16)-24:(-6)=$
$=-2+4=2$

108 ●●

Efectúa estas operaciones combinadas.

a) $(-5)^2\cdot[3+28:(-4)]$

b) $2^2\cdot[-5\cdot 2-32:(-8)]$

c) $3^3:[-5+(-7)\cdot(-2)]$

d) $(-4)^3:[(-15):5-(-45):(-9)]$

a) $(-5)^2\cdot[3+28:(-4)]=(-5)^2\cdot[3-7]=(-5)^2\cdot(-4)=$
$=25\cdot(-4)=-100$

b) $2^2\cdot[-5\cdot 2-32:(-8)]=2^2\cdot[-10+4]=2^2\cdot(-6)=$
$=4\cdot(-6)=-24$

c) $3^3:[-5+(-7)\cdot(-2)]=3^3:[-5+14]=3^3:9=27:9=3$

d) $(-4)^3:[(-15):5-(-45):(-9)]=(-4)^3:[-3-5]=(-4)^3:(-8)=$
$=-64:(-8)=8$

109 ●●●

Resuelve las operaciones considerando solo el resultado positivo de la raíz.

a) $\sqrt{9}+(-3)\cdot[12+(-7)]$

b) $\sqrt{81}:3+4\cdot[-12-2\cdot(-3)]$

c) $7\cdot(5+3)-\sqrt{36}:(-3)$

d) $-3-(-4)\cdot[\sqrt{64}-5\cdot(-2)]$

a) $\sqrt{9}+(-3)\cdot[12+(-7)]=\sqrt{9}+(-3)\cdot 5=3-15=-12$

b) $\sqrt{81}:3+4\cdot[-12-2\cdot(-3)]=\sqrt{81}:3+4\cdot[-12+6]=$
$=9:3+4\cdot(-6)=3-24=-21$

c) $7\cdot(5+3)-\sqrt{36}:(-3)=7\cdot 8-\sqrt{36}:(-3)=7\cdot 8-6:(-3)=$
$=56+2=58$

d) $-3-(-4)\cdot[\sqrt{64}-5\cdot(-2)]=-3-(-4)\cdot[8+10]=$
$=-3-(-4)\cdot 18=-3+72=69$

110 ●●● **Calcula, utilizando solo el resultado positivo de la raíz.**

a) $\sqrt{100} : 5 + 3^3 : (-3)$

b) $12 - 18 : 2 + (-4) \cdot \sqrt{121}$

c) $(-5) \cdot 3^2 - \sqrt{49} : [(-5) \cdot (-2) - 3^1]$

d) $(-8)^5 : (-8)^3 - (-4)^2 \cdot (\sqrt{16} - 2^0)$

e) $\sqrt{144} : [7 + (-5)]^2 + (-2)^3$

a) $\sqrt{100} : 5 + 3^3 : (-3) = 10 : 5 + 27 : (-3) = 2 - 9 = -7$

b) $12 - 18 : 2 + (-4) \cdot \sqrt{121} = 12 - 9 + (-4) \cdot 11 = 12 - 9 - 44 =$
$= 12 - 53 = -41$

c) $(-5) \cdot 3^2 - \sqrt{49} : [(-5) \cdot (-2) - 3^1] = (-5) \cdot 9 - 7 : [10 - 3] =$
$= -45 - 7 : 7 = -45 - 1 = -46$

d) $(-8)^5 : (-8)^3 - (-4)^2 \cdot \left(\sqrt{16} - 2^0\right) = (-8)^2 - 16 \cdot (4 - 1) =$
$= 64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$

e) $\sqrt{144} : [7 + (-5)]^2 + (-2)^3 = 12 : [7 - 5]^2 - 8 = 12 : 2^2 - 8 =$
$= 12 : 4 - 8 = 3 - 8 = -5$

111 ●●● **Encuentra los errores en estas igualdades.**

a) $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 - 8) = 0$

b) $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 - 2 = -1 + 7 - 2 = -6 - 2 = -8$

c) $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 + 2 = 11 - 5 = 6$

d) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 - 10 = -22$

e) $4 - 5 \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$

a) $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 + 8) = -16$

b) $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 + 2 = -1 + 7 + 2 = -6 + 2 = -4$

c) $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 - 2 = 11 - 9 = 2$

d) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 + 10 = -2$

e) $4 - 5 \cdot (-2) = 4 - (-10) = 14$

112 ● **Copia y completa con múltiplos de 12.**

$\dot{12} = \{12, \square, 36, \square, 60, \square, \ldots\}$

$\dot{12} = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\}$

113 ● **Halla los múltiplos de 7 comprendidos entre 20 y 40.**

$\dot{7} = \{\ldots, 21, 28, 35, \ldots\}$

114 ● **Obtén los múltiplos de 4 comprendidos entre 18 y 30.**

$\dot{4} = \{\ldots, 20, 24, 28, \ldots\}$

115 **Calcula todos los divisores de:**

a) 28 **b) 54** **c) 63** **d) 90**

a) Div (28) = {1, 2, 4, 7, 14, 28}
b) Div (54) = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}
c) Div (63) = {1, 7, 9, 63}
d) Div (90) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}

116 **Copia y completa los divisores de 42.**

Div (42) = {1, 2, ☐, ☐, ☐, 14, ☐, ☐}

Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

117 **Dados los números: 12, 15, 18, 24, 4, 423, 10, 267, 23, 2, di cuáles son múltiplos de:**

a) 2 **b) 3** **c) 6**

a) 12, 18, 24, 4, 10 y 2
b) 12, 15, 18, 24, 423 y 267
c) 12, 18 y 24

118 **Escribe los múltiplos de 5 comprendidos entre 0 y 15.**

a) ¿Cuáles de ellos son múltiplos de 7?
b) ¿Y cuáles son menores que 15?

$\dot{5} = \{\dots, 5, 10, 15, \dots\}$

a) Ninguno es múltiplo de 7. b) Todos son menores que 15.

119 **Di cuáles de los siguientes números son primos. Razona la respuesta.**

a) 21 **b) 19** **c) 43** **d) 39**

Son primos 19 y 43, porque solo tienen dos divisores: ellos mismos y la unidad.

120 **Averigua si los números son primos o compuestos: 72, 147, 282, 331 y 407.**

Compuestos: 72, 147, 282 y 407
Primo: 331

121 **Realiza la descomposición factorial de:**

a) 3 850 **b) 432** **c) 561**

a) $3850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$
b) $432 = 2^4 \cdot 3^3$
c) $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$

122 ●

Calcula el máximo común divisor de cada par de números.

a) 45 y 27 **b) 28 y 21** **c) 18 y 12**

a) $$\left.\begin{array}{l} 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 27 = 3^3 \end{array}\right\}$$
m.c.d. $(45, 27) = 3^2 = 9$

c) $$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array}\right\}$$
m.c.d. $(18, 12) = 2 \cdot 3 = 6$

b) $$\left.\begin{array}{l} 28 = 2^2 \cdot 7 \\ 21 = 3 \cdot 7 \end{array}\right\}$$
m.c.d. $(28, 21) = 7$

123 ●●

Halla el máximo común divisor.

a) 6, 8 y 12 **b) 16, 20 y 28** **c) 40, 10 y 25**

a) $6 = 2 \cdot 3$ $8 = 2^3$ $12 = 2^2 \cdot 3$
m.c.d. $(6, 8, 12) = 2$

b) $16 = 2^4$ $20 = 2^2 \cdot 5$ $28 = 2^2 \cdot 7$
m.c.d. $(16, 20, 28) = 2^2 = 4$

c) $40 = 2^3 \cdot 5$ $10 = 2 \cdot 5$ $25 = 5^2$
m.c.d. $(40, 10, 25) = 5$

124 ●●

Si m.c.d. (x, 12) = 6, halla el valor de x.

El valor de x será cualquier número múltiplo de 6 y que no sea múltiplo de 12, por ejemplo: 6, 18, 30, 42…

125 ●

Calcula el mínimo común múltiplo.

a) 12 y 18 **b) 15 y 45** **c) 27 y 18**

a) $12 = 2^2 \cdot 3$ $18 = 2 \cdot 3^2$ → m.c.m. $(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b) $15 = 3 \cdot 5$ $45 = 3^2 \cdot 5$ → m.c.m. $(15, 45) = 3^2 \cdot 5 = 45$

c) $27 = 3^3$ $18 = 2 \cdot 3^2$ → m.c.m. $(27, 18) = 2 \cdot 3^3 = 54$

126 ●●

Obtén el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 12, 9 y 10 **b) 4, 18 y 27** **c) 8, 30 y 24**

a) $12 = 2^2 \cdot 3$ $9 = 3^2$ $10 = 2 \cdot 5$
m.c.m. $(12, 9, 10) = 180$

b) $4 = 2^2$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $27 = 3^3$
m.c.m. $(4, 18, 27) = 108$

c) $8 = 2^3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $24 = 2^3 \cdot 3$
m.c.m. $(8, 30, 24) = 120$

127 ●●●

Halla dos números cuyo m.c.d. sea 6 y su m.c.m sea 36.

Los números son 36 y 6.

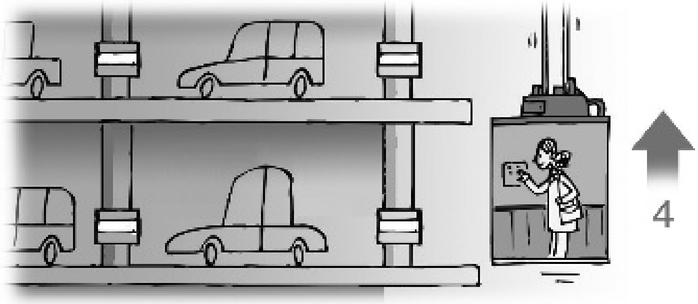
128 ●●
A las 7 de la mañana el termómetro marcaba 4 °C bajo cero, y cinco horas después marcaba 3 °C sobre cero. ¿Cuál es la diferencia entre las dos temperaturas?

Hay $3 - (-4) = 7$ °C de diferencia.

129 ●●
María vive en el 3.^{er} piso. Baja 5 plantas para ir al trastero y luego sube 7 para visitar a su amigo Alberto. ¿En qué piso vive Alberto?

$3 - 5 + 7 = 10 - 5 = 5$
Alberto vive en el 5.º piso.

130 ●●
Sara deja el coche en el tercer sótano y sube 4 plantas hasta su casa. ¿En qué piso vive?



$-3 + 4 = 1$
Sara vive en el 1.^{er} piso.

131 ●●
Luis tiene 123 €. A fin de mes recibe 900 € de sueldo y paga su hipoteca de 546 €. ¿Cuánto dinero le queda finalmente?

Al final le quedan: $123 + 900 - 546 = 1023 - 546 = 477$ €

132 ●●
¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede formar con 52 sellos? ¿Cuántos sobran?

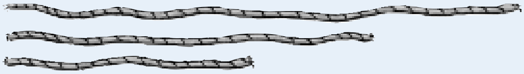
El mayor cuadrado que se puede formar es el que tiene 7 sellos en cada lado, ya que $7^2 = 49$, y sobran 3 sellos.

133 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE EL m.c.d.?

Tres cuerdas de 4, 6 y 9 m, respectivamente, se quieren cortar en trozos iguales. ¿Cuál es la longitud de los mayores trozos que se pueden hacer?

PRIMERO. Se analiza el problema.



La longitud de cada trozo tiene que ser un divisor de las longitudes de las cuerdas.
Tiene que ser el máximo → PROBLEMA DE m.c.d.

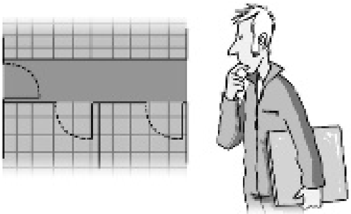
SEGUNDO. Se realizan los cálculos.

$4 = 2^2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 9 = 3^2$

m.c.d. $(4, 6, 9) = 1$

Los trozos de mayor longitud son de 1 m.

134 ●● **El pasillo de una vivienda tiene 432 cm de largo y 128 cm de ancho. Se quiere poner baldosas cuadradas del mayor tamaño posible, sin tener que cortar ninguna. Calcula sus dimensiones y el número de baldosas.**



$432 = 2^4 \cdot 3^3$

$128 = 2^7$

m.c.d. $(432, 128) = 2^4 = 16$

Las baldosas medirán 16 cm de lado y serán: $27 \cdot 8 = 216$ baldosas

135 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE EL m.c.m.?

Los libros de una estantería se pueden colocar en montones de 4, 6 y 9 libros sin que sobre ninguno. ¿Cuál es la menor cantidad de libros que puede haber?

PRIMERO. Se analiza el problema.

El número total de libros tiene que ser múltiplo de 4, 6 y 9.
Tiene que ser el mínimo → PROBLEMA DE m.c.m.

SEGUNDO. Se realizan los cálculos.

$4 = 2^2 \qquad 6 = 2 \cdot 3 \qquad 9 = 3^2$

m.c.m. $(4, 6, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Como mínimo hay 36 libros.

136 ●●

Alejandro tiene unas 150 fotografías. Puede pegarlas en un álbum en grupos de 8, 9 o 12 fotografías y sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotografías tiene Alejandro?

$8 = 2^3$
$9 = 3^2$
$12 = 2^2 \cdot 3$

El número de fotografías ha de ser múltiplo de 8, 9 y 12, por lo que será múltiplo del m.c.m. (8, 9, 12) = 72.

El múltiplo de 72 más cercano a 150 es 144.

Por tanto, Alejandro tiene 144 fotografías.

137 ●●●

Por una vía ferroviaria pasa un tren con dirección a Zaragoza cada 30 minutos y otro con dirección a Gijón cada 18 minutos. Si se han cruzado los dos trenes a las 10 de la mañana, halla a qué hora volverán a cruzarse.

$18 = 2 \cdot 3^2$ $\qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Los trenes se volverán a cruzar en un número múltiplo de 18 y 30, y como m.c.m. (18, 30) = 90, se cruzan cada 90 minutos.
El próximo cruce será a las 11:30 horas.

138 ●●●

Luis viaja a Barcelona cada 15 días y su hermana Marta lo hace cada 20 días. ¿Cuándo coincidirán de nuevo en Barcelona si la última vez que coincidieron en esa ciudad fue el 2 de octubre?

$15 = 3 \cdot 5$ $\qquad 20 = 2^2 \cdot 5$

m.c.m. (15, 20) = 60

Coinciden cada 60 días, luego, volverán a coincidir el 1 de diciembre.

139 ●●●

En una carretera han puesto farolas en ambos lados. En un lado se ha colocado una farola cada 12 metros, y en el otro, cada 18 metros. Sabiendo que la primera farola de cada lado está situada a la misma altura, ¿qué distancia debemos recorrer a partir de ese punto para encontrar dos farolas colocadas una frente a la otra?

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad 18 = 2 \cdot 3^3$

m.c.m. (12, 18) = 36

Debemos recorrer una distancia de 36 m.

140 ●●●

Calcula todos los números enteros a y b que verifican estas condiciones. Cuando no exista ninguna solución, explica por qué ocurre y, si hay infinitas posibilidades, describe cómo son.

a) $|a| + |b| = 4$
b) $|a + b| = 4$
c) $|a| - |b| = 4$
d) $|a - b| = 4$
e) $|a| \cdot |b| = 12$
f) $|a \cdot b| = 12$
g) $|a| : |b| = 12$
h) $|a| : |b| = 1/2$
i) $a^2 = 64$
j) $a^2 = -64$
k) $a^3 = 64$
l) $a^3 = -64$

a) $a = 0, b = \pm 4$ $\quad a = \pm 1, b = \pm 3$ $\quad a = \pm 2, b = \pm 2$
$a = \pm 3, b = \pm 1$ $\quad a = \pm 4, b = 0$

b) Hay infinitas soluciones, siendo $a + b = \pm 4$.

c) Hay infinitas soluciones, siendo $a = -|b| - 4$ o $a = |b| + 4$.

d) Hay infinitas soluciones, siendo $a - b = \pm 4$.

e) $a = \pm 1, b = \pm 12$ $\quad a = \pm 2, b = \pm 6$ $\quad a = \pm 3, b = \pm 4$
$a = \pm 4, b = \pm 3$ $\quad a = \pm 6, b = \pm 2$ $\quad a = \pm 12, b = \pm 1$

f) $a = \pm 1, b = \pm 12$ $\quad a = \pm 2, b = \pm 6$ $\quad a = \pm 3, b = \pm 4$
$a = \pm 4, b = \pm 3$ $\quad a = \pm 6, b = \pm 2$ $\quad a = \pm 12, b = \pm 1$

g) Hay infinitas soluciones, siendo $a = \pm 12 \cdot b$.

h) Hay infinitas soluciones, siendo $b = \pm 2 \cdot a$.

i) $a = \pm 8$

j) No hay solución, las potencias pares no son negativas.

k) $a = 4$

l) $a = -4$

141 ●●●

Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 25^2 = 5\,525$, di cuál es el valor de:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 50^2$$

Cada sumando de la segunda suma es el cuádruple del mismo sumando de la primera, luego, la segunda suma es cuatro veces la primera.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 50^2 = 4 \cdot 5\,525 = 22\,100$$

142 ●●●

Ordena, de menor a mayor, estos números:

$$2^{2006} - 2 \qquad 2^{2008} \qquad 2^{2005} + 2\,007 \qquad 2^{2006} + 2$$

Expresa como una potencia de base 2 la suma de los dos números centrales.

$2^{2005} + 2007 < 2^{2006} - 2 < 2^{2006} + 2 < 2^{2008}$

$2^{2006} - 2 + 2^{2006} + 2 = 2 \cdot 2^{2006} = 2^{2007}$

143 ●●●

Si m y n son números enteros positivos, ¿cuál es el menor valor de m para que $2\,940 \cdot m = n^2$?

$2\,940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$

Si $m = 3 \cdot 5 = 15$ y $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ tenemos que:

$2\,940 \cdot 15 = 210^2 = 44\,100$

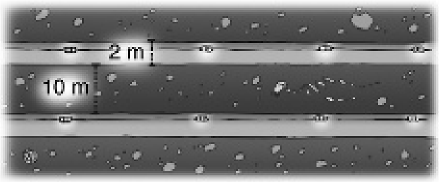
PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

144 ●●●

En un pozo minero ha habido un derrumbe. Se han activado las medidas de emergencia y se ha formado un equipo de salvamento.

De los 32 mineros que permanecían en el interior de la mina en el momento del derrumbe tan solo dos de ellos siguen atrapados.

La estructura de esta mina subterránea de carbón está formada por galerías horizontales. Además, la distancia vertical entre cada dos galerías es de 10 m, y su altura, 2 m.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

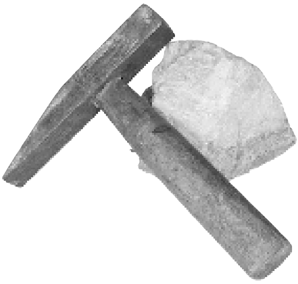
a) ¿A qué profundidad se encuentran los mineros atrapados?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Los equipos de salvamento están en las galerías 18 y 11. ¿Qué grupo de salvamento se encuentra a menor distancia de los mineros?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Es necesario perforar para llegar hasta los mineros. Según los técnicos, solo se puede perforar 1 m cada 12 minutos al descender y 1 m cada 9 minutos al ascender. ¿Desde qué galería se llegará primero?



a) El suelo de la primera galería está a 12 m de la superficie, el suelo de la segunda a 12 metros más, el de la tercera a otros 12 m del suelo de la segunda…

El techo de la galería 14 estará a:

$14 \cdot 12 - 2 = 166$ m de profundidad

b) La distancia entre el suelo de la 11 y el techo de la 14 es: $3 \cdot 12 - 2 = 34$ m

La distancia entre el suelo de la 14 y el techo de la 18 es: $4 \cdot 12 - 2 = 46$ m

Están a menor distancia los situados en la galería 11.

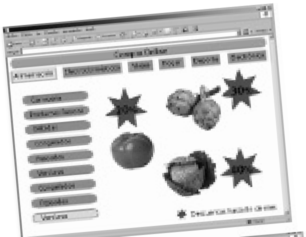
c) Para llegar de la galería 11 a la 14 deben perforar 30 m, ya que las galerías son huecas y no hay que perforarlas, por lo que tardarán: 30 · 12 = 360 minutos.

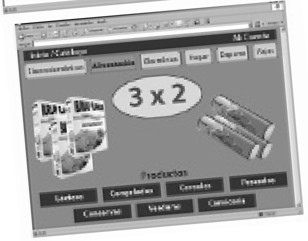
Para llegar de la galería 18 a la 14 deben perforar 40 m, y tardarán: 40 · 9 = 360 minutos.

Por tanto, los dos equipos de salvamento tardarán el mismo tiempo.

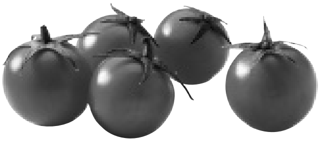
145 ●●● **La lesión de tobillo de Miguel no le impide hacer la compra semanalmente. Miguel visita periódicamente las páginas de Internet de dos supermercados y luego compara los precios.**

Ha confeccionado una tabla con la diferencia de precios de los artículos que necesita en los dos supermercados, Super 1 y Super 2.





Artículo	En Super1 es…
Bote de tomate frito	6 cént. más barato
Botella de aceite	72 cént. más cara
Botella de refresco	9 cént. más barata
Botella de zumo	23 cént. más barata
Bolsa de galletas	8 cént. más cara
Lechuga	2 cént. más cara
Kilo de tomates	12 cént. más barato
Barra de pan	3 cént. más cara
Kilo de arroz	16 cént. más barato



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si una botella de aceite cuesta 2,15 € en el Super 1, ¿cuánto cuesta en el Super 2?

b) Si una lechuga cuesta 65 céntimos en el Super 2, ¿cuánto cuesta en el Super 1?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si compra pan, una botella de zumo y un kilo de arroz, ¿dónde le saldrá más barato?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) ¿En qué supermercado es más barato hacer toda la compra?

e) ¿Cuánto dinero se ahorrará?

a) 2,15 − 0,72 = 1,43 €

b) 65 + 2 = 67 céntimos

c) Si lo compra en el Super 1: 3 + (−23) + (−16) = −36

En el Super 1 le costará 36 céntimos menos que en el Super 2.

d) y e) Si hace toda la compra en el Super 1:

−6 + 72 + (−9) + (−23) + 8 + 2 + (−12) + 3 + (−16) = 19

Si hace toda la compra, le sale 19 céntimos más cara en el Super 1.

2 Fracciones

Alejandro Magno

En una ocasión, Roxana, la esposa de Alejandro Magno, le preguntó a su marido:

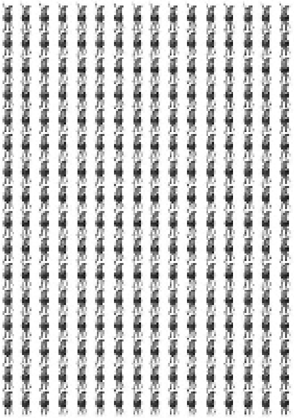
–¿A qué dios le agradeces la conquista del mundo?

A lo que Alejandro le contestó:

–Mi primer agradecimiento va dirigido a mí mismo; y el segundo, al legado de mi padre: su invencible ejército, la *falange macedonia*.

–Pero los imperios conquistados tenían un ejército, generalmente, más numeroso que el tuyo –replicó Roxana.

–La fuerza de mi ejército –explicó Alejandro– reside en su organización, no en su número: cada fila de 16 hoplitas es la cuarta parte de una *tetrarquia*, que a su vez es la cuarta parte de un *syntagma*, y 64 de estas unidades de infantería forman la falange. Su simple presencia infunde respeto a los ejércitos enemigos.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre Alejandro Magno y la época en que vivió.**

Se puede encontrar una biografía sobre Alejandro Magno visitando esta página:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/alejandro_magno.htm

Se puede obtener información sobre aspectos sociales de la época en que vivió Alejandro Magno visitando la siguiente página web:
http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=14499

2 **Explica la organización de la falange macedonia utilizando las fracciones.**

En esta página web se puede encontrar información sobre esta formación militar:
http://mural.uv.es/peberor/falange%20macedonica.htm

En esta otra página web se puede completar la información sobre cómo organizó Alejandro Magno su ejército y en particular sobre la falange macedonia:
http://www.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ALEJANDRO%20MAGNO/Alejandro_falanges.htm

3 **Averigua cómo se han utilizado las fracciones a lo largo de la historia.**

En esta página se puede encontrar como se han utilizado las fracciones:
http://lasmatematicaskaren.galeon.com/aficiones1944322.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:**

a) 24 y 12 **b) 45, 14 y 7** **c) 6, 24 y 72**

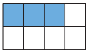
a) $24 = 2^3 \cdot 3$ $12 = 2^2 \cdot 3$
m.c.d. $(24, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$ m.c.m. $(24, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$

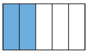
b) $45 = 3^2 \cdot 5$ $14 = 2 \cdot 7$ $7 = 7$
m.c.d. $(45, 14, 7) = 1$ m.c.m. $(45, 14, 7) = 2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 630$

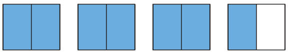
c) $6 = 2 \cdot 3$ $24 = 2^3 \cdot 3$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$
m.c.d. $(6, 24, 72) = 2 \cdot 3 = 6$ m.c.m. $(6, 24, 72) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

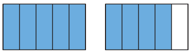
2 **Representa las siguientes fracciones.**

a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{7}{2}$ **d)** $\frac{9}{5}$

a)  $\frac{3}{8}$

b)  $\frac{2}{5}$

c)  $\frac{7}{2}$

d)  $\frac{9}{5}$

3 **Razona si estas fracciones son propias, impropias o iguales a la unidad.**

a) $\frac{5}{7}$ **b)** $\frac{19}{7}$ **c)** $\frac{3}{3}$ **d)** $\frac{13}{5}$

a) $5 < 7$ → Fracción propia
b) $19 > 7$ → Fracción impropia
c) $3 = 3$ → Igual a la unidad
d) $13 > 5$ → Fracción impropia

Fracciones

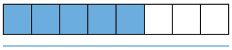
EJERCICIOS

001 **Interpreta como parte de la unidad y como cociente estas fracciones.**

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{1}{2}$

a)

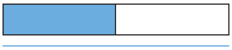

$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6 \leftarrow$ FRACCIÓN COMO COCIENTE

b)


$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0,625 \leftarrow$ FRACCIÓN COMO COCIENTE

c)


$\frac{7}{9} = 7 : 9 = 0,\overset{\frown}{7} \leftarrow$ FRACCIÓN COMO COCIENTE

d)


$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5 \leftarrow$ FRACCIÓN COMO COCIENTE

002 **Calcula.**

a) $\frac{2}{3}$ **de 30** **b)** $\frac{1}{5}$ **de 25** **c)** $\frac{3}{5}$ **de 250**

a) $\frac{2}{3} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 30}{3} = \frac{60}{3} = 20$

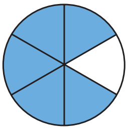
b) $\frac{1}{5} \cdot 25 = \frac{1 \cdot 25}{5} = \frac{25}{5} = 5$

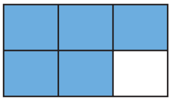
c) $\frac{3}{5} \cdot 250 = \frac{3 \cdot 250}{5} = \frac{750}{5} = 150$

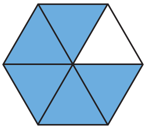
003 **Ana compra 75 cromos en el kiosco. Al abrirlos, ve que los $\frac{2}{5}$ de los cromos están repetidos. ¿Cuántos cromos son repetidos?**

$\frac{2}{5} \cdot 75 = \frac{2 \cdot 75}{5} = \frac{150}{5} = 30$ cromos

004 **Representa la fracción $\frac{5}{6}$ con tres figuras distintas.**







005 **¿Son equivalentes los siguientes pares de fracciones?**

a) $\frac{15}{6}$ **y** $\frac{105}{36}$ **b)** $\frac{17}{13}$ **y** $\frac{85}{52}$ **c)** $\frac{12}{30}$ **y** $\frac{5}{2}$

a) $\left.\begin{array}{r}15\cdot 36=540\\ 6\cdot 105=630\end{array}\right\}\rightarrow 540\neq 630$. No son equivalentes.

b) $\left.\begin{array}{r}17\cdot 52=884\\ 13\cdot 85=1\,105\end{array}\right\}\rightarrow 884\neq 1\,105$. No son equivalentes.

c) $\left.\begin{array}{r}12\cdot 2=24\\ 30\cdot 5=150\end{array}\right\}\rightarrow 24\neq 150$. No son equivalentes.

006 **Escribe tres fracciones equivalentes por simplificación y otras tres por amplificación.**

a) $\frac{72}{120}$ **b)** $\frac{140}{320}$ **c)** $\frac{450}{650}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) Amplificación: $\frac{72}{120}=\frac{144}{240}=\frac{216}{360}=\frac{288}{480}$

Simplificación: $\frac{72}{120}=\frac{36}{60}=\frac{24}{40}=\frac{18}{30}$

b) Amplificación: $\frac{140}{320}=\frac{280}{640}=\frac{420}{960}=\frac{560}{1\,280}$

Simplificación: $\frac{140}{320}=\frac{70}{160}=\frac{35}{80}=\frac{28}{64}$

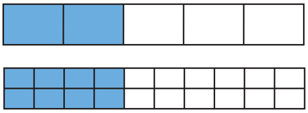
c) Amplificación: $\frac{450}{650}=\frac{900}{1\,300}=\frac{1\,350}{1\,950}=\frac{1\,800}{2\,600}$

Simplificación: $\frac{450}{650}=\frac{225}{325}=\frac{90}{130}=\frac{45}{65}$

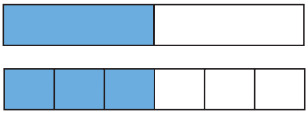
007 **Comprueba gráficamente que son equivalentes.**

a) $\frac{2}{5}$ **y** $\frac{8}{20}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **y** $\frac{6}{8}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **y** $\frac{3}{6}$

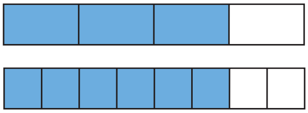
a)



c)



b)



008 **Halla el término *a* para que sean equivalentes.**

a) $\frac{3}{a} = \frac{12}{20}$ **b)** $\frac{9}{12} = \frac{45}{a}$ **c)** $\frac{14}{11} = \frac{a}{22}$

a) $\frac{3}{a} = \frac{12}{20} \rightarrow 3 \cdot 20 = a \cdot 12 \rightarrow a = \frac{60}{12} = 5$

b) $\frac{9}{12} = \frac{45}{a} \rightarrow 9 \cdot a = 12 \cdot 45 \rightarrow a = \frac{540}{9} = 60$

c) $\frac{14}{11} = \frac{a}{22} \rightarrow 14 \cdot 22 = 11 \cdot a \rightarrow a = \frac{308}{11} = 28$

009 **Calcula la fracción irreducible de:**

a) $\frac{24}{36}$ **b)** $\frac{60}{25}$ **c)** $\frac{540}{320}$ **d)** $\frac{120}{90}$

a) $\frac{24}{36} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.d. } (24,\ 36) = 12}}{=} \frac{2}{3}$

b) $\frac{60}{25} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.d. } (60,\ 25) = 5}}{=} \frac{12}{5}$

c) $\frac{540}{320} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.d. } (540,\ 320) = 20}}{=} \frac{27}{16}$

d) $\frac{120}{90} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.d. } (120,\ 90) = 30}}{=} \frac{4}{3}$

010 **Reduce a común denominador.**

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{1}{10}$$

m.c.m. (3, 5, 4, 6, 10) = 60

$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ $\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$ $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$ $\frac{7}{6} = \frac{70}{60}$ $\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$

011 **Señala cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles.**

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{23}{17}$ **c)** $\frac{10}{25}$ **d)** $\frac{57}{21}$

a) $\frac{1}{3}$ es irreducible.

b) $\frac{23}{17}$ es irreducible.

c) $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ no es irreducible.

d) $\frac{57}{21} = \frac{19}{7}$ no es irreducible.

012 **¿Puede obtenerse la fracción $\frac{1}{3}$ simplificando $\frac{363}{369}$?**

No, porque las fracciones no son equivalentes: $\frac{1}{3} \neq \frac{363}{369}$

013 **Ordena, de menor a mayor, aplicando los criterios de comparación de fracciones.**

a) $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{9}, \frac{3}{5}$ y $\frac{6}{15}$

c) $\frac{6}{8}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}$ y $\frac{10}{8}$

d) $\frac{4}{5}, \frac{7}{3}$ y $\frac{9}{12}$

a) m.c.m. (5, 4, 7) = 140 → $\frac{3}{5} = \frac{84}{140} \quad \frac{2}{5} = \frac{56}{140} \quad \frac{1}{4} = \frac{35}{140} \quad \frac{1}{7} = \frac{20}{140}$

$$\frac{20}{140} < \frac{35}{140} < \frac{56}{140} < \frac{84}{140} \rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{4} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

b) m.c.m. (9, 5, 15) = 45 → $\frac{2}{9} = \frac{10}{45} \quad \frac{3}{5} = \frac{27}{45} \quad \frac{6}{15} = \frac{18}{45}$

$$\frac{10}{45} < \frac{18}{45} < \frac{27}{45} \rightarrow \frac{2}{9} < \frac{6}{15} < \frac{3}{5}$$

c) m.c.m. (8, 4, 6) = 24 → $\frac{6}{8} = \frac{18}{24} \quad \frac{5}{4} = \frac{30}{24} \quad \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \quad \frac{10}{8} = \frac{30}{24}$

$$\frac{18}{24} < \frac{20}{24} < \frac{30}{24} = \frac{30}{24} \rightarrow \frac{6}{8} < \frac{5}{6} < \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$$

d) m.c.m. (5, 3, 12) = 60 → $\frac{4}{5} = \frac{48}{60} \quad \frac{7}{3} = \frac{140}{60} \quad \frac{9}{12} = \frac{45}{60}$

$$\frac{45}{60} < \frac{48}{60} < \frac{140}{60} \rightarrow \frac{9}{12} < \frac{4}{5} < \frac{7}{3}$$

014 **Ordena, de mayor a menor, hallando el valor numérico de cada fracción.**

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{5}, \frac{2}{4}, \frac{2}{8}$ y $\frac{2}{2}$

a) 0,25 > 0,2 > 0,125 > 0,1

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{8} > \frac{1}{10}$$

b) 1 > 0,5 > 0,4 > 0,25

$$\frac{2}{2} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{8}$$

015 **¿Cuánto vale *a* si $\frac{a}{5}$ es mayor que $\frac{4}{5}$?**

$\frac{a}{5} > \frac{4}{5} \rightarrow a > 4$, por ser los denominadores iguales.

016 **Calcula y simplifica el resultado, si se puede.**

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}-\frac{7}{2}-\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{9}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$ **d)** $\frac{4}{7}+\frac{2}{4}-\frac{1}{2}$ **f)** $\frac{7}{5}-\frac{8}{3}+\frac{9}{10}$

a) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2+4+1}{3}=\frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{15+2-1}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$

c) $\frac{3}{4}-\frac{7}{2}-\frac{1}{3}=\frac{9-42-4}{12}=\frac{-37}{12}=-\frac{37}{12}$

d) $\frac{4}{7}+\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{16+14-14}{28}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

e) $\frac{9}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}=\frac{126-10-35}{70}=\frac{81}{70}$

f) $\frac{7}{5}-\frac{8}{3}+\frac{9}{10}=\frac{42-80+27}{30}=\frac{-11}{30}=-\frac{11}{30}$

017 **Realiza estas operaciones.**

a) $\frac{2}{15}+\frac{7}{18}+\left(-\frac{5}{12}\right)$ **b)** $\frac{2}{15}+\frac{7}{18}-\left(-\frac{5}{12}\right)$

a) $\frac{2}{15}+\frac{7}{18}+\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{2}{15}+\frac{7}{18}-\frac{5}{12}=\frac{24+70-75}{180}=\frac{19}{180}$

b) $\frac{2}{15}+\frac{7}{18}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{2}{15}+\frac{7}{18}+\frac{5}{12}=\frac{24+70+75}{180}=\frac{169}{180}$

018 **Halla el valor de *a*.**

$$\frac{a}{7}+3-\frac{1}{2}=\frac{45}{14}$$

$\frac{a}{7}+3-\frac{1}{2}=\frac{45}{14}\rightarrow\frac{2a+42-7}{14}=\frac{45}{14}\rightarrow 2a+42-7=45\rightarrow a=5$

019 **Haz estas operaciones.**

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}$

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 5\cdot 6}=\frac{6}{150}\underset{\substack{\uparrow\\ :6}}{=}\frac{1}{25}$

b) $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}=\frac{4\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 6\cdot 5}=\frac{180}{210}\underset{\substack{\uparrow\\ :30}}{=}\frac{6}{7}$

020 **Calcula.**

a) $\frac{2}{3}$ **de 60** **b)** $\frac{3}{5}$ **de 90**

a) $\frac{2}{3} \cdot 60 = \frac{2 \cdot 60}{3} = \frac{120}{3} = 40$ b) $\frac{3}{5} \cdot 90 = \frac{3 \cdot 90}{5} = \frac{270}{5} = 54$

021 **Los $\frac{3}{4}$ del agua de una localidad son reciclados, y de ese agua reciclada los $\frac{2}{5}$ se utilizan para riego. ¿Qué fracción del total de agua se utiliza para riego?**

$\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Las $\frac{3}{10}$ partes del agua de la localidad se utilizan para riego.

022 **Una vela se consume en $\frac{1}{4}$ parte cada hora. Si nos queda $\frac{1}{2}$ de vela, ¿cuántas horas la podremos tener encendida?**

Como $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$, con $\frac{1}{2}$ vela tendremos luz durante 2 horas.

023 **Escribe en forma de potencia.**

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ **b)** $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

024 **Calcula.**

a) $\sqrt{\frac{36}{49}}$ **b)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **c)** $\sqrt{\frac{81}{25}}$

a) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$ b) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ c) $\sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$

025 **Escribe en forma de potencia.**

a) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{25}{49}$

a) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = -\left(\frac{3}{4}\right)^4$ b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{25}{49} = \frac{5^4}{7^4} = \left(\frac{5}{7}\right)^4$

026 **¿Existe alguna fracción cuya raíz dé como resultado $\frac{7}{3}$?**

$$\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}, \text{ porque: } \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

027 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 4$

b) $\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) : \frac{5}{3}$

c) $3 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right) : 2$

d) $1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - 3 : \frac{1}{2}$

a) $$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot 4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.m. }(5,\,2,\,3)\,=\,30}}{=} \left(\frac{12 + 15 - 10}{30}\right) \cdot 4 = \frac{17}{30} \cdot 4 = \frac{68}{30} \underset{\substack{\uparrow \\ :\,2}}{=} \frac{34}{15}$$

b) $$\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) : \frac{5}{3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{m.c.m. }(4,\,3,\,6)\,=\,12}}{=} \left(\frac{12 + 3 - 4 + 14}{12}\right) : \frac{5}{3} = \frac{25}{12} : \frac{5}{3} =$$

$$= \frac{25 \cdot 3}{12 \cdot 5} = \frac{75}{60} \underset{\substack{\uparrow \\ :\,5}}{=} \frac{15}{12} \underset{\substack{\uparrow \\ :\,3}}{=} \frac{5}{4}$$

c) $$3 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right) : 2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{2 + 4 - 1}{4}\right) : 2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} : 2 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6 - 5}{8} = \frac{1}{8}$$

d) $$1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) - 3 : \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4 - 5}{6}\right) - 3 \cdot 2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 6 = 1 - \frac{1}{24} - 6 = -5 - \frac{1}{24} = \frac{-120 - 1}{24} = -\frac{121}{24}$$

028 **Haz estas operaciones.**

a) $\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] \cdot 2$

b) $\left(\frac{4}{5} - 3\right) \cdot (-2)$

a) $$\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] \cdot 2 = \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot 2 =$$

$$= \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] \cdot 2 = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot 2 = -\frac{5}{6}$$

b) $$\left(\frac{4}{5} - 3\right) \cdot (-2) = \left(-\frac{11}{5}\right) \cdot (-2) = \frac{22}{5}$$

029 **Calcula el valor de *a*.**

a) $-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)=\frac{11}{6}$ **b)** $\left(\frac{a}{4}-\frac{a}{3}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{39}{8}$

a) $-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)=\frac{11}{6}\rightarrow-\left(\frac{3a+2}{6}\right)\cdot(-1)=\frac{11}{6}$

$\rightarrow\frac{3a+2}{6}=\frac{11}{6}\rightarrow 3a+2=11\rightarrow a=3$

b) $\left(\frac{a}{4}-\frac{a}{3}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{39}{8}\rightarrow\frac{-13a}{12}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{39}{8}$

$\rightarrow\frac{-39a}{24}=-\frac{117}{24}\rightarrow a=3$

ACTIVIDADES

030 ●● **Expresa estas situaciones mediante fracciones. Encuentra las que sean equivalentes.**

a) Luis se ha comido 3 bombones de una caja que contenía 12 bombones.

b) María ha esperado un cuarto de hora.

c) Tres de cada nueve niños tienen una mascota.

d) El libro de Juan tiene 15 capítulos, de 10 páginas cada uno, y él ha leído 100 páginas.

e) Ricardo duerme seis horas diarias.

f) El barco ha realizado dos terceras partes del trayecto.

g) He bebido media lata de refresco.

h) He pagado dos de las cinco letras del coche.

i) Ahorro la mitad de mi paga semanal.

a) $\frac{3}{12}$ c) $\frac{3}{9}$ e) $\frac{6}{24}$ g) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{100}{150}$ f) $\frac{2}{3}$ h) $\frac{2}{5}$

Son equivalentes las fracciones correspondientes a estos apartados: a) con b) y con e); d) con f), y g) con i).

031 ●● **¿Qué fracción del día representan 22 minutos? ¿Es una fracción irreducible? Razona la respuesta.**

El día tiene 1 440 minutos, luego la fracción es $\frac{22}{1\,440}$. Esta fracción no es irreducible, pues se puede simplificar: $\frac{22}{1\,440}=\frac{11}{720}$

032 ●●

¿Qué fracción de la semana representan 2 días? ¿Y qué fracción del mes representan 9 días? ¿Son fracciones irreducibles? Razona la respuesta.

Los 2 días son $\frac{2}{7}$ de semana, y los 9 días representan: $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ de mes.

Como hemos visto, la primera fracción es irreducible, pero la segunda no, pues se puede simplificar.

033 ●●

¿Qué fracción del año representan 3 meses? ¿Y qué fracción del año representan 2 160 horas? ¿Son equivalentes? Razona la respuesta.

Los 3 meses representan: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ de año

Como 2 160 horas = 90 días, representan: $\frac{90}{365} = \frac{18}{73}$ de año

Estas fracciones no son equivalentes. Podríamos afirmar que sí son equivalentes si consideramos que 90 días son 3 meses, y construimos la fracción a partir de ese dato.

034 ●

Indica si son equivalentes los siguientes pares de fracciones.

a) $\frac{6}{8}$ y $\frac{36}{48}$ **c)** $\frac{5}{4}$ y $\frac{15}{8}$ **e)** $\frac{9}{13}$ y $\frac{72}{104}$

b) $\frac{15}{12}$ y $\frac{60}{48}$ **d)** $\frac{8}{5}$ y $\frac{24}{10}$ **f)** $\frac{72}{25}$ y $\frac{123}{115}$

a) $\left.\begin{aligned} 6 \cdot 48 &= 288 \\ 8 \cdot 36 &= 288 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 15 \cdot 48 &= 720 \\ 12 \cdot 60 &= 720 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 5 \cdot 8 &= 40 \\ 4 \cdot 15 &= 60 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 8 \cdot 10 &= 80 \\ 5 \cdot 24 &= 120 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} 9 \cdot 104 &= 936 \\ 13 \cdot 72 &= 936 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} 72 \cdot 115 &= 8\,280 \\ 25 \cdot 123 &= 3\,075 \end{aligned}\right\}$

Son equivalentes las fracciones de los apartados a) y e).

035 ●

Calcula cuatro fracciones equivalentes a cada una de estas.

a) $\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{11}{6}$ **d)** $\frac{13}{2}$

a) $\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} = \frac{8}{28} = \frac{10}{35}$

b) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25}$

c) $\frac{11}{6} = \frac{22}{12} = \frac{33}{18} = \frac{44}{24} = \frac{55}{30}$

d) $\frac{13}{2} = \frac{26}{4} = \frac{39}{6} = \frac{52}{8} = \frac{65}{10}$

036 **Comprueba si son fracciones equivalentes.**

a) $\frac{6}{5}, \frac{24}{20}$ **y** $\frac{-12}{10}$

b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{15}$ **y** $\frac{2}{10}$

c) $3, \frac{9}{3}$ **y** $\frac{24}{8}$

d) $\frac{4}{7}, \frac{7}{4}, \frac{28}{4}$ **y** $\frac{7}{28}$

e) $\frac{-1}{2}, \frac{2}{-4}, \frac{3}{-6}$ **y** $\frac{-4}{8}$

f) $-3, \frac{-6}{2}, \frac{-42}{-14}$ **y** $\frac{-9}{3}$

a) $\frac{6}{5} \neq \frac{-12}{10}$

No son equivalentes.

b) Son equivalentes.

c) Son equivalentes.

d) $\frac{4}{7} \neq \frac{7}{4}$

No son equivalentes.

e) Son equivalentes.

f) $\frac{-6}{2} \neq \frac{-42}{-14}$ → No son equivalentes.

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL TÉRMINO DESCONOCIDO PARA QUE DOS FRACCIONES SEAN EQUIVALENTES?

Calcula el número que falta para que las fracciones $\frac{9}{12}$ y $\frac{\square}{4}$ sean equivalentes.

PRIMERO. Se aplica la propiedad que cumplen dos fracciones equivalentes.

$$\frac{9}{12} = \frac{\square}{4} \rightarrow 9 \cdot 4 = 12 \cdot \square$$

SEGUNDO. Se despeja el término desconocido.

$$9 \cdot 4 = 12 \cdot \square \rightarrow \square = \frac{9 \cdot 4}{12} = 3$$

038 **Halla el número que falta para que las fracciones sean equivalentes.**

a) $\frac{6}{\square} = \frac{9}{3}$ **b)** $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10}$ **c)** $\frac{8}{12} = \frac{2}{\square}$ **d)** $\frac{\square}{9} = \frac{8}{18}$

a) $\frac{6}{\square} = \frac{9}{3} \rightarrow \square = \frac{18}{9} = 2$

b) $\frac{4}{5} = \frac{\square}{10} \rightarrow \square = \frac{40}{5} = 8$

c) $\frac{8}{12} = \frac{2}{\square} \rightarrow \square = \frac{24}{8} = 3$

d) $\frac{\square}{9} = \frac{8}{18} \rightarrow \square = \frac{72}{18} = 4$

039 **Calcula la fracción irreducible.**

a) $\frac{75}{30}$ **b)** $\frac{182}{48}$ **c)** $\frac{121}{11}$

a) $\frac{75}{30} = \frac{75 : 15}{30 : 15} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{182}{48} = \frac{182 : 2}{48 : 2} = \frac{91}{24}$

c) $\frac{121}{11} = \frac{121 : 11}{11 : 11} = \frac{11}{1} = 11$

040 **Copia en tu cuaderno y completa las fracciones para que sean irreducibles.**

a) $\frac{\square}{4}$ **b)** $\frac{\square}{3}$ **c)** $\frac{5}{\square}$ **d)** $\frac{6}{\square}$ **e)** $\frac{60}{\square}$ **f)** $\frac{10}{\square}$

Hay que escribir cualquier número que no tenga factores primos comunes con el número de la fracción.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{11}$ e) $\frac{60}{77}$ f) $\frac{10}{13}$

041 **Responde razonadamente a estas cuestiones.**

a) ¿Existe alguna fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ que sea irreducible?

b) ¿Hay alguna fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ que tenga como denominador 12?

c) ¿Existe alguna fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ que tenga por numerador -10?

a) La única fracción irreducible que sea equivalente a $\frac{2}{5}$ es ella misma, pues es irreducible.

b) No, ya que 12 no es múltiplo de 5.

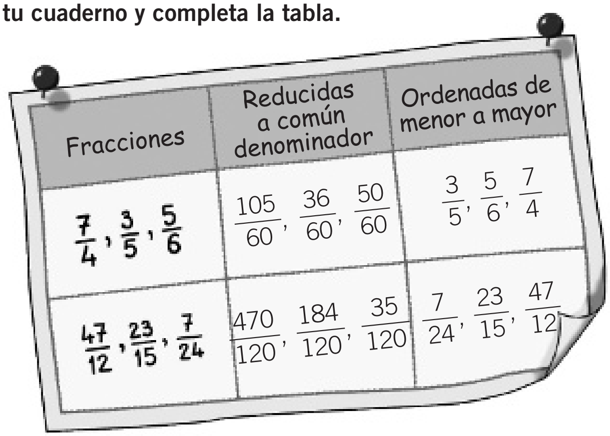
c) Sí, por ejemplo: $\frac{2}{5} = \frac{-4}{-10}$

042 **Ordena estas fracciones, de mayor a menor.**

a) $\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{3}$ **b)** $\frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{7}{12}$ **c)** $1, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}$

a) $\frac{9}{3} > \frac{7}{3} > \frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{12} > \frac{5}{12} > \frac{4}{12}$ c) $\frac{11}{6} > \frac{7}{6} > 1$

043 **Copia en tu cuaderno y completa la tabla.**



Fracciones	Reducidas a común denominador	Ordenadas de menor a mayor
$\frac{7}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{105}{60}, \frac{36}{60}, \frac{50}{60}$	$\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{4}$
$\frac{47}{12}, \frac{23}{15}, \frac{7}{24}$	$\frac{470}{120}, \frac{184}{120}, \frac{35}{120}$	$\frac{7}{24}, \frac{23}{15}, \frac{47}{12}$

044 **Ordena, de menor a mayor.**

a) $\frac{1}{3}, \frac{4}{6}$ y $\frac{7}{18}$ **b)** $\frac{2}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{18}$ y $\frac{7}{2}$

a) m.c.m. (3, 6, 18) = 18 → $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ $\frac{7}{18} = \frac{7}{18}$

$\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{12}{18} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{7}{18} < \frac{4}{6}$

b) m.c.m. (6, 5, 2) = 30 → $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$ $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ $\frac{3}{2} = \frac{45}{30}$

$\frac{5}{30} < \frac{12}{30} < \frac{45}{30} \rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{5} < \frac{3}{2}$

c) m.c.m. (6, 3, 18, 2) = 18 → $\frac{7}{6} = \frac{21}{18}$ $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ $\frac{1}{18} = \frac{1}{18}$ $\frac{7}{2} = \frac{63}{18}$

$\frac{1}{18} < \frac{12}{18} < \frac{21}{18} < \frac{63}{18} \rightarrow \frac{1}{18} < \frac{2}{3} < \frac{7}{6} < \frac{7}{2}$

045 **Ordena, de mayor a menor.**

a) $\frac{2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{-1}{4}$ y $\frac{5}{2}$ **b)** $\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{-3}{8}$ y $\frac{-9}{4}$

a) m.c.m. (5, 3, 9, 4, 2) = 180

$\frac{2}{5} = \frac{72}{180}$ $\frac{-1}{3} = \frac{-60}{180}$ $\frac{4}{9} = \frac{80}{180}$ $\frac{-1}{4} = \frac{-45}{180}$ $\frac{5}{2} = \frac{450}{180}$

$\frac{450}{180} > \frac{80}{180} > \frac{72}{180} > \frac{-45}{180} > \frac{-60}{180} \rightarrow \frac{5}{2} > \frac{4}{9} > \frac{2}{5} > \frac{-1}{4} > \frac{-1}{3}$

b) m.c.m. (5, 3, 8, 4) = 120

$\frac{3}{5} = \frac{72}{120}$ $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$ $\frac{-3}{8} = \frac{-45}{120}$ $\frac{-9}{4} = \frac{-270}{120}$

$\frac{72}{120} > \frac{40}{120} > \frac{-45}{120} > \frac{-270}{120} \rightarrow \frac{3}{5} > \frac{1}{3} > \frac{-3}{8} > \frac{-9}{4}$

046 **Calcula.**

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8}$ **c)** $\frac{4}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{3}$

b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8}$ **d)** $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{6}$

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{12 + 2 + 5}{8} = \frac{19}{8}$

b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{40 - 4 + 36 - 3}{24} = \frac{69}{24} = \frac{23}{8}$

c) $\frac{4}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{3} = \frac{8 + 3 + 28}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$

d) $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{6} = \frac{15 + 2 - 7}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE OPERA CON NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONES?

Realiza estas operaciones.

a) $\frac{7}{12} + 4$ **b)** $3 \cdot \frac{5}{4}$

PRIMERO. Se escribe el número entero como fracción con denominador 1.

a) $4 = \frac{4}{1}$ b) $3 = \frac{3}{1}$

SEGUNDO. Se realiza la operación.

a) $\frac{7}{12} + 4 = \frac{7}{12} + \frac{4}{1} = \frac{7 + 48}{12} = \frac{55}{12}$

b) $3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4}$

048 **Realiza estas operaciones.**

a) $1 + \frac{3}{4}$

b) $\frac{11}{3} - 2$

c) $\frac{15}{2} - 7$

d) $7 + \frac{4}{3}$

e) $9 - \frac{4}{7}$

f) $3 - \frac{2}{5}$

g) $9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

h) $\frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{3}$

i) $7 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2}$

a) $1 + \frac{3}{4} = \frac{4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$

b) $\frac{11}{3} - 2 = \frac{11 - 6}{3} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{15}{2} - 7 = \frac{15 - 14}{2} = \frac{1}{2}$

d) $7 + \frac{4}{3} = \frac{21 + 4}{3} = \frac{25}{3}$

e) $9 - \frac{4}{7} = \frac{63 - 4}{7} = \frac{59}{7}$

f) $3 - \frac{2}{5} = \frac{15 - 2}{5} = \frac{13}{5}$

g) $9 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{54 + 2 - 1}{6} = \frac{55}{6}$

h) $\frac{1}{4} + 5 - \frac{1}{3} = \frac{3 + 60 - 4}{12} = \frac{59}{12}$

i) $7 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{28 - 1 + 10}{4} = \frac{37}{4}$

049 ●● **Haz las operaciones.**

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{3}\right)$

b) $\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{7}\right)$

c) $2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]$

d) $\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{-1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{15}\right)+2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)$

a) $$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{3}\right)=\frac{3+3}{6}-\frac{12+35}{15}=\frac{6}{6}-\frac{47}{15}=1-\frac{47}{15}=$$
$$=\frac{15-47}{15}=\frac{-32}{15}$$

b) $$\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}+\frac{2}{7}\right)=\frac{35-12}{15}+\frac{42+10}{35}=\frac{23}{15}+\frac{52}{35}=\frac{317}{105}$$

c) $$2-\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\right]=2-\left[\frac{4}{3}-\frac{5+4}{10}-\frac{1}{3}\right]=2-\frac{40-27-10}{30}=$$
$$=\frac{60-3}{30}=\frac{57}{30}=\frac{19}{10}$$

d) $$\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{-1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{20}+\frac{-11}{60}=\frac{63-11}{60}=\frac{52}{60}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$$

e) $$\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{15}\right)+2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)=\frac{17}{15}+2-\frac{6}{6}=\frac{17}{15}+2-1=$$
$$=\frac{17}{15}+1=\frac{17+15}{15}=\frac{32}{15}$$

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REALIZAN LAS OPERACIONES DE SUMA Y RESTA CON FRACCIONES NEGATIVAS?

Calcula: $\frac{9}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)$

PRIMERO. Se eliminan los paréntesis.

$$\frac{9}{2}\underbrace{+(-}_{+\,\cdot\,-\,=\,-}\frac{5}{4})\overbrace{-(-}^{-\,\cdot\,-\,=\,+}\frac{4}{5})=\frac{9}{2}-\frac{5}{4}+\frac{4}{5}$$

SEGUNDO. Se opera con las fracciones resultantes.

m.c.m. (2, 4, 5) $= 2^2 \cdot 5 = 20$

$$\frac{9}{2}-\frac{5}{4}+\frac{4}{5}=\frac{90}{20}-\frac{25}{20}+\frac{16}{20}=\frac{90-25+16}{20}=\frac{81}{20}$$

051 ●● **Haz estas operaciones.**

a) $-3+\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{-3}{7}+(-8)$ **e)** $\frac{-4}{3}+(-6)$

b) $8-\left(-\frac{2}{5}\right)$ **d)** $\frac{5}{4}-(-7)$ **f)** $-\left(\frac{-3}{4}\right)-2$

a) $-3+\frac{4}{9}=\frac{-27+4}{9}=-\frac{23}{9}$

b) $8-\left(-\frac{2}{5}\right)=8+\frac{2}{5}=\frac{40+2}{5}=\frac{42}{5}$

c) $\frac{-3}{7}+(-8)=\frac{-3}{7}-8=\frac{-3-56}{7}=-\frac{59}{7}$

d) $\frac{5}{4}-(-7)=\frac{5}{4}+7=\frac{5+28}{4}=\frac{33}{4}$

e) $\frac{-4}{3}+(-6)=\frac{-4}{3}-6=\frac{-4-18}{3}=-\frac{22}{3}$

f) $-\left(\frac{-3}{4}\right)-2=\frac{3}{4}-2=\frac{3-8}{4}=-\frac{5}{4}$

052 ●● **Opera.**

a) $\frac{1}{3}-2-\left(-\frac{4}{9}\right)$ **c)** $4-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$

b) $\frac{5}{2}-\left(-2+\frac{3}{5}\right)$ **d)** $-7+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{7}\right)$

a) $\frac{1}{3}-2-\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{3}-2+\frac{4}{9}=\frac{3-18+4}{9}=-\frac{11}{9}$

b) $\frac{5}{2}-\left(-2+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{2}-\left(\frac{-10+3}{5}\right)=\frac{5}{2}-\left(\frac{-7}{5}\right)=\frac{25+14}{10}=\frac{39}{10}$

c) $4-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=4-\frac{8-3}{12}=4-\frac{5}{12}=\frac{48-5}{12}=\frac{43}{12}$

d) $-7+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{7}\right)=-7+\frac{-21+2}{14}=-7-\frac{19}{14}=\frac{-98-19}{14}=-\frac{117}{14}$

053 ● **Efectúa las siguientes multiplicaciones.**

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ **c)** $3\cdot\frac{9}{6}$

b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{2}$ **d)** $\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{12}{21}$

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

c) $3\cdot\frac{9}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

b) $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{2}=\frac{30}{10}=3$

d) $\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{12}{21}=\frac{588}{168}=\frac{147}{42}=\frac{7}{2}$

054 ●

Calcula estas divisiones.

a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{9}{2} : \frac{4}{6}$ **c)** $\frac{12}{7} : \frac{4}{14}$ **d)** $3 : \frac{6}{4}$

a) $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ b) $\frac{54}{8} = \frac{27}{4}$ c) $\frac{168}{28} = 6$ d) $\frac{12}{6} = 2$

055

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REALIZAN LAS OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON FRACCIONES NEGATIVAS?

Calcula. a) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{7}\right)$

PRIMERO. Se realiza la operación prescindiendo del signo, y se simplifica el resultado, si se puede.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{5} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$

SEGUNDO. Se aplica la regla de los signos.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$ b) $-\frac{3}{5} : \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{7}{10}$

056 ●●

Calcula.

a) $\frac{4}{7} : \left(\frac{-3}{14}\right)$ **d)** $\frac{-6}{5} \cdot \frac{3}{10}$ **g)** $\frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{4}\right)$

b) $-5 : \frac{1}{2}$ **e)** $\frac{5}{2} \cdot (-2)$ **h)** $\frac{-1}{4} : (-6)$

c) $\frac{-3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$ **f)** $\frac{-3}{8} : \left(\frac{3}{-4}\right)$ **i)** $-\frac{9}{4} : \left(-\frac{21}{2}\right)$

a) $\frac{4}{7} : \left(\frac{-3}{14}\right) = \frac{56}{-21} = -\frac{8}{3}$

b) $-5 : \frac{1}{2} = -10$

c) $\frac{-3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{-6}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{-18}{50} = -\frac{9}{25}$

e) $\frac{5}{2} \cdot (-2) = \frac{-10}{2} = -5$

f) $\frac{-3}{8} : \left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{2} : \left(-\frac{2}{4}\right) = -\frac{4}{4} = -1$

h) $\frac{-1}{4} : (-6) = \frac{1}{24}$

i) $-\frac{9}{4} : \left(-\frac{21}{2}\right) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

057 ●● **Copia y completa las expresiones para que se cumplan estas operaciones.**

a) $\frac{\square}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{\square}{81} : \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$

b) $\frac{\square}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$

d) $\frac{\square}{6} : \frac{8}{9} = \frac{27}{16}$

a) 9 b) 15 c) 50 d) 9

058 ● **Haz las operaciones.**

a) $\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{7} : \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-3}{5}\right)$

b) $\left(\frac{10}{3} : \frac{5}{6}\right) \cdot 4$

d) $9 : \left(\frac{8}{3} : \frac{4}{9}\right)$

a) $\left(\frac{2}{3} : \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{105}$

b) $\left(\frac{10}{3} : \frac{5}{6}\right) \cdot 4 = \frac{60}{15} \cdot 4 = \frac{240}{15} = 16$

c) $\frac{1}{7} : \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{-3}{5}\right) = \frac{1}{7} : \frac{-6}{20} = \frac{20}{-42} = -\frac{10}{21}$

d) $9 : \left(\frac{8}{3} : \frac{4}{9}\right) = 9 : \frac{72}{12} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$

059 ● **Calcula, expresándolo como producto de fracción.**

a) $\frac{3}{4}$ **de 60**

d) $\frac{3}{8}$ **de 90**

g) $\frac{2}{5}$ **de 10**

b) $\frac{2}{3}$ **de 23**

e) $\frac{1}{3}$ **de 78**

h) $\frac{1}{5}$ **de 70**

c) $\frac{7}{3}$ **de 27**

f) $\frac{4}{7}$ **de 29**

i) $\frac{8}{2}$ **de 9**

a) $\frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{3 \cdot 60}{4} = \frac{180}{4} = 45$

b) $\frac{2}{3} \cdot 23 = \frac{2 \cdot 23}{3} = \frac{46}{3}$

c) $\frac{7}{3} \cdot 27 = \frac{7 \cdot 27}{3} = 7 \cdot 9 = 63$

d) $\frac{3}{8} \cdot 90 = \frac{3 \cdot 90}{8} = \frac{270}{8} = \frac{135}{4}$

e) $\frac{1}{3} \cdot 78 = \frac{78}{3} = 26$

f) $\frac{4}{7} \cdot 29 = \frac{4 \cdot 29}{7} = \frac{116}{7}$

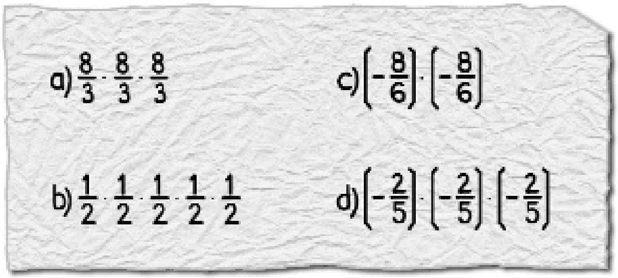
g) $\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 10}{5} = \frac{20}{5} = 4$

h) $\frac{1}{5} \cdot 70 = \frac{1 \cdot 70}{5} = \frac{70}{5} = 14$

i) $\frac{8}{2} \cdot 9 = \frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$

060 ●

Escribe en forma de potencia estos productos, y calcula el resultado.



a) $\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3}$

c) $\left(-\frac{8}{6}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)$

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$

a) $\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{3}=\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{512}{27}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

c) $\left(-\frac{8}{6}\right)\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)=\left(-\frac{8}{6}\right)^2=\frac{64}{36}=\frac{16}{9}$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)^3=-\frac{8}{125}$

061 ●●

Escribe en forma de potencia, si es posible.

a) $\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}$

b) $\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}$

c) $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}$

d) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$

e) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{2}{7}$

f) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}$

a) $\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}=\left(\frac{8}{11}\right)^5$

b) $\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}$ → No es posible escribirlo en forma de potencia.

c) $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}$ → No es posible escribirlo en forma de potencia.

d) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{2}{7}\right)^3$

e) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{2}{7}=\left(-\frac{2}{7}\right)^2\cdot\frac{2}{7}=\left(\frac{2}{7}\right)^3$

f) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2=-\left(\frac{2}{7}\right)^3$

062 ●

Expresa en forma de producto, y halla el resultado de las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{10}{3}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

a) $\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$

063 ●●

Calcula.

a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$ **c)** $\sqrt{\frac{81}{49}}$ **e)** $\sqrt{\frac{49}{144}}$

b) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ **d)** $\sqrt{\frac{121}{441}}$ **f)** $\sqrt{\frac{64}{16}}$

a) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$ c) $\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$ e) $\sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{7}{12}$

b) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ d) $\sqrt{\frac{121}{441}} = \frac{11}{21}$ f) $\sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{8}{4} = 2$

064 ●●

Determina el valor de *a* en estas igualdades.

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^a = \frac{125}{64}$ **c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^a = -\frac{125}{64}$ **d)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16}$

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^a = \frac{125}{64} \rightarrow a = 3$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16} \rightarrow a = 2$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^a = -\frac{125}{64} \rightarrow a = 3$ d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^a = \frac{9}{16} \rightarrow a = 2$

065 ●●●

Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$ **c)** $-\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{-343}{8}$ **e)** $\frac{(-2)^4}{7^4} = \left(-\frac{2}{7}\right)^4$

b) $\left(\frac{-3}{-3}\right)^4 = 81$ **d)** $\frac{(-2)^5}{7^5} = \left(-\frac{2}{7}\right)^5$ **f)** $\frac{(-2)^4}{7^4} = \left(\frac{2}{7}\right)^4$

a) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ → No es cierta. c) $-\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}$ → No es cierta.

b) $\left(\frac{-3}{-3}\right)^4 = 1^4 = 1$ → No es cierta. Son ciertas d), e) y f).

066 **Realiza las operaciones.**

a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}-2$ **c)** $4-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{9}$ **e)** $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{8}+\left(\frac{-3}{2}\right)$

b) $\frac{7}{2}-3\cdot\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{5}{2}-3\cdot\frac{1}{4}$ **f)** $\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-3}{4}\right)$

a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}-2=\frac{5}{18}-2=\frac{5-36}{18}=-\frac{31}{18}$

b) $\frac{7}{2}-3\cdot\frac{4}{5}=\frac{7}{2}-\frac{12}{5}=\frac{35-24}{10}=\frac{11}{10}$

c) $4-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{9}=4-\frac{21}{18}=\frac{72-21}{18}=\frac{51}{18}=\frac{17}{6}$

d) $\frac{5}{2}-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{10-3}{4}=\frac{7}{4}$

e) $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{8}+\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{40}{40}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

f) $\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{-28}{15}-\frac{3}{4}=\frac{-112-45}{60}=-\frac{157}{60}$

067 **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{6}{8}\right)$ **d)** $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$

b) $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)$ **e)** $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right)$

c) $\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{21}+\frac{1}{6}\right)$ **f)** $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{6}{8}\right)=\frac{9-2}{12}\cdot\frac{2-6}{8}=\frac{7\cdot(-4)}{12\cdot 8}=-\frac{7}{24}$

b) $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=\frac{3+2}{15}\cdot\frac{10-3}{30}=\frac{5\cdot 7}{15\cdot 30}=\frac{7}{90}$

c) $\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{21}+\frac{1}{6}\right)=\frac{12-7}{21}\cdot\frac{4+7}{42}=\frac{5\cdot 11}{21\cdot 42}=\frac{55}{882}$

d) $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{35-2}{14}\cdot\frac{2-1}{6}=\frac{33\cdot 1}{14\cdot 6}=\frac{11}{28}$

e) $\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right)=\frac{16-15}{20}\cdot\frac{2+5}{20}=\frac{1\cdot 7}{20\cdot 20}=\frac{7}{400}$

f) $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3-4}{24}\cdot\frac{2-1}{4}=\frac{-1\cdot 1}{24\cdot 4}=-\frac{1}{96}$

068 ●●

Haz estas operaciones, indicando los pasos realizados.

a) $\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)-1$ **c)** $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-1$ **d)** $\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)-1=\frac{3}{8}\cdot\frac{5-4}{10}-1=\frac{3\cdot 1}{8\cdot 10}-1=\frac{3}{80}-1=$

$=\frac{3-80}{80}=-\frac{77}{80}$

b) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-1=\frac{3}{16}-\frac{2}{5}-1=\frac{15-32-80}{80}=-\frac{97}{80}$

c) $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{21-2}{6}=\frac{5}{3}-\frac{2\cdot 19}{5\cdot 6}=\frac{5}{3}-\frac{19}{15}=$

$=\frac{25-19}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}=\frac{25-6}{15}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}=\frac{19\cdot 7}{15\cdot 2}-\frac{1}{3}=\frac{133}{30}-\frac{1}{3}=$

$=\frac{133-10}{30}=\frac{123}{30}=\frac{41}{10}$

069 ●●

Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{3}$ **c)** $\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}$ **e)** $\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{5}\cdot 2$

b) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)$ **d)** $\left[\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-2\right]\cdot\frac{5}{3}$ **f)** $-3\cdot\frac{4}{15}-\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)$

a) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}-\frac{7}{5}-\frac{1}{3}=\frac{25-21-5}{15}=-\frac{1}{15}$

b) $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}-\frac{21-5}{15}=\frac{5}{3}-\frac{16}{15}=\frac{3}{5}$

c) $\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}=\left(\frac{10}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{40-9}{12}\cdot\frac{7}{2}=\frac{217}{24}$

d) $\left[\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}-2\right]\cdot\frac{5}{3}=\left(-\frac{28}{15}-2\right)\cdot\frac{5}{3}=-\frac{58}{15}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{58}{9}$

e) $\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{5}\cdot 2=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{6}\right)-\frac{8}{5}=\frac{13}{12}-\frac{8}{5}=-\frac{31}{60}$

f) $-3\cdot\frac{4}{15}-\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)=-\frac{4}{5}-\left(\frac{35}{8}-9\right)=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{37}{8}\right)=\frac{153}{40}$

070 ●● **Calcula.**

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\cdot 5-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}$

b) $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$

c) $1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)$

d) $1-\left[\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$

e) $\frac{8}{3}-\left[2:\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{5}{2}\right]$

a) $$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)\cdot 5-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{14}{10}\cdot 5-\frac{9}{10}=\frac{14}{2}-\frac{9}{10}=\frac{61}{10}$$

b) $$\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\left[\frac{13}{10}\cdot 5-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=$$
$$=\frac{32}{5}\cdot\frac{3}{4}-\frac{6}{5}=\frac{24}{5}-\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$$

c) $$1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)=1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}=1-6-\frac{1}{30}=-\frac{151}{30}$$

d) $$1-\left[\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]=1-\left(\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}\right)=1-\left(\frac{15}{2}-\frac{7}{18}\right)=$$
$$=1-\frac{64}{9}=-\frac{55}{9}$$

e) $$\frac{8}{3}-\left[2:\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{5}{2}\right]=\frac{8}{3}-\left[2:\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{2}\right]=\frac{8}{3}-\left(-3-\frac{5}{2}\right)=$$
$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{8}{3}+\frac{11}{2}=\frac{49}{6}$$

071 ●●● **Realiza estas operaciones.**

a) $\frac{4}{5}-\frac{7}{2}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{1}{8}\right]$

b) $\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{2}\right)+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{7}\right)+6^3\right]$

c) $(-2)^3\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\left(-4:\frac{1}{8}\cdot 3\right)$

d) $\frac{8}{7}\cdot 4-\left(\frac{6}{5}\right)^5-\left(\frac{11}{8}+\frac{12}{5}-2\right)$

e) $\frac{3}{2}:\left(-5+\frac{11}{8}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)^3$

f) $6^2-\left[3+\left(\frac{5}{8}\right)^3-\frac{3}{4}\right]\cdot\left(\frac{7}{2}-1\right)$

g) $-4^3+\frac{2}{3}:\left[\left(\frac{5}{8}\right)^4-\frac{1}{2}\right]\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)-2$

h) $\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{7}{3}-2\right)^3-\frac{13}{4}\right]:\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{4}\right)$

a) $$\frac{4}{5}-\frac{7}{2}+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+4-\frac{1}{8}\right]=\frac{4}{5}-\frac{7}{2}+\left[\frac{9}{4}+4-\frac{1}{8}\right]=$$
$$=\frac{4}{5}-\frac{7}{2}+\frac{49}{8}=\frac{137}{40}$$

b) $$\left(\frac{1}{5}+\frac{7}{2}\right)+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{7}\right)+6^3\right]=\frac{37}{10}+\left[\frac{19}{14}+6^3\right]=\frac{37}{10}+\left[\frac{19}{14}+216\right]=$$
$$=\frac{37}{10}+\frac{3\,043}{14}=\frac{15\,474}{70}=\frac{7\,737}{35}$$

c) $$(-2)^3\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\left(-4:\frac{1}{8}\cdot 3\right)=(-2)^3\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+(-32\cdot 3)=$$
$$=(-2)^3\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+(-96)=$$
$$=(-8)\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+(-96)=$$
$$=(-4)-\frac{5}{3}+(-96)=-\frac{305}{3}$$

d) $$\frac{8}{7}\cdot 4-\left(\frac{6}{5}\right)^5-\left(\frac{11}{8}+\frac{12}{5}-2\right)=\frac{8}{7}\cdot 4-\left(\frac{6}{5}\right)^5-\frac{71}{40}=$$
$$=\frac{8}{7}\cdot 4-\frac{7\,776}{3125}-\frac{71}{40}=$$
$$=\frac{32}{7}-\frac{7\,776}{3125}-\frac{71}{40}=\frac{53\,919}{175\,000}$$

e) $$\frac{3}{2}:\left(-5+\frac{11}{8}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)^3=\frac{3}{2}:\frac{-29}{8}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)^3=\frac{3}{2}:\frac{-29}{8}\cdot\left(-\frac{729}{64}\right)=$$
$$=\frac{24}{-58}\cdot\left(-\frac{729}{64}\right)=\frac{-17\,496}{-3\,712}=\frac{2187}{464}$$

f) $$6^2-\left[3+\left(\frac{5}{8}\right)^3-\frac{3}{4}\right]\cdot\left(\frac{7}{2}-1\right)=6^2-\left[3+\frac{125}{512}-\frac{3}{4}\right]\cdot\frac{5}{2}=$$
$$=6^2-\frac{1277}{512}\cdot\frac{5}{2}=36-\frac{1277}{512}\cdot\frac{5}{2}=$$
$$=36-\frac{6\,385}{1024}=\frac{30\,479}{1024}$$

g) $$-4^3+\frac{2}{3}:\left[\left(\frac{5}{8}\right)^4-\frac{1}{2}\right]\cdot\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)-2=-4^3+\frac{2}{3}:\left[\frac{625}{4\,096}-\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{13}{28}-2=$$
$$=-4^3+\frac{2}{3}:\left(\frac{-1423}{4\,096}\right)\cdot\frac{13}{28}-2=$$
$$=-64+\left(\frac{8\,192}{-4\,269}\right)\cdot\frac{13}{28}-2=$$
$$=-64+\left(-\frac{106\,496}{119\,532}\right)-2=$$
$$=-\frac{7\,995\,608}{119\,532}$$

h) $$\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{7}{3}-2\right)^3-\frac{13}{4}\right]:\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{4}\right)=\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{13}{4}\right]:\frac{10}{12}=$$

$$=\left[\frac{3}{5}+\frac{1}{27}-\frac{13}{4}\right]:\frac{10}{12}=$$

$$=\frac{-1411}{540}:\frac{10}{12}=\frac{-16\,932}{5\,400}=$$

$$=-\frac{4\,233}{1\,350}=-\frac{1411}{450}$$

072 ●●

Fran ha regado $\frac{4}{6}$ del césped y Raquel los $\frac{4}{12}$ restantes. ¿Cuál de los dos ha regado mayor zona de césped?

Fran: $\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$ Raquel: $\frac{4}{12}$

$\frac{8}{12}>\frac{4}{12}$ → Fran ha regado mayor zona de césped.

073 ●●

Un libro se hace con la colaboración de 18 personas. De ellas, $\frac{1}{3}$ corresponde a autores, $\frac{1}{9}$ a secretarias, $\frac{1}{6}$ a maquetistas, $\frac{2}{6}$ a dibujantes y el resto a personal de imprenta. Calcula el número de colaboradores de cada clase.

$\frac{1}{3}$ de 18 = 6 autores

$\frac{1}{6}$ de 18 = 3 maquetistas

$\frac{1}{9}$ de 18 = 2 secretarias

$\frac{2}{6}$ de 18 = 6 dibujantes

Personal de imprenta = 18 − (6 + 2 + 3 + 6) = 18 − 17 = 1

074 ●●

En un colegio hay 1 095 alumnos que realizan actividades extraescolares: $\frac{1}{3}$ hace judo, $\frac{2}{5}$ estudia italiano y el resto realiza ballet. ¿Cuántos alumnos hacen cada actividad?

Judo: $\frac{1}{3}$ de 1 095 = 365 alumnos Italiano: $\frac{2}{5}$ de 1 095 = 438 alumnos

Ballet: $\frac{4}{15}$ de 1 095 = 292 alumnos

075 ●●

Un camión transporta 15 toneladas de fruta; $\frac{1}{5}$ son naranjas, $\frac{2}{3}$ son manzanas y el resto son peras. ¿Cuántas toneladas de cada fruta transporta el camión?

Naranjas: $\frac{1}{5}$ de 15 $=\frac{15}{5}=$ 3 toneladas

Manzanas: $\frac{2}{3}$ de 15 $=\frac{30}{3}=$ 10 toneladas

Peras: 15 − (3 + 10) = 2 toneladas

076 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA PARTE DEL TOTAL?

En una fiesta se colocaron 16 bombillas de colores. Al terminar solo funcionaba un cuarto de ellas. ¿Cuántas bombillas se fundieron?

PRIMERO. Se calcula la fracción de bombillas fundidas.

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Los $\frac{3}{4}$ de las bombillas terminaron fundidas.

SEGUNDO. Se determina el número que representa la fracción.

$$\frac{3}{4} \text{ de } 16 = \frac{3 \cdot 16}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ bombillas}$$

Se fundieron 12 bombillas.

077 ●●

De los 30 alumnos de una clase, $\frac{3}{5}$ son chicas. ¿Cuántos chicos hay?

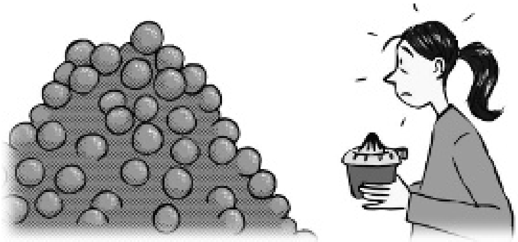
Son $\frac{3}{5}$ de $30 = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18$ chicas.

Por tanto, hay $30 - 18 = 12$ chicos.

078 ●●

De una naranja se aprovechan las $\frac{4}{9}$ partes para hacer zumo y el resto es piel.

Si utilizamos 27 kg de naranjas, ¿qué cantidad de zumo obtendremos? ¿Y de piel?



$\frac{4}{9}$ de $27 = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12$ kg de zumo de naranja

$27 - 12 = 15$ kg de piel de naranja

079 ●● **De una clase de 24 alumnos, los $\frac{3}{8}$ han tenido la gripe. ¿Qué fracción de alumnos no han enfermado? ¿Cuántos alumnos son?**

Si los $\frac{3}{8}$ de los alumnos han enfermado, $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ de los alumnos no han enfermado.

$\frac{5}{8}$ de $24 = \frac{5}{8} \cdot 24 = 15$

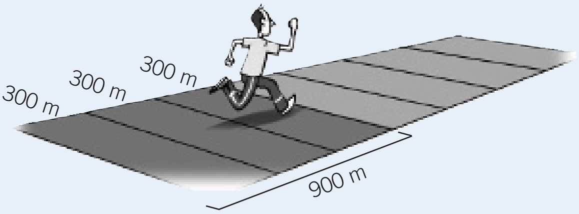
No han enfermado 15 alumnos.

080 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE HALLA EL TOTAL CONOCIENDO UNA DE LAS PARTES?

He recorrido 900 metros, que suponen los $\frac{3}{7}$ del recorrido. ¿Cuál es la longitud total?

PRIMERO. Se calcula cuántos metros representa una parte.



Si $\frac{3}{7}$ son 900 m → $\frac{1}{7}$ son $900 : 3 = 300$ m

SEGUNDO. Se determina el total del recorrido.

Si una de las 7 partes es 300 m, las 7 partes serán:

$300 \cdot 7 = 2\,100$ m

081 ●● **Si tres cuartos de kilo de jamón cuestan 15 €, ¿cuánto vale un kilo y medio?**

Si $\frac{3}{4}$ de kilo cuestan 15 €, $\frac{1}{4}$ de kilo cuesta: $15 : 3 = 5$ €

Un kilo y medio es: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$, y cuesta: $6 \cdot 5 = 30$ €

082 ●● **Según una encuesta, las familias españolas dedican $\frac{1}{3}$ de su renta a la adquisición de una vivienda, es decir, destinan un promedio de 11 000 € anuales a este concepto. ¿Cuál es la renta media mensual de una familia española?**

Si $\frac{1}{3}$ de la renta anual es 11 000 €, la renta anual es: $11\,000 \cdot 3 = 33\,000$ €

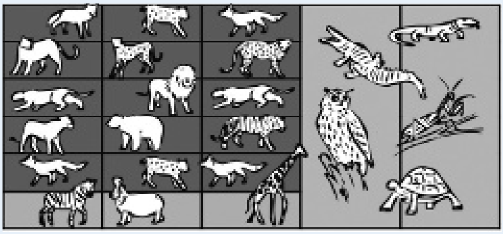
La renta media mensual es: $33\,000 : 12 = 2\,750$ €

083 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UNA FRACCIÓN DE OTRA FRACCIÓN?

Los tres quintos de los animales de un parque natural son mamíferos, y de estos mamíferos, los cinco sextos son carnívoros. ¿Qué fracción del total de animales representan los mamíferos carnívoros?

PRIMERO. Se representa gráficamente la situación.



La figura queda dividida en 30 partes, de las que se toman 15.

SEGUNDO. Se calcula la fracción del total.

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

Los mamíferos carnívoros representan la mitad de los animales del parque natural.

084 ●●

En la selección para un concurso televisivo eliminan a $\frac{7}{12}$ de los aspirantes en la primera prueba y en la segunda prueba abandonan $\frac{4}{13}$ de los que quedaban.

a) ¿Qué fracción de los concursantes superan la segunda prueba?

b) Si 130 aspirantes pasan la primera prueba, ¿cuántos quedan tras la segunda?

a) En la 2.ª prueba eliminan a $\frac{4}{13}$ de $\frac{5}{12}$ y continúan: $1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}$ de $\frac{5}{12}$

b) Tras la 2.ª prueba quedan: $\frac{9}{13}$ de $130=\frac{9}{13}\cdot 130=90$ aspirantes

085 ●●

Un panadero aparta cada semana, para el consumo de su familia, $\frac{1}{100}$ de las barras de pan que fabrica. Si vende 3415 barras y regala lo que le sobra, $\frac{1}{70}$ del total de barras, ¿cuántas barras de pan elabora?

Las 3415 barras son: $1-\frac{1}{100}-\frac{1}{70}=\frac{683}{700}$ del total

Por tanto, el panadero elabora: $3\,415\cdot\frac{700}{683}=3\,500$ barras

086
●●●

Luis, Pedro y Antonio reunieron las cantidades de dinero que sus familias les regalaron en Navidad.

Luis recibió $\frac{6}{8}$ de 100 €,

Pedro recibió $\frac{7}{8}$ de 100 €,

y Antonio recibió $\frac{3}{8}$ de 100 €. ¿Cuánto dinero consiguieron los tres juntos?

Luis: $\frac{6}{8}$ de $100 = 75$ €

Antonio: $\frac{3}{8}$ de $100 = 37{,}50$ €

Pedro: $\frac{7}{8}$ de $100 = 87{,}50$ €

Total $= 75 + 87{,}50 + 37{,}50 = 200$ €

087
●●●

Si a la cantidad de dinero que tengo le añadiese su mitad, más su quinta parte, más 1 €, podría comprar un televisor cuyo precio es 324 €. ¿Cuánto dinero tengo?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10}$$

Los $\frac{17}{10}$ de la cantidad de dinero que tengo son: $324 - 1 = 323$ €

Luego la cantidad de dinero que tengo es: $323 : \frac{17}{10} = \frac{323 \cdot 10}{17} = 190$ €

088
●●●

Escribe una fracción que sea mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{5}$. ¿Podrías escribir dos fracciones? ¿Y tres? Razona cuántas fracciones puedes escribir entre ellas.

La diferencia entre ambas fracciones es: $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

Si a la fracción menor le sumamos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \dots$ de $\frac{1}{5}$, obtendremos fracciones que están comprendidas entre las dos fracciones dadas.

Una fracción mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{3}{5}$ es:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4+1}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

Por tanto, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}$ y $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+2}{15} = \frac{8}{15}$ son dos fracciones comprendidas entre las dadas.

Otra forma de hacerlo sería con fracciones equivalentes. En cualquier caso, entre dos fracciones dadas podemos escribir tantas fracciones como queramos.

089 ●●● **Ordena estas fracciones, sabiendo que *a* y *b* son dos números naturales tales que $a < b < a^2$.**

$$\frac{1}{a} \qquad \frac{1}{b} \qquad \frac{a}{b} \qquad \frac{a+b}{b}$$

Reducimos las fracciones a común denominador:

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{ab} \qquad \frac{1}{b}=\frac{a}{ab} \qquad \frac{a}{b}=\frac{a^2}{ab} \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{a(a+b)}{ab}$$

Comparamos los numeradores sabiendo que $a < b$:

$$a < b < a^2 < a(a+b) \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a+b}{b}$$

090 ●●● **Calcula estas diferencias:**

$$1-\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

Observa los resultados y calcula.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{999\,000}$$

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \qquad \frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{999\,000}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}=1-\frac{1}{1000}=\frac{999}{1000}$$

091 ●●● **Los egipcios en la antigüedad solo utilizaban símbolos para representar fracciones cuyo numerador fuera la unidad. El resto de fracciones las representaban expresándolas como sumas de las anteriores.**

Así, para expresar $\frac{2}{3}$, ellos escribían $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Escribe con este método las siguientes fracciones: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{5}{11}$

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$$

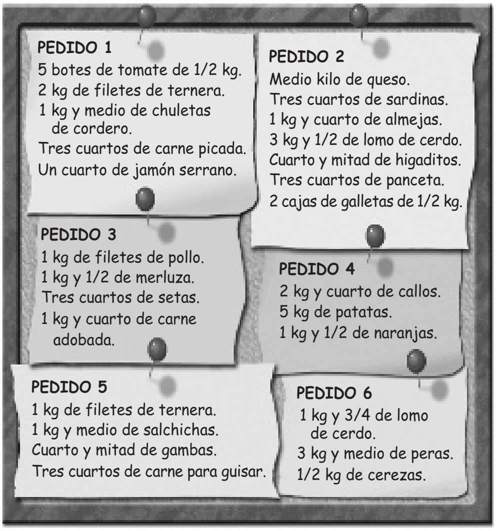
$$\frac{4}{9}=\frac{1}{9}+\frac{3}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{8}{28}=\frac{1}{28}+\frac{7}{28}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{11}=\frac{45}{99}=\frac{1}{99}+\frac{44}{99}=\frac{1}{99}+\frac{4}{9}=\frac{1}{99}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

092 **Sergio es el encargado de preparar los pedidos que se entregan a domicilio en un supermercado.**
Los pedidos figuran en un panel y él se encarga de hacer un paquete con los productos de cada pedido.



PEDIDO 1
5 botes de tomate de 1/2 kg.
2 kg de filetes de ternera.
1 kg y medio de chuletas de cordero.
Tres cuartos de carne picada.
Un cuarto de jamón serrano.

PEDIDO 2
Medio kilo de queso.
Tres cuartos de sardinas.
1 kg y cuarto de almejas.
3 kg y 1/2 de lomo de cerdo.
Cuarto y mitad de higaditos.
Tres cuartos de panceta.
2 cajas de galletas de 1/2 kg.

PEDIDO 3
1 kg de filetes de pollo.
1 kg y 1/2 de merluza.
Tres cuartos de setas.
1 kg y cuarto de carne adobada.

PEDIDO 4
2 kg y cuarto de callos.
5 kg de patatas.
1 kg y 1/2 de naranjas.

PEDIDO 5
1 kg de filetes de ternera.
1 kg y medio de salchichas.
Cuarto y mitad de gambas.
Tres cuartos de carne para guisar.

PEDIDO 6
1 kg y 3/4 de lomo de cerdo.
3 kg y medio de peras.
1/2 kg de cerezas.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuánto pesa el pedido 1?

b) ¿Qué pedido pesa más, el pedido 2 o el 4?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Tras preparar los paquetes, los mete en contenedores, de manera que el peso de los paquetes que coloca en cada contenedor no supere los 12 kg. ¿Cuál es el menor número necesario de contenedores para transportar todos los pedidos?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Para la entrega a domicilio disponen de una moto, que solo puede transportar un contenedor, y un coche que puede llevar hasta 4 contenedores por limitaciones de espacio.

¿Cómo lo debería hacer Sergio?

a) $\text{Pedido 1} = 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$

$= \frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 7 \text{ kg}$

b) $\text{Pedido 2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : 2\right) + \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + 1 = 8{,}125 \text{ kg}$

$\text{Pedido 4} = \left(2 + \frac{1}{4}\right) + 5 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 5 + \frac{3}{2} = 8{,}750 \text{ kg}$

Pesa más el pedido 4.

c) Pedido 1 = 7 kg
Pedido 2 = 8,125 kg
Pedido 3 = 9,5 kg
Pedido 4 = 8,75 kg
Pedido 5 = 3,625 kg
Pedido 6 = 5,75 kg

Tan solo se puede agrupar el pedido 5 con el 1, 2 o 6. Por tanto, se necesitan como mínimo 5 contenedores.

d) Como la moto tarda la mitad, dos viajes en coche equivalen a uno en moto. Habría que meter 4 contenedores en el coche y el quinto en la moto.

093 ●●●

Los ordenadores nos permiten escribir textos utilizando el tipo de letra y el tamaño que nos interese. El tamaño de las letras se mide en puntos.

Un punto equivale a $\frac{3}{8}$ de milímetro.

Según las reglas de edición, el interlineado (distancia entre dos líneas de texto) debe ser 2 puntos mayor que el tamaño de las letras, salvo que corresponda a un punto y aparte, en cuyo caso debe ser medio cícero mayor (un cícero equivale a 12 puntos).

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuántos milímetros mide una letra de tamaño 12? ¿Y de tamaño 4?

b) ¿Cuántos milímetros ocupa un párrafo de 4 líneas si se utiliza un tamaño 7 de letra?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si el tamaño de letra es 12, ¿cuántas líneas caben en un folio?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si tenemos un texto de 6 párrafos (tiene 5 puntos y aparte) y 56 líneas, ¿cuál sería el máximo tamaño de letra que podríamos aplicar para utilizar una sola página?

e) ¿Crees que se leería con claridad?

a) Tamaño 12 : $12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ mm Tamaño 4 : $4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ mm

b) El interlineado debe ser de 9 puntos. El párrafo ocupa 4 líneas de 7 puntos y 3 interlineados de 9 puntos.

$$4 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 55 \text{ puntos}$$

$$55 \cdot \frac{3}{8} = \frac{165}{8} = 20{,}625 \text{ mm}$$

c) Área de texto $= 297 - 30 - 25 = 242$ mm

Cada línea de texto de tamaño 12 mide $\frac{9}{2}$ mm. Cada interlineado debe ser de 14 puntos, y medirá: $14 \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{4} = 5{,}25$ mm

Por tanto, cada línea de texto más su interlineado miden:

$$\frac{9}{2} + \frac{21}{4} = \frac{39}{4} = 9{,}75 \text{ mm}$$

Como la primera línea no lleva interlineado, restamos el espacio que ocupa la primera línea al área de texto y el resultado lo dividimos por lo que ocupa cada línea y su interlineado.

$$\left(242 - \frac{9}{2}\right) : \frac{39}{4} = \frac{950}{39} = 24{,}36 \text{ líneas}$$

Caben 25 líneas de texto con 24 interlineados. Lo comprobamos:

$$25 \cdot \frac{9}{2} + 24 \cdot \frac{21}{4} = \frac{225}{2} + 126 = \frac{447}{2} = 238{,}5 \text{ mm}$$

Si metemos una línea de texto más sobrepasamos el área de texto.

d) Tenemos 56 líneas de texto y por tanto, 55 interlineados. De esos 55 interlineados, 5 corresponden a punto y aparte.

$x \rightarrow$ Tamaño de la letra expresado en puntos

$$56 \cdot \frac{3}{8} \cdot x + 50 \cdot \frac{3}{8} \cdot (x + 2) + 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot (x + 6) = 242$$

$$21x + \frac{75}{4}x + \frac{75}{2} + \frac{15}{8}x + \frac{45}{4} = 242$$

$$\frac{333}{8}x = \frac{773}{4} \rightarrow x = \frac{773 \cdot 8}{333 \cdot 4} = 4{,}64 \text{ puntos}$$

El tamaño máximo de la letra que podríamos aplicar es de 4 puntos.

e) El tamaño en milímetros de una letra de 4 puntos es: $4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ mm

La letra sería excesivamente pequeña.

3 Números decimales

A lomos del viento

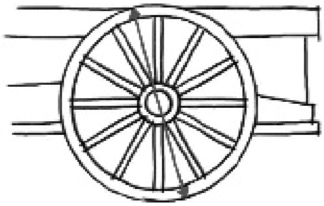
El encargo estaba terminado, y a medida que la nave iba ganando velocidad con ayuda del viento, y devoraba kilómetros de playa en dirección a ninguna parte, la cara de los pasajeros se transformaba: la tez de unos se volvía blanca, mientras que se sujetaban aterrados a los asideros del carro; por el contrario, la faz de otros enrojecía, a la vez que gritaban como queriendo animar a los invisibles caballos que movían el carro.

Su Excelencia, el conde Maurice de Nassau, mecenas de la obra, se sentía plenamente satisfecho.

–Señor Stevin, este carro movido por la fuerza del viento que hincha su vela, supera con creces mi encargo. Vamos más de veinticinco personas y dejamos atrás a los hombres, que nos siguen a todo galope montados en sus caballos.

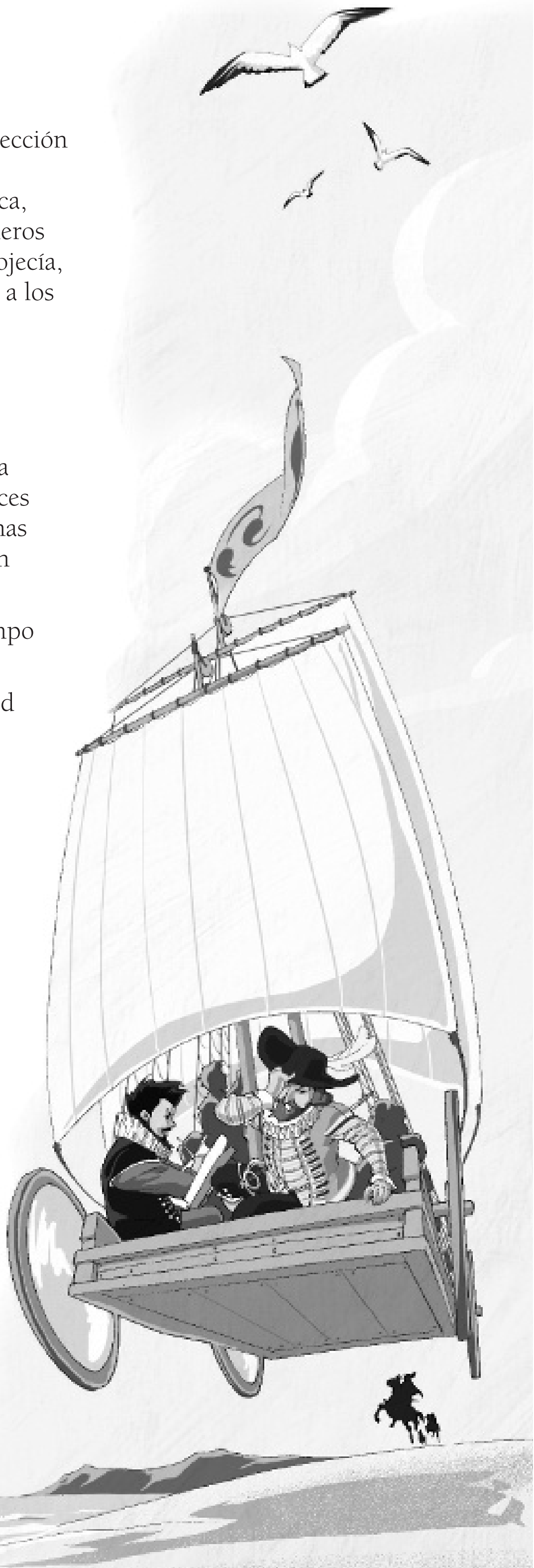
Simon Stevin se demoró un momento, el tiempo justo que tardó en anotar unas cantidades:

–Como podéis ver en los cálculos, la velocidad se puede aumentar si utilizamos ruedas más pequeñas, de un metro y veintiséis centímetros.



⓪①②
1 2 6 m

Stevin escribía así el número decimal 1,26.



DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **Busca información sobre Simon Stevin y su relación con Maurice de Nassau.**

Se puede encontrar una biografía sobre Simon Stevin visitando la siguiente página web, en una de sus secciones cita a Maurice de Nassau:
http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/es/Simon_Stevin#Decimal_fractions

Para completar la biografía de este matemático se puede visitar esta página web:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Stevin.asp

2 **¿Cuál fue la aportación de Stevin al estudio de los números decimales?**

En esta página web se puede encontrar información no solo sobre la aportación de Stevin al estudio de los números decimales, también sobre hechos relevantes de su vida y su aportación a otros campos de las matemáticas:
http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/hector_porta/pf/New/Historia%20Decimales.htm

3 **Investiga sobre la evolución de los números decimales a lo largo de la historia.**

En esta página se puede encontrar información sobre el origen de los números decimales:
http://www.kalipedia.com/matematicas-funciones/tema/origen-decimales.html?x1=20070926klpmatari_147.Kes&x=20070926klpmatari_149.Kes

Se puede completar la información sobre la historia de los números decimales en:
http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA17/NumerosDecimales.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Copia y escribe, en cada caso, la equivalencia.**

a) 47 décimas = ☐ centésimas **c) 8 unidades = ☐ milésimas**

b) 25 centésimas = ☐ unidades **d) 13 milésimas = ☐ décimas**

a) 470 b) 0,25 c) 8000 d) 0,13

2 **Descompón en sus órdenes de unidades estos números decimales, y escribe cómo se lee cada uno de ellos.**

a) 4,56 **b) 78,004** **c) 13,205** **d) 0,075**

a) $4{,}56 = 4 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01$ → 4 unidades 56 centésimas

b) $78{,}004 = 7 \cdot 10 + 8 + 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}01 + 4 \cdot 0{,}001$
78 unidades 4 milésimas

c) $13{,}205 = 1 \cdot 10 + 3 + 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001$
13 unidades 205 milésimas

d) $0{,}075 = 0 + 0 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}01 + 5 \cdot 0{,}001$ → 75 milésimas

3 **Halla las raíces cuadradas de estos cuadrados perfectos.**

a) 36 **b) 64** **c) 49** **d) 144**

a) 6 b) 8 c) 7 d) 12

Números decimales

EJERCICIOS

001 **Ordena, de mayor a menor, los siguientes números decimales.**

a) 6,1; 4,22; 4,02; 6,11; 3,99; 3,9
b) 5,602; 5,611; 5,6005; 5,60102
c) 0,02; −1,05; 0,8; 0,12; −0,025; 0,07

a) $6{,}11 > 6{,}1 > 4{,}22 > 4{,}02 > 3{,}99 > 3{,}9$
b) $5{,}611 > 5{,}602 > 5{,}60102 > 5{,}6005$
c) $0{,}8 > 0{,}12 > 0{,}07 > 0{,}02 > -0{,}025 > -1{,}05$

002 **Escribe cinco números comprendidos entre:**

a) 0,5 y 1,2 **b) 0,05 y 0,5** **c) −2,01 y −2**

Respuesta abierta. Por ejemplo:
a) $0{,}5 < 0{,}6 < 0{,}7 < 0{,}8 < 0{,}9 < 1 < 1{,}2$
b) $0{,}05 < 0{,}1 < 0{,}2 < 0{,}3 < 0{,}4 < 0{,}45 < 0{,}5$
c) $-2{,}01 < -2{,}005 < -2{,}004 < -2{,}003 < -2{,}002 < -2{,}001 < -2$

003 **Escribe tres números mayores que −7,123456…**

Respuesta abierta. Por ejemplo: −7,1; −2 y 0.

004 **Clasifica estos números decimales.**

a) 61,454545…	**c) 7,3333…**	**e) 58,37777…**	**g) 6,34444…**
b) 2,5	**d) 34,65555…**	**f) 0,55**	**h) 9,763333…**

a) Decimal periódico puro, de período 45.
b) Decimal exacto.
c) Decimal periódico puro, de período 3.
d) Decimal periódico mixto, de período 5 y anteperíodo 6.
e) Decimal periódico mixto, de período 7 y anteperíodo 3.
f) Decimal exacto.
g) Decimal periódico mixto, de período 4 y anteperíodo 3.
h) Decimal periódico mixto, de período 3 y anteperíodo 76.

005 **Clasifica los números decimales correspondientes.**

a) $\frac{45}{3}$ **b)** $\frac{12}{13}$ **c)** $\frac{5}{12}$ **d)** $\frac{95}{3}$

a) 15 → Entero
b) $0{,}\overset{\frown}{923076}$ → Decimal periódico puro
c) $0{,}41\overset{\frown}{6}$ → Decimal periódico mixto
d) $31{,}\overset{\frown}{6}$ → Decimal periódico puro

006 **Escribe dos decimales no exactos y no periódicos.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: 5,223334444... o 5,232425..., pues no tienen ningún grupo de cifras que se repita.

007 **Efectúa estas operaciones.**

a) 72,82 + 4,003 + 9,0195
b) (5,02 − 3,009) + (7,96 − 2,1)
c) 42,78 − (13,25 − 10,9672)

a) 85,8425 b) 7,871 c) 40,4972

008 **Resuelve.**

a) 3,2 · 0,45 **b) 7,25 · 2,042**

a) 1,44 b) 14,8045

009 **Haz las siguientes operaciones.**

a) (5,03 − 4,95) · 1,26 **b) 9,82 + 6,2 · 0,02**

a) 0,1008 b) 9,944

010 **Copia y completa el término que falta.**

a) 7,24 + □ = 9,567 **b) □ − 65,005 = 23,675**

a) 2,327 b) 88,68

011 **Resuelve estas divisiones.**

a) 459,3 : 5 **c) 478 : 7,86**
b) 37,485 : 14 **d) 1000,59 : 0,02**

a) 91,86 c) 60,81424936
b) 2,6775 d) 50029,5

012 **Realiza estas operaciones.**

a) (45,17 + 2,08) : 3,32 **b) 115,74 − 96,4 : 4,2**

a) 14,23192771 b) 92,78761905

013 **Dispongo de 126,92 € y quiero comprar un libro que cuesta 25,60 € y todos los tebeos que pueda adquirir. Si cada tebeo cuesta 5,96 €, ¿cuántos tebeos podré comprar?**

Tras comprar el libro tengo: 126,92 − 25,60 = 101,32 €
Puedo comprar: 101,32 : 5,96 = 17 tebeos

014 **Calcula la raíz cuadrada y el resto de los siguientes números. Comprueba que has realizado bien los cálculos.**

a) 379
b) 1735
c) 1043
d) 273
e) 2670
f) 3941

a) $\sqrt{379} = 19$ y el resto es: $379 - 19^2 = 18$

b) $\sqrt{1735} = 41$ y el resto es: $1735 - 41^2 = 54$

c) $\sqrt{1043} = 32$ y el resto es: $1043 - 32^2 = 19$

d) $\sqrt{273} = 16$ y el resto es: $273 - 16^2 = 17$

e) $\sqrt{2670} = 51$ y el resto es: $2670 - 51^2 = 69$

f) $\sqrt{3941} = 62$ y el resto es: $3941 - 62^2 = 97$

015 **La raíz cuadrada de un número es 32 y su resto es 24. ¿De qué número se trata?**

El número es:
$32^2 + 24 = 1048$

016 **¿Es posible que la raíz cuadrada de un número sea 8 y su resto 60? Razónalo.**

No es posible, porque si la raíz cuadrada de un número, x, es 8, se cumple que: $8^2 < x < 9^2$

Por tanto, el resto tiene que ser menor que: $80 - 64 = 16$

En general, si la raíz entera de un número es n, su resto será menor o igual que $2n$.

017 **Obtén la raíz cuadrada con un decimal.**

a) 379
b) 735
c) 273
d) 1438
e) 496
f) 7881

a) $\sqrt{379} = 19{,}4$ y el resto es: $379 - 19{,}4^2 = 2{,}64$

b) $\sqrt{735} = 27{,}1$ y el resto es: $735 - 27{,}1^2 = 0{,}59$

c) $\sqrt{273} = 16{,}5$ y el resto es: $273 - 16{,}5^2 = 0{,}75$

d) $\sqrt{1438} = 37{,}9$ y el resto es: $1438 - 37{,}9^2 = 1{,}59$

e) $\sqrt{496} = 22{,}2$ y el resto es: $496 - 22{,}2^2 = 3{,}16$

f) $\sqrt{7881} = 88{,}7$ y el resto es: $7881 - 88{,}7^2 = 13{,}31$

018 **Halla el radicando si:**

a) La raíz es 18,9 y el resto es 2,79.

b) La raíz es 39,2 y el resto es 3,36.

a) $18{,}9^2 + 2{,}79 = 360$

b) $39{,}2^2 + 3{,}36 = 1\,540$

019 **Calcula el resto de los siguientes casos.**

a) Radicando = 530 Raíz = 23

b) $\sqrt{1\,170} = 34{,}2$

a) $530 - 23^2 = 1$

b) $1\,170 - 34{,}2^2 = 0{,}36$

020 **Un número tiene por raíz cuadrada entera 5 y su resto es el mayor posible.**

a) ¿Cuál es el resto? **b) ¿Y el número?**

a) El resto es: $2 \cdot 5 = 10$ b) El número es: $5^2 + 10 = 35$

021 **Aproxima por redondeo y por truncamiento a las centésimas estos números decimales.**

a) 156,2593

b) 1,2064

c) 36,243

d) 9,0503

a) Redondeo: 156,26	Truncamiento: 156,25
b) Redondeo: 1,21	Truncamiento: 1,20
c) Redondeo: 36,24	Truncamiento: 36,24
d) Redondeo: 9,05	Truncamiento: 9,05

022 **Estima el resultado de esta operación:**

$$\mathbf{1{,}48 + 1{,}9785 - 0{,}9467 \cdot 3{,}023}$$

Aproximando, el resultado es: $1{,}5 + 2 - 1 \cdot 3 = 0{,}5$

El resultado exacto es: $1{,}48 + 1{,}9785 - 0{,}9467 \cdot 3{,}023 = 0{,}5966$

023 **Aproxima por redondeo a las milésimas el área de un cuadrado de lado 2,35 cm.**

El área del cuadrado es $2{,}35^2 = 5{,}5225$ cm^2, y redondeando a las milésimas el área es $5{,}523$ cm^2.

024 **Calcula el valor de estas potencias de base 10.**

a) 10^6
b) 10^9
c) 10^{11}
d) 10^8
e) 10^0
f) 10^{10}

a) 1000000
b) 1000000000
c) 100000000000
d) 100000000
e) 1
f) 10000000000

025 **Escribe estos números en notación científica, e indica el orden de magnitud en cada caso.**

a) 356
b) 189000
c) 67345
d) 56000
e) 121900000
f) 12897

a) $3,56 \cdot 10^2$
b) $1,89 \cdot 10^5$
c) $6,7345 \cdot 10^4$
d) $5,6 \cdot 10^4$
e) $1,219 \cdot 10^8$
f) $1,2897 \cdot 10^4$

026 **Escribe, con todas sus cifras, estos números expresados en notación científica.**

a) $7,06 \cdot 10^5$
b) $2,3 \cdot 10^7$
c) $1,005 \cdot 10^{10}$
d) $9,87 \cdot 10^2$

a) 706000
b) 23000000
c) 10005000000
d) 987

027 **Estos números no están escritos correctamente en notación científica. Corrígelos.**

a) $45,3 \cdot 10^3$
b) $231,4 \cdot 10^4$

a) $4,53 \cdot 10^4$
b) $2,314 \cdot 10^6$

ACTIVIDADES

028 ●
Expresa numéricamente las siguientes cantidades.

a) Cuatro centésimas.
b) Seis décimas.
c) Trece milésimas.
d) Ciento ocho unidades cuatro milésimas.
e) Mil una unidades siete diezmilésimas.
f) Catorce unidades dos centésimas.

a) 0,04
b) 0,6
c) 0,013
d) 108,004
e) 1001,0007
f) 14,02

029 ●

Escribe cómo se leen estos números.

a) 3,24	**c) 0,001**	**e) 102,04**	**g) 2,00005**
b) 49,3	**d) 1,03**	**f) 1 800,556**	**h) 25,5759**

a) Tres unidades veinticuatro centésimas.
b) Cuarenta y nueve unidades tres décimas.
c) Una milésima.
d) Una unidad tres centésimas.
e) Ciento dos unidades cuatro centésimas.
f) Mil ochocientas unidades quinientas cincuenta y seis milésimas.
g) Dos unidades cinco cienmilésimas.
h) Veinticinco unidades cinco mil setecientas cincuenta y nueve diezmilésimas.

030 ●

Copia en tu cuaderno y completa esta tabla de descomposición de números.

Número	**C**	**D**	**U**	**d**	**c**	**m**
12,59	0	**1**	**2**	**5**	**9**	0
385,075	3	8	5	0	7	5
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0,002	0	0	0	0	0	2
0,1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
105,426	1	0	5	4	2	6
2,359	0	0	2	3	5	9

031 ●

Copia y completa.

a) Dos unidades son ☐ milésimas.
b) Una décima es ☐ centésimas.
c) Tres unidades y dos décimas son ☐ milésimas.
d) Veinte milésimas son ☐ centésimas.

a) Dos unidades son 2 000 milésimas.
b) Una décima es 10 centésimas.
c) Tres unidades y dos décimas son 3 200 milésimas.
d) Veinte milésimas son 2 centésimas.

032 ●●

Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) 1,05 unidades equivalen a ciento cinco centésimas.
b) Cuatro unidades y tres décimas son cuatro unidades y treinta centésimas.
c) Entre 2,452 y 2,453 no existe ningún número.
d) 3,005 es mayor que 3,05.
e) Tres unidades con dos décimas equivalen a treinta y dos mil milésimas.

a) y b) Verdadera.
c) Falsa, pues hay infinitos números.
d) Falsa, porque es menor que 3,05.
e) Falsa, ya que equivale a 3 200 milésimas.

Números decimales

033 ●

Ordena los siguientes números decimales exactos, de menor a mayor.

a) 0,75; 0,57; 0,507; 0,705
b) 0,102; 0,05; 0,105; 0,501; 0,251

a) $0{,}507 < 0{,}57 < 0{,}705 < 0{,}75$
b) $0{,}05 < 0{,}102 < 0{,}105 < 0{,}251 < 0{,}501$

034 ●

Copia y completa con un número decimal exacto.

a) 14,065 > ☐ > 13,95
b) 14,065 > ☐ > 14,06
c) 14,065 > ☐ > 14,061
d) 14,065 > ☐ > 14,0651

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $14{,}065 > 14 > 13{,}95$
b) $14{,}065 > 14{,}062 > 14{,}06$
c) $14{,}065 > 14{,}062 > 14{,}061$
d) $14{,}065 > 14{,}06505 > 14{,}0651$

035 ●

Escribe tres decimales entre cada par.

a) 2,3 y 3,6
b) 2,3 y 2,4
c) 2,31 y 2,32
d) 2,31 y 2,311

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2{,}4 < 2{,}5 < 2{,}6$
b) $2{,}35 < 2{,}36 < 2{,}37$
c) $2{,}3101 < 2{,}3102 < 2{,}3103$
d) $2{,}3101 < 2{,}3102 < 2{,}3103$

036 ●●

Ordena, de menor a mayor, estos números.

$$\mathbf{0{,}2\overset{\frown}{5} \quad 0{,}0\overset{\frown}{25} \quad 0{,}\overset{\frown}{25} \quad 0{,}205 \quad 0{,}2\overset{\frown}{05}}$$

$$0{,}0\overset{\frown}{25} < 0{,}205 < 0{,}2\overset{\frown}{05} < 0{,}\overset{\frown}{25} < 0{,}2\overset{\frown}{5}$$

037

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DETERMINA UN NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO COMPRENDIDO ENTRE OTROS DOS?

Determina un número decimal periódico comprendido entre $5{,}\overset{\frown}{7}$ y $5{,}\overset{\frown}{8}$.

PRIMERO. Se escriben los números con la misma cantidad de decimales.

$$5{,}\overset{\frown}{7} \rightarrow 5{,}777$$
$$5{,}\overset{\frown}{8} \rightarrow 5{,}888$$

SEGUNDO. Se añaden al número menor más cifras decimales que sean mayores que el último decimal. Estas cifras y el período forman el nuevo período.

$$5{,}\overset{\frown}{7} < 5{,}\overset{\frown}{780} < 5{,}\overset{\frown}{781} < 5{,}\overset{\frown}{782} < 5{,}\overset{\frown}{783} < \ldots < 5{,}\overset{\frown}{8}$$

038 ●●

Copia y completa en tu cuaderno con un número decimal periódico puro.

a) $4,\overset{\frown}{375} < \square < 4,\overset{\frown}{376}$ **c)** $5,\overset{\frown}{6} < \square < 5,\overset{\frown}{7}$

b) $1,\overset{\frown}{25} < \square < 1,\overset{\frown}{26}$ **d)** $0,\overset{\frown}{06} < \square < 0,\overset{\frown}{27}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $4,\overset{\frown}{375} < 4,\overset{\frown}{3754} < 4,\overset{\frown}{376}$ c) $5,\overset{\frown}{6} < 5,\overset{\frown}{67} < 5,\overset{\frown}{7}$

b) $1,\overset{\frown}{25} < 1,\overset{\frown}{253} < 1,\overset{\frown}{26}$ d) $0,\overset{\frown}{06} < 0,\overset{\frown}{061} < 0,\overset{\frown}{07}$

039 ●●●

Copia y completa en tu cuaderno con un número decimal periódico mixto.

a) $2,\overset{\frown}{375} < \square < 2,\overset{\frown}{376}$ **c)** $6,3\overset{\frown}{283} < \square < 6,328\overset{\frown}{3}$

b) $0,1\overset{\frown}{2} < \square < 1,1\overset{\frown}{3}$ **d)** $0,0\overset{\frown}{61} < \square < 0,0\overset{\frown}{62}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2,\overset{\frown}{375} < 2,37\overset{\frown}{54} < 2,\overset{\frown}{376}$ c) $6,3\overset{\frown}{283} < 6,328\overset{\frown}{329} < 6,328\overset{\frown}{3}$

b) $0,1\overset{\frown}{2} < 0,1\overset{\frown}{23} < 1,1\overset{\frown}{3}$ d) $0,0\overset{\frown}{61} < 0,0\overset{\frown}{613} < 0,0\overset{\frown}{62}$

040 ●●●

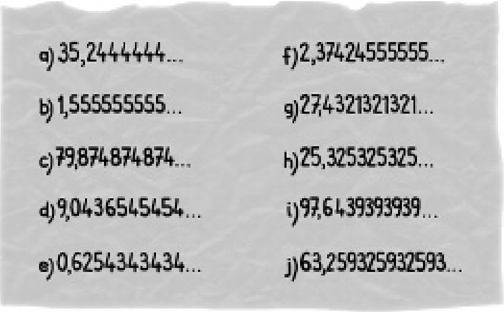
¿Existe un número decimal exacto, otro periódico puro y otro mixto entre $7,45\overset{\frown}{95}$ y $7,45\overset{\frown}{96}$?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Exacto ⟶ $7,45\overset{\frown}{95} < 7,4596 < 7,45\overset{\frown}{96}$
- Periódico puro ⟶ $7,45\overset{\frown}{95} < 7,\overset{\frown}{4596} < 7,45\overset{\frown}{96}$
- Periódico mixto → $7,45\overset{\frown}{95} < 7,4596\overset{\frown}{64} < 7,45\overset{\frown}{96}$

041 ●

Señala el período y el anteperíodo de estos números periódicos.



a) 35,2444444...
b) 1,555555555...
c) 79,874874874...
d) 9,04365454 54...
e) 0,6254343434...
f) 2,37424555555...
g) 27,4321321321...
h) 25,325325325...
i) 97,6439393939...
j) 63,259325932593...

a) Período = 4
Anteperíodo = 2

b) Período = 5
No tiene anteperíodo.

c) Período = 874
No tiene anteperíodo.

d) Período = 54
Anteperíodo = 0436

e) Período = 43
Anteperíodo = 625

f) Período = 5 Anteperíodo = 37424

g) Período = 321 Anteperíodo = 4

h) Período = 325 No tiene anteperíodo.

i) Período = 39 Anteperíodo = 64

j) Período = 2593 No tiene anteperíodo.

042 **Sin realizar la división, indica qué fracciones corresponden a decimales exactos y cuáles no.**

a) $\frac{3}{8}$
b) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{11}{6}$
d) $\frac{2}{25}$
e) $\frac{8}{21}$
f) $\frac{17}{40}$
g) $\frac{12}{13}$
h) $\frac{23}{18}$

Corresponden a decimales exactos si el denominador de las fracciones irreducibles correspondientes solo tienen como divisores 2 o 5. Por tanto:

a) Exacto
b) No exacto
c) No exacto
d) Exacto
e) No exacto
f) Exacto
g) No exacto
h) No exacto

043 **Indica a qué clase de números decimales corresponde la expresión decimal de estas fracciones.**

a) $\frac{39}{70}$
b) $\frac{78}{39}$
c) $\frac{39}{8}$
d) $\frac{39}{40}$
e) $\frac{39}{125}$
f) $\frac{39}{180}$
g) $\frac{39}{60}$
h) $\frac{117}{39}$

a) Periódico mixto
b) Entero
c) Exacto
d) Exacto
e) Exacto
f) Periódico mixto
g) Exacto
h) Entero

044 **Decide qué números son enteros y cuáles no.**

a) $15{,}02$
b) $25{,}00$
c) $\frac{95}{2}$
d) $50{,}\overset{\frown}{003}$
e) $0{,}005$
f) $\frac{15}{5}$
g) $0{,}5$
h) $42{,}0\overset{\frown}{2}$
i) $\frac{100}{4}$

a) Decimal exacto
b) Entero
c) Decimal exacto
d) Decimal periódico
e) Decimal exacto
f) Entero
g) Decimal exacto
h) Decimal periódico
i) Entero

045 **Realiza la división y di si el resultado es un número periódico puro o periódico mixto, indicando la parte entera y el período.**

a) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{8}{11}$
c) $\frac{26}{180}$
d) $\frac{29}{900}$
e) $\frac{1}{198}$
f) $\frac{100}{36}$

a) $\frac{2}{9} = 0{,}\overset{\frown}{2}$
b) $\frac{8}{11} = 0{,}\overset{\frown}{72}$
c) $\frac{26}{180} = \frac{13}{90} = 0{,}1\overset{\frown}{4}$
d) $\frac{29}{900} = 0{,}03\overset{\frown}{2}$
e) $\frac{1}{198} = 0{,}00\overset{\frown}{50}$
f) $\frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2{,}\overset{\frown}{7}$

046 ●●

Escribe tres fracciones que den lugar a:

a) Números enteros.

b) Números decimales exactos.

c) Números decimales periódicos.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\frac{15}{3} = 5$ $\quad \frac{15}{5} = 3$ $\quad \frac{15}{1} = 15$

b) $\frac{15}{2} = 7{,}5$ $\quad \frac{15}{10} = 1{,}5$ $\quad \frac{15}{1\,000} = 0{,}015$

c) $\frac{15}{9} = 1{,}\widehat{6}$ $\quad \frac{15}{14} = 1{,}0\widehat{714285}$ $\quad \frac{15}{11} = 1{,}\widehat{36}$

047 ●●

Indica cuáles de los siguientes números decimales son no exactos y no periódicos.

a) 2,3333…	**e) 2,355355355…**
b) 2,353355333555…	**f) 2,535535535…**
c) 2,35555…	**g) 2,353553555…**
d) 2,333	**h) 2,353553555**

Son no exactos y no periódicos los números de los apartados:

b) 2,353355333555…

g) 2,353553555…

048 ●●

Escribe los números decimales con estas características y di a qué clase corresponden.

a) Parte entera 26 y período 5.

b) Parte entera 8 y período 96.

c) Parte entera 5 y parte decimal 209.

d) Parte entera 0, parte decimal no periódica 4 y período 387.

e) Parte entera 1, parte decimal no periódica 0 y período 3.

a) $26{,}\widehat{5}$

b) $8{,}\widehat{96}$

c) $5{,}209$

d) $0{,}4\widehat{387}$

e) $1{,}0\widehat{3}$

Los números de los apartados a) y b) son decimales periódicos puros, el del apartado c) es exacto, y los de d) y e) son periódicos mixtos.

049 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXPRESA UN NÚMERO DECIMAL EXACTO EN FORMA DE FRACCIÓN?

Expresa en forma de fracción.

a) 3,87 **b) 0,0556**

PRIMERO. Se determina el número de decimales.

a) $3{,}87 \longrightarrow$ 2 decimales
b) $0{,}0556 \rightarrow$ 4 decimales

SEGUNDO. Se expresa el número como una fracción cuyo:

- Numerador es el número sin la coma decimal.
- Denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.

a) $3{,}87 = \dfrac{387}{100}$

b) $0{,}0556 = \dfrac{556}{10\,000} = \dfrac{139}{2\,500}$

050 ●●

Escribe en forma de fracción los números decimales exactos. Si es posible, simplifica el resultado.

a) 25,78 **c) 27,73** **e) 25,793** **g) 3,697** **i) 97,95**
b) 0,257 **d) 1 520,3** **f) 39,75** **h) 375,8** **j) 150,2**

a) $25{,}78 = \dfrac{2\,578}{100} = \dfrac{1\,289}{50}$

b) $0{,}257 = \dfrac{257}{1\,000}$

c) $27{,}73 = \dfrac{2\,773}{100}$

d) $1\,520{,}3 = \dfrac{15\,203}{10}$

e) $25{,}793 = \dfrac{25\,793}{1\,000}$

f) $39{,}75 = \dfrac{3\,975}{100} = \dfrac{159}{4}$

g) $3{,}697 = \dfrac{3\,697}{1\,000}$

h) $375{,}8 = \dfrac{3\,758}{10} = \dfrac{1\,879}{5}$

i) $97{,}95 = \dfrac{9\,795}{100} = \dfrac{1\,959}{20}$

j) $150{,}2 = \dfrac{1\,502}{10} = \dfrac{751}{5}$

051 ●●●

En cada uno de estos números decimales, ¿qué cifra ocupa el lugar 13 de la parte decimal?

a) $4{,}23\overset{\frown}{45}$ **c) 5,25**
b) $3{,}\overset{\frown}{653}$ **d)** $93{,}2\overset{\frown}{456}$

a) 4
b) 6
c) 0
d) 6

052 **Copia y completa la siguiente tabla:**

+	1,7	0,5	4,25	3,15	0,7	0,65
2,4	4,1	2,9	6,65	5,55	3,1	3,05
3,5	5,2	4	7,75	6,65	4,2	4,15
4,9	6,6	5,4	9,15	8,05	5,6	5,55
0,75	2,45	1,25	5	3,9	1,45	1,4
5,25	6,95	5,75	9,5	8,4	5,95	5,9
3,84	5,54	4,34	8,09	6,99	4,54	4,49
8,23	9,93	8,73	12,48	11,38	8,93	8,88
7,44	9,14	7,94	11,69	10,59	8,14	8,09
6,5	8,2	7	10,75	9,65	7,2	7,15

053 **Efectúa estas operaciones.**

a) 4,5 + 6,7
b) 7,05 + 8,19
c) 9,06 + 1,7
d) 152,3 + 4,938
e) 27,92 − 8,03
f) 359,157 − 148,049
g) 0,03 − 0,003
h) 10,45 − 7,6923

a) 11,2
b) 15,24
c) 10,76
d) 157,238
e) 19,89
f) 211,108
g) 0,027
h) 2,7577

054 **Copia y completa la siguiente tabla:**

×	0,2	10	3	2,5	0,3	1,4	100	0,1
10	2	100	30	25	3	14	1 000	1
100	20	1 000	300	250	30	140	10 000	10
0,2	0,04	2	0,6	0,5	0,06	0,28	20	0,02
2,2	0,44	22	6,6	5,5	0,66	3,08	220	0,22
3,6	0,72	36	10,8	9	1,08	5,04	360	0,36
4,25	0,85	42,5	12,75	10,625	1,275	5,95	425	0,425
0,3	0,06	3	0,9	0,75	0,09	0,42	30	0,03
0,25	0,05	2,5	0,75	0,625	0,075	0,35	25	0,025
0,75	0,15	7,5	2,25	1,875	0,225	1,05	75	0,075
1,1	0,22	11	3,3	2,75	0,33	1,54	110	0,11

055 **Efectúa estas operaciones.**

a) 3,75 · 3
b) −15,02 · 5
c) −3 · 0,02
d) 7 · (−6,46)
e) 4,2 · 3,6
f) 7,25 · (−3,9)
g) 82,9 · (−2,7)
h) −18,9 · 6,5
i) −110,14 · 1,03
j) −5,39 · (−31,5)

a) 11,25
b) −75,1
c) −0,06
d) −45,22
e) 15,12
f) −28,275
g) −223,83
h) −122,85
i) −113,4442
j) 169,785

Números decimales

056 ●

Realiza estas operaciones.

a) (4,2 + 7,98) − 5,32
b) (11,95 − 6,792) − 0,04
c) (263,45 − 193,3) + 10,7629
d) 7,005 − (96,82 + 13,99)

a) 6,86
b) 5,118
c) 80,9129
d) −103,805

057 ●

Calcula.

a) (21,5 + 7,96) − (14,3 + 2,857)
b) (52,89 − 26,14) − (3,25 − 1,0002)
c) (62,36 + 39,485) + (15,942 − 6,7)
d) (100,9 − 9,99) − (70,7 + 5,006)

a) 12,303
b) 24,5002
c) 111,087
d) 15,204

058 ●

Calcula.

a) 49,5 : 8
b) 148,725 : 3
c) 4 536,65 : 4
d) 57,3 : 7,2
e) 158 : 6,3
f) 9 437,02 : 3,125

a) 6,1875
b) 49,575
c) 1 134,1625
d) $7{,}958\overset{\frown}{3}$
e) $25{,}\overset{\frown}{079365}$
f) 3 019,8464

059

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS DECIMALES?

Calcula: 4,56 : 2 + 3 · (7,92 − 5,65)

PRIMERO. Se realizan las operaciones entre paréntesis.

4,56 : 2 + 3 · (7,92 − 5,65) = 4,56 : 2 + 3 · 2,27

SEGUNDO. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, y por último, las sumas y restas en el mismo orden.

4,56 : 2 + 3 · 2,27 = 2,28 + 6,81 = 9,09

060 ●●

Dados los números decimales: *a* = 35,49; *b* = 67,50; *c* = 15,75; calcula.

a) *b* − *a*
b) *a* + *c*
c) *a* − *c*
d) *b* − *c*
e) 2 · *b* + 3 · *c*
f) 4 · *a* − 2 · *c*
g) *a* + *b*
h) *b* + *c*
i) *b* − 2 · *c*
j) *b* : 2
k) *c* : 3
l) *a* : 7

a) 32,01
b) 51,24
c) 19,74
d) 51,75
e) 182,25
f) 110,46
g) 102,99
h) 83,25
i) 36
j) 33,75
k) 5,25
l) 5,07

061 ●●

Haz las operaciones.

a) 2,4 · (3,02 + 0,456) − (9,231 + 0,4)
b) 12,84 : 3,21 − (16,001 + 0,225) · 1,2
c) 102,48 : 4,27 · 1,2 − 445,98

a) −1,2886 b) −15,4712 c) −417,18

062 ●●

Resuelve, respetando la jerarquía de las operaciones.

a) 33,7 · 4,5 + 7,2 · 0,05
b) (33,7 · 4,5 + 7,2) · 0,05
c) 33,7 · (4,5 + 7,2 · 0,05)

a) 152,01 b) 7,9425 c) 163,782

063

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE MULTIPLICA Y SE DIVIDE UN NÚMERO DECIMAL POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS?

Calcula.

a) 84,26 · 10
b) 5,2 · 1000
c) 84,26 : 10
d) 5,2 : 1000

PRIMERO. Para multiplicar se mueve la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. En el caso de que no haya cifras suficientes, se completa con ceros el resultado.

a) 84,26 · 10 = 842,6
b) 5,2 · 1000 = 5200

SEGUNDO. Para dividir se mueve la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. En el caso de que no haya cifras suficientes, se completa con ceros el resultado.

c) 84,26 : 10 = 8,426
d) 5,2 : 1000 = 0,0052

064 ●

Efectúa estas multiplicaciones y divisiones.

a) 0,02 · 10 **d) 0,02 : 10**
b) 1,05 · 100 **e) 1,05 : 100**
c) 0,145 · 100 **f) 0,145 : 100**

a) 0,2 d) 0,002
b) 105 e) 0,0105
c) 14,5 f) 0,00145

065 ●●

Resuelve estas operaciones, respetando la jerarquía de las operaciones.

a) $54,2 - 7,2 \cdot 10$

b) $(513,02 - 79,7) \cdot 1000$

c) $(148,35 - 9,6 \cdot 100) - 10,467$

a) $-17,8$ b) 433 320 c) $-822,117$

066 ●●

Resuelve estas operaciones, respetando la jerarquía de las operaciones.

a) $17,94 \cdot 100 - 8,05 : 0,6$

b) $9,8 \cdot 10 + 41,96 : 1000$

c) $100,15 : 100 - 3,995 \cdot 0,05$

d) $(8,72 - 7,85) \cdot 0,1 - 0,2$

e) $18,9654 : (1,35 + 1,05)$

f) $9,025 - 2,46 : (1,3 + 0,01)$

a) 1 780,583333

b) 98,04196

c) 0,80175

d) $-0,113$

e) 7,90225

f) 7,147137405

067 ●●

Copia y completa las series.

a) $15 \xrightarrow{+\,0,25} \square \xrightarrow{+\,0,25} \dots \xrightarrow{+\,0,25} 20$

b) $50 \xrightarrow{-\,0,75} \square \xrightarrow{-\,0,75} \dots \xrightarrow{-\,0,75} 35$

c) $1,5 \xrightarrow{\cdot\,2,1} \square \xrightarrow{\cdot\,2,1} \dots \xrightarrow{\cdot\,2,1} 29,17215$

d) $76,527504 \xrightarrow{:\,1,8} \square \xrightarrow{:\,1,8} \dots \xrightarrow{:\,1,8} 4,05$

a) 15	b) 50	c) 1,5	d) 76,527504
15,25	49,25	3,15	42,51528
15,5	48,5	6,615	23,6196
15,75	47,75	13,8915	13,122
16	47	29,17215	7,29
16,25	46,25		4,05
16,5	45,5		
16,75	44,75		
17	44		
17,25	43,25		
17,5	42,5		
17,75	41,75		
18	41		
18,25	40,25		
18,5	39,5		
18,75	38,75		
19	38		
19,25	37,25		
19,5	36,5		
19,75	35,75		
20	35		

068 ● **Resuelve las siguientes raíces cuadradas.**

a) $\sqrt{121}$
b) $\sqrt{625}$
c) $\sqrt{441}$
d) $\sqrt{196}$
e) $\sqrt{24\,964}$
f) $\sqrt{71\,289}$
g) $\sqrt{92\,416}$
h) $\sqrt{351\,649}$

a) 11
b) 25
c) 21
d) 14
e) 158
f) 267
g) 304
h) 593

069 ● **Señala, sin realizar cálculos escritos, cuáles de las afirmaciones son falsas.**

a) $\sqrt{23} =$ **4 y resto 7**
b) $\sqrt{30} =$ **5 y resto 10**
c) $\sqrt{45} =$ **7 y resto 4**
d) $\sqrt{85} =$ **9 y resto 5**
e) $\sqrt{80} =$ **9 y resto 1**
f) $\sqrt{96} =$ **9 y resto 15**

Son falsas las afirmaciones de los apartados b), c), d) y e).

070 ●● **Calcula la raíz cuadrada.**

a) 835 **b) 5 793** **c) 1 482**

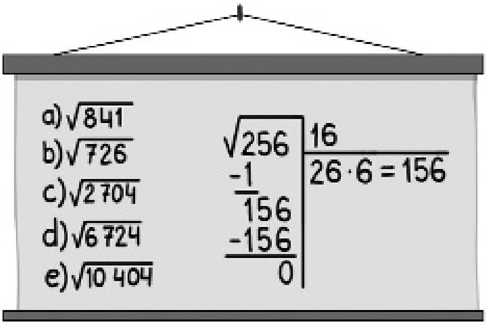
a) 28 y resto 51 b) 76 y resto 17 c) 38 y resto 38

071 ●● **Halla la raíz cuadrada con un decimal.**

a) 657 **b) 8 271** **c) 1 778**

a) 25,6 y resto 1,64 b) 90,9 y resto 8,19 c) 42,1 y resto 5,59

072 ●● **Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números.**



a) 29
b) 26 y resto 50
c) 52
d) 82
e) 102

073 ●●

Halla la raíz cuadrada, con dos decimales, de estos números enteros.

a) $\sqrt{89}$
b) $\sqrt{243}$
c) $\sqrt{549}$
d) $\sqrt{870}$
e) $\sqrt{1\,082}$
f) $\sqrt{3\,401}$

a) 9,43
b) 15,58
c) 23,43
d) 29,49
e) 32,89
f) 58,31

074

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PUEDE CALCULAR LA RAÍZ CUADRADA DE ALGUNOS NÚMEROS DECIMALES?

Calcula $\sqrt{0{,}09}$.

PRIMERO. Se escribe el decimal como fracción.

$$0{,}09 = \frac{9}{100}$$

SEGUNDO. Se halla la raíz cuadrada de la fracción.

$$\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

075 ●●

Calcula estas raíces.

a) $\sqrt{0{,}64}$
b) $\sqrt{0{,}49}$
c) $\sqrt{0{,}81}$
d) $\sqrt{0{,}36}$
e) $\sqrt{0{,}25}$
f) $\sqrt{0{,}0121}$

a) 0,8
b) 0,7
c) 0,9
d) 0,6
e) 0,5
f) 0,11

076 ●

Trunca y redondea 72,289 a las décimas.

El truncamiento es 72,2 y el redondeo es 72,3.

077 ●

Trunca y redondea 0,397 a las centésimas.

El truncamiento es 0,39 y el redondeo es 0,4.

078 ●

Trunca y redondea 125,3925 a las milésimas.

El truncamiento es 125,392 y el redondeo es 125,393.

079 ●

Copia y completa la tabla con las aproximaciones de los siguientes valores:

$$1{,}25667 \quad 2{,}\widehat{5} \quad 22{,}\widehat{45} \quad 0{,}54\widehat{7} \quad \sqrt{5}$$

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	1,2	1,25	1,256
Redondeo	1,3	1,26	1,257

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	2,5	2,55	2,555
Redondeo	2,6	2,56	2,556

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	22,4	22,45	22,454
Redondeo	22,5	22,45	22,455

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	0,5	0,54	0,547
Redondeo	0,5	0,55	0,548

	A las décimas	A las centésimas	A las milésimas
Truncamiento	2,2	2,23	2,236
Redondeo	2,2	2,24	2,236

080 ●

Calcula el cociente 40 : 17 redondeando el resultado a las centésimas.

$40 : 17 = 2{,}352\ldots$

Redondeando a las centésimas resulta 2,35.

081 ●●

¿Qué error se comete al aproximar 2,506 + 13,007 por 15,5? ¿Y por 15,52?

$2{,}506 + 13{,}007 = 15{,}513$

Al aproximar por 15,5; el error cometido es:
$15{,}513 - 15{,}5 = 0{,}013$

Y al aproximar por 15,52; el error cometido es:
$15{,}513 - 15{,}52 = -0{,}007 \rightarrow 0{,}007$ ya que el error tiene que ser positivo.

082 ●●

¿Qué error se comete al aproximar 0,8235 · 1,5 por 1,2353? ¿Y por 1,235?

$0{,}8235 \cdot 1{,}5 = 1{,}23525$

Al aproximar por 1,2353; el error cometido es:
$1{,}23525 - 1{,}2353 = -0{,}00005 \rightarrow 0{,}00005$ ya que el error tiene que ser positivo.

Y al aproximar por 1,235; el error cometido es:
$1{,}23525 - 1{,}235 = 0{,}00025$

083 ●

Expresa como potencias de base 10 estos números.

a) $8{,}7 \cdot 10\,000$ **c)** $12{,}04 \cdot 100\,000\,000$ **e)** $109{,}32 \cdot 1\,000$

b) $12{,}567 \cdot 100$ **d)** $2{,}1 \cdot 100\,000$

a) $8{,}7 \cdot 10^4$ c) $12{,}04 \cdot 10^8$ e) $109{,}32 \cdot 10^3$

b) $12{,}567 \cdot 10^2$ d) $2{,}1 \cdot 10^5$

084 ●

Escribe los siguientes números en notación científica, e indica el orden de magnitud en cada caso.

a) Siete millones doscientos mil. **c) Cuatrocientos veintidós billones.**

b) Doce mil quinientos. **d) Trece mil setecientos.**

a) $7\,200\,000 = 7{,}2 \cdot 10^6$

Orden de magnitud: 6

b) $12\,500 = 1{,}25 \cdot 10^4$

Orden de magnitud: 4

c) $422\,000\,000\,000\,000 = 4{,}22 \cdot 10^{14}$

Orden de magnitud: 14

d) $13\,700 = 1{,}37 \cdot 10^4$

Orden de magnitud: 4

085 ●●

Escribe, con todas sus cifras, estos números expresados en notación científica.

a) $1{,}5 \cdot 10^4$ **b)** $5{,}607 \cdot 10^8$ **c)** $9{,}03 \cdot 10^3$ **d)** $6{,}01 \cdot 10^{11}$

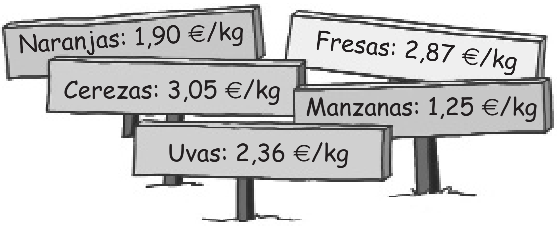
a) 15 000 b) 560 700 000 c) 9 030 d) 601 000 000 000

086 ●●

En la frutería he comprado 2,4 kg de naranjas; 1,56 kg de manzanas; 0,758 kg de uvas; 545 g de fresas y 255 g de cerezas.

a) ¿Cuánto pesa la compra?

b) ¿Cuánto dinero me he gastado?



a) La compra pesa: $2{,}4 + 1{,}56 + 0{,}758 + 0{,}545 + 0{,}255 = 5{,}518$ kg

b) Por tanto, me he gastado:

$2{,}4 \cdot 1{,}90 + 1{,}56 \cdot 1{,}25 + 0{,}758 \cdot 2{,}36 + 0{,}545 \cdot 2{,}87 + 0{,}255 \cdot 3{,}05 = 10{,}64$ €

087 ●● **El alumno más alto de la clase mide 172 cm y el más bajo 148 cm. Calcula la diferencia entre ambos y exprésala en metros.**

172 cm = 1,72 m 148 cm = 1,48 m

1,72 − 1,48 = 0,24

La diferencia, en metros, entre los dos alumnos es 0,24 m.

088 ●● **Un padre quiere repartir 15,70 € entre sus cuatro hijos a partes iguales. ¿Cuánto recibirá cada uno?**

Cada hijo recibe 15,70 : 4 = 3,92 €, y sobran 2 céntimos de euro.

089 ●● **Tengo que pagar 192,75 € en tres plazos:**

- **En el primer plazo pago la mitad.**
- **En el segundo plazo, la tercera parte.**
- **Y en el tercero, el resto.**

Calcula cuánto pagaré en cada plazo.

- En el primer plazo pago: 192,75 : 2 = 96,38 €
- En el segundo plazo pago: 192,75 : 3 = 64,25 €
- En el tercer plazo pago: 192,75 − 96,38 − 64,25 = 32,12 €

090 ●● **Si una pulgada equivale a 2,54 cm:**

a) ¿Qué longitud tiene un televisor de 27 pulgadas? ¿Y uno de 24 pulgadas?

b) ¿Cuántas pulgadas son 45,725 cm?

a) La diagonal del televisor mide: 27 · 2,54 = 68,58 cm
La diagonal del televisor mide: 24 · 2,54 = 60,96 cm

b) Como 45,725 : 2,54 = 18,002, entonces 45,725 cm equivalen a 18 pulgadas.

091 ●● **Una onza equivale a 28,35 g.**

a) ¿Cuántas onzas tiene 1 kg? ¿Y 560 g?

b) ¿Cuántos gramos serían 5,7 onzas?

a) 1 kg tiene: 1000 : 28,35 = 35,27 onzas
560 g tienen: 560 : 28,35 = 19,75 onzas

b) 5,7 onzas son: 5,7 · 28,35 = 161,595 g

092 ●●

Un barril americano contiene 158,98 ℓ.

a) ¿Cuántos barriles podemos llenar con 317 960 ℓ de petróleo? ¿Y con 1 000 000 ℓ?

b) ¿Cuántos litros son 250 barriles?

a) Se pueden llenar: 317 960 : 158,98 = 2 000 barriles
Se pueden llenar: 1 000 000 : 158,98 = 6 290,099 → 6 290 barriles

b) 250 barriles son: 250 · 158,98 = 39 745 litros

093 ●●

Una tira de papel mide 29 cm de largo. ¿Cuántas tiras necesitamos para obtener una tira de 2,4 m de largo?

Como 2,4 : 0,29 = 8,276, necesitamos al menos 9 tiras.

094 ●●

Sabiendo que una milla terrestre son 1,6093 km, ¿cuántos metros y kilómetros son 2,35 millas? ¿Y 0,6 millas?

2,35 millas son: 2,35 · 1,6093 = 3,781855 km = 3 781,855 m
0,6 millas son: 0,6 · 1,6093 = 0,96558 km = 965,58 m

095 ●●

Un nudo es una milla marina/h y una milla marina es 1,852 km. La velocidad de un barco es de 60 nudos. ¿Cuántos kilómetros recorre en tres horas?

El barco recorre en tres horas:
1,852 · 3 · 60 = 333,36 km

096 ●●

Un glaciar retrocede 2,8 cm al año por el deshielo. ¿Cuánto tardará en retroceder 5 m?

500 : 2,8 = 178,57, por lo que tardará 178 años y unos 7 meses.

097 ●●

Calcula el peso total, en gramos, de 241 libros si cada uno de ellos pesa 2 hg y 653 mg.

241 · 200,653 = 48 357,373 g

098 ●●● **El perímetro de un rectángulo es 5,85 m. Si un lado mide el doble que el otro, ¿cuánto mide cada lado?**

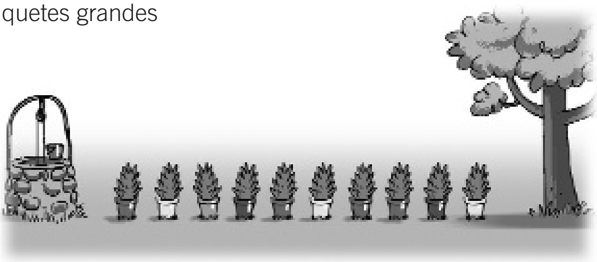
El lado menor mide 5,85 : (1 + 2 + 1 + 2) = 0,975 m y el lado mayor mide 0,975 · 2 = 1,95 m.

099 ●●● **Gastamos 0,75 m de papel para envolver paquetes pequeños y 1,8 m para los paquetes grandes. Disponemos de 25 m de papel. ¿Cuántos paquetes de cada tipo podemos envolver?**

25 : 0,75 = 33,33 paquetes pequeños

25 : 1,8 =6 13,88 paquetes grandes

100 ●●● **En un jardín hay un pozo y un árbol a 27,5 m de distancia. Entre ellos se han colocado 10 macetas a intervalos iguales.**



a) ¿A qué distancia de cada maceta está el pozo?

b) ¿Qué distancia se recorre para regarlas, si cada dos macetas hay que volver al pozo?

a) Como 27,5 : 11 = 2,5, hay 2,5 m entre el pozo y la primera maceta. Para hallar el resto solo hay que ir sumando 2,5 m para cada maceta hasta la décima:
2,5; 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5, y 25 m, respectivamente.

b) 2 · 5 + 2 · 10 + 2 · 15 + 2 · 20 + 25 = 125 m

101 ●●● **Encuentra un número decimal comprendido entre:**

a) 1,9 y 2
b) 2,99 y 3
c) 2,999 y 3
d) 2,9999 y 3
e) 2,999999 y 3
f) 2,9999999999 y 3

¿Puedes encontrar un número comprendido entre $2,\widehat{9}$ = 2,9999... y 3? ¿Qué conclusión obtienes?

a) 1,91
b) 2,991
c) 2,9991
d) 2,99991
e) 2,9999991
f) 2,99999999991

No hay ningún número decimal entre ellos.

Por tanto, son el mismo número.

Números decimales

102 ●●●

Investiga por qué son válidos estos métodos para resolver algunas operaciones.

a) Multiplicar por 0,25 es igual que dividir entre 4.

b) Multiplicar por 0,75 es lo mismo que multiplicar por 3 y luego dividir entre 4.

c) Multiplicar un número por 1,5 es igual que sumar al número su mitad.

d) Dividir un número entre 0,5 equivale a calcular el doble del número.

e) Dividir un número entre 0,75 es lo mismo que multiplicarlo por 4 y dividirlo entre 3.

a) 0,25 es la expresión decimal de la fracción $\frac{1}{4}$.

b) 0,75 es la expresión decimal de la fracción $\frac{3}{4}$.

c) Es válido porque: $1{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$

d) Dividir entre 0,5 es equivalente a dividir entre $\frac{1}{2}$, es decir, a multiplicar por 2.

e) Dividir entre 0,75 es equivalente a dividir entre $\frac{3}{4}$, es decir, a multiplicar por su inverso, que es $\frac{4}{3}$.

103 ●●●

Utilizando la calculadora, explica cómo puedes realizar estos cálculos sin utilizar la tecla de la coma decimal.

a) 1,23 · 34,567 **b) 98,765 : 432** **c) 12 : 345,67** **d) 9,87 : 65,432**

a) $1{,}23 \cdot 34{,}567 = \frac{123}{100} \cdot \frac{34\,567}{1\,000} = \frac{4\,251\,741}{100\,000} = 42{,}51741$

b) $98{,}765 : 432 = \frac{98\,765}{1\,000} : 432 = \frac{98\,765}{1\,000 \cdot 432} = 0{,}2286$

c) $12 : 345{,}67 = 12 : \frac{34\,567}{100} = \frac{12 \cdot 100}{34\,567} = 0{,}0347$

d) $9{,}87 : 65{,}432 = \frac{987}{100} : \frac{65\,432}{1\,000} = \frac{987 \cdot 1\,000}{65\,432 \cdot 100} = 0{,}1508$

104 ●●●

Indica cuál de los dos personajes tiene razón, y explica por qué.

La mujer tiene razón, pues la raíz cuadrada de cualquier número positivo menor que 1 es mayor que el radicando: $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \rightarrow 0{,}25 < 0{,}5$

105 ●●● **Investiga por qué la raíz cuadrada de 200 720 072 007 200 720 072 no es un número entero. ¿Cuál debe ser la última cifra de un número para que no tenga raíz cuadrada exacta?**

El número acaba en…	Su cuadrado acaba en…
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1
0	0

Se observa que ningún cuadrado de un número acaba en 2. Un número no tiene raíz cuadrada exacta si termina en cualquiera de estas cifras: 2, 3, 7 u 8.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

106 ●●● **Hemos decidido instalar ADSL y estas son las ofertas de distintas compañías.**

Eres capaz de… Comprender

a) Si se realiza una llamada a móvil de 15 minutos un viernes a las 18 horas, ¿cuánto cuesta en cada una de las compañías? ¿Y si se realiza un sábado?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si hemos realizado 30 llamadas a móviles de lunes a viernes, con 105 minutos de duración, todas ellas antes de las 22 horas, ¿cuánto pagaría en cada compañía?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

b) He revisado los recibos telefónicos de los últimos meses y he comprobado que no llamamos demasiado a teléfonos móviles, tan solo mi hermano cuando llama a algún amigo. Además, suelen ser llamadas de unos 5 minutos y las realiza de lunes a viernes y antes de las 10 de la noche. ¿Qué oferta nos conviene?

a) • Viernes:
  Naranja → $15 \cdot 0{,}20 + 0{,}12 = 3{,}12$ €
  Teleoído → Gratis
  Yoyo → $15 \cdot 0{,}28 = 4{,}20$ €
• Sábado:
  Naranja → $15 \cdot 0{,}11 + 0{,}12 = 1{,}77$ €
  Teleoído → Gratis
  Yoyo → $15 \cdot 0{,}28 = 4{,}20$ €

b) Naranja → $105 \cdot 0{,}20 + 30 \cdot 0{,}12 = 24{,}60$ €
Teleoído → Gratis
Yoyo → $105 \cdot 0{,}28 = 29{,}04$ €

c) Una llamada de 5 minutos de lunes a viernes antes de las 22:00 cuesta:
  Naranja → $5 \cdot 0{,}20 + 0{,}12 = 1{,}12$ €
  Teleoído → Gratis
  Yoyo → $5 \cdot 0{,}28 = 1{,}40$ €

Yoyo es siempre más cara que Naranja porque la cuota fija es mayor, 20 € en Naranja y 22 en Yoyo, y las llamadas son más caras en Yoyo.

Número de llamadas que tengo que hacer para pagar lo mismo en Teleoído y en Naranja:

$$(32 - 20) : 1{,}12 = 10{,}71$$

Si hago 10 llamadas al mes, o menos de 10 llamadas al mes, me conviene Naranja, si hago más, Teleoído.

107 ●●● **Quiero comprar un coche nuevo y estoy dudando entre comprarlo con motor de gasoil o de gasolina.**

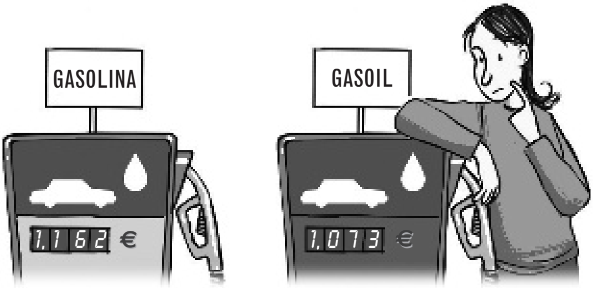
ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Qué diferencia de precio hay entre el coche de gasoil y el de gasolina?

b) ¿Cuántos litros consumiría en un viaje de 500 km cada uno de ellos?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) El coche con motor de gasolina es más barato, pero su consumo es mayor; además, el precio del litro de gasolina es mayor que el de gasoil. Estos son los precios que firmaban ayer en la gasolinera de mi barrio:



Con estos precios, ¿cuánto ahorraría con un coche con motor de gasoil en un viaje de 1 000 km?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si la diferencia entre el precio de los combustibles no aumentara demasiado en los siguientes años, ¿a partir de cuántos kilómetros habría pagado lo mismo por ambos coches?

a) 25 145 − 23 295 = 1 850 €

b) Gasolina → (500 : 100) · 9,1 = 45,5 litros en 500 km

Gasoil → (500 : 100) · 7,7 = 38,5 litros en 500 km

c) (1 000 : 100) · 9,1 · 1,162 − (1 000 : 100) · 7,7 · 1,073 = 23,121 €

El coste del combustible de un viaje de 1 000 km sería unos 23 € más barato en un coche de gasoil.

d) Si cada 1 000 km el coche de gasolina gasta 23,121 € más que el de gasoil:

23,121 : 1 000 = 0,023121 € gasta más el de gasolina que el de gasoil en 1 km

Como el coche de gasoil es 1 850 € más caro:

1 850 : 0,023121 = 80 013,84 km

Más o menos, a partir de los 80 000 km es más rentable un coche de gasoil que de gasolina.

4 Sistema sexagesimal

El amo de la Luna

La nave de Colón llevaba tiempo embarrancada en la isla de Jamaica, sus hombres amenazaban con un motín y, para acabar de comprometer la situación, los indígenas, cansados de intercambiar espejitos y cuentas, se negaban a abastecerlos de comida.

La situación era desesperada y Colón, para calmar a sus hombres, les prometió comida y citó a los jefes indígenas esa misma noche.

–¡Sabed que me habéis enojado y, por vuestra negativa a colaborar, haré que la Luna se torne roja de sangre y luego desaparezca!

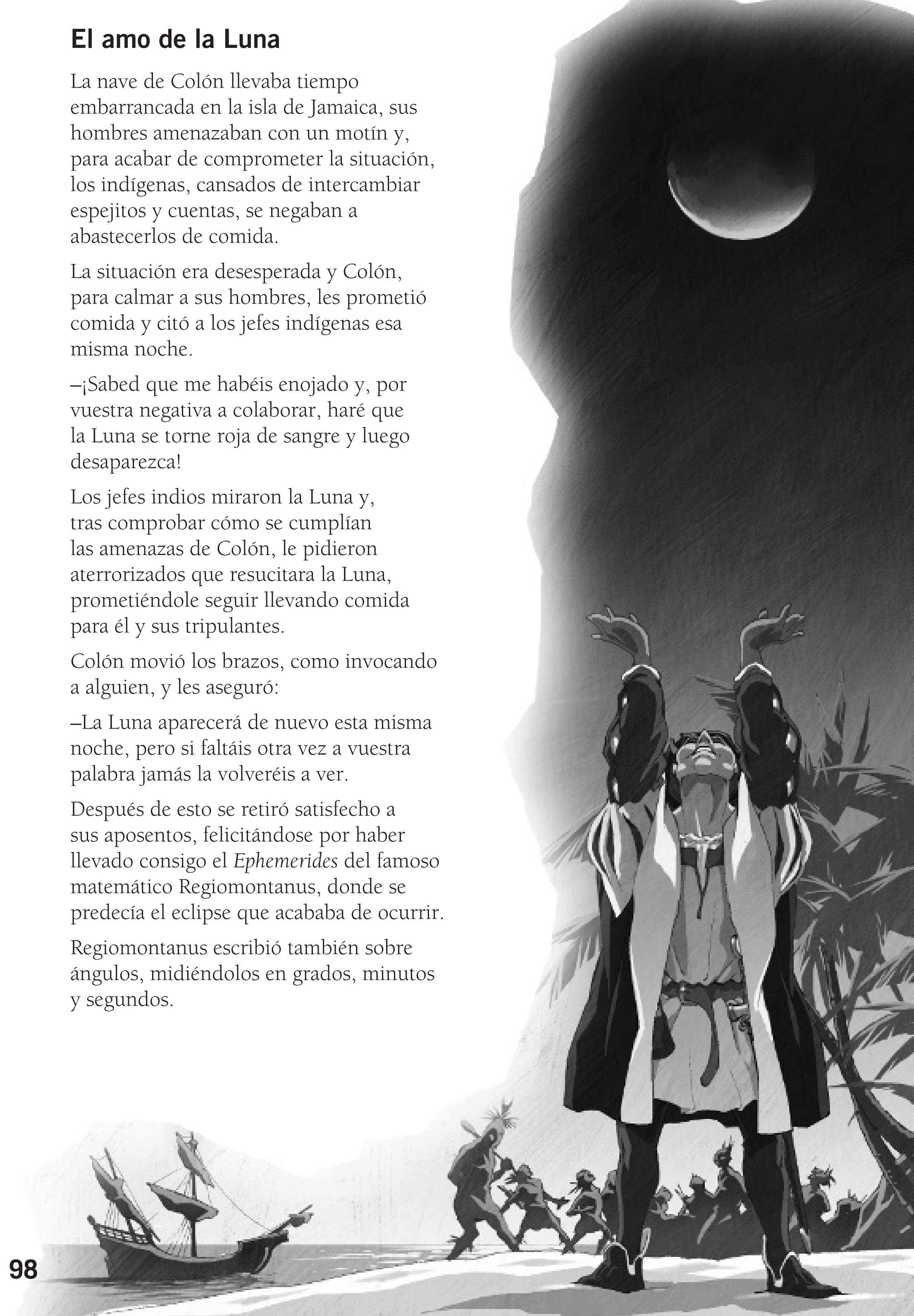
Los jefes indios miraron la Luna y, tras comprobar cómo se cumplían las amenazas de Colón, le pidieron aterrorizados que resucitara la Luna, prometiéndole seguir llevando comida para él y sus tripulantes.

Colón movió los brazos, como invocando a alguien, y les aseguró:

–La Luna aparecerá de nuevo esta misma noche, pero si faltáis otra vez a vuestra palabra jamás la volveréis a ver.

Después de esto se retiró satisfecho a sus aposentos, felicitándose por haber llevado consigo el *Ephemerides* del famoso matemático Regiomontanus, donde se predecía el eclipse que acababa de ocurrir.

Regiomontanus escribió también sobre ángulos, midiéndolos en grados, minutos y segundos.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Regiomontanus fue el matemático más influyente del siglo XV. Investiga sobre su vida y sus aportaciones a la ciencia.**

Se puede encontrar una biografía sobre Regiomontanus en la siguiente página web:
http://www.astromia.com/biografias/regiomontanus.htm

Para completar la biografía de este matemático así como obtener información sobre sus aportaciones a la ciencia se puede visitar esta página web:
http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/es/Regiomontanus

2 **¿Cómo pudo influir el trabajo de Regiomontanus en el descubrimiento de América por Cristóbal Colón?**

En esta página web se puede encontrar información sobre cómo Cristóbal Colón utilizó los trabajos de Regiomontanus:
http://www.siderum.com/Colon.htm

En esta otra página web también se puede encontrar dicha información:
http://axxon.com.ar/nasa/c08mar03-04.htm

3 **Busca información sobre el sistema sexagesimal a lo largo de la historia.**

La siguiente página web muestra información sobre el origen del sistema sexagesimal:
http://www.basculasbalanzas.com/instrumentos-de-medicion/sistema-medicion-sexagesimal.html

En esta página web se puede completar la información sobre la historia del sistema sexagesimal:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/carambolo/WEB%20JCLIC2/Agrega/Matematicas/Sistema%20sexagesimal/contenido/mt14_oa04_es/index.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Copia y completa, en cada caso, la equivalencia.**

a) 75 unidades de millar = ☐ unidades = ☐ centésimas
b) 654 centésimas = ☐ unidades = ☐ decenas de millar
c) ☐ centenas = 18 unidades = ☐ milésimas
d) ☐ milésimas = 168 décimas = ☐ decenas

a) 75 000 unidades = 7 500 000 centésimas
b) 6,54 unidades = 0,0654 decenas de millar
c) 0,18 centenas = 18 000 milésimas
d) 16 800 milésimas = 1,68 decenas

2 **Expresa en metros.**

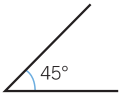
a) 4 km 6 dam 3 dm **b) 79 hm 8 cm** **c) 34 dam 74 mm**

a) 4060,3 m b) 7900,08 m c) 340,074 m

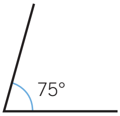
3 **Dibuja estos ángulos.**

a) 45° **b) 75°** **c) 180°**

a)



b)



c)

EJERCICIOS

001 **Expresa en minutos.**

a) 300″ **b) 1 380″** **c) 150°** **d) 480°**

a) $300'' = 300 : 60 = 5'$

b) $1\,380'' = 1\,380 : 60 = 23'$

c) $150° = 150 \cdot 60 = 9\,000'$

d) $480° = 480 \cdot 60 = 28\,800'$

002 **Calcula.**

a) ¿Cuántos grados son 64 800″? **b) ¿Y cuántos segundos son 10°?**

a) $64\,800'' = 64\,800 : 3\,600 = 18°$

b) $10° = 10 \cdot 3\,600 = 36\,000''$

003 **Un ángulo llano mide 180°. Expresa su amplitud en minutos y también en segundos. Haz lo mismo con un ángulo completo (360°).**

$180° = 10\,800' = 648\,000''$ $360° = 21\,600' = 1\,296\,000''$

004 **Un ángulo mide 59° 32′. ¿Cuánto le falta para medir 60°?**

Al ángulo le faltan 28′ para medir 60°.

005 **Transforma en segundos las siguientes medidas de tiempo.**

a) 100 min **b) Media hora** **c) 1,5 h** **d) 60 min**

a) $100 \text{ min} = 100 \cdot 60 = 6\,000 \text{ s}$

b) $0{,}5 \text{ h} = 0{,}5 \cdot 3\,600 = 1\,800 \text{ s}$

c) $1{,}5 \text{ h} = 1{,}5 \cdot 3\,600 = 5\,400 \text{ s}$

d) $60 \text{ min} = 60 \cdot 60 = 3\,600 \text{ s}$

006 **Expresa en minutos.**

a) 2,5 h **b) 2 días** **c) 3 600 s** **d) 14 400 s**

a) $2{,}5 \text{ h} = 2{,}5 \cdot 60 = 150 \text{ min}$

b) $2 \text{ días} = 2 \cdot 24 \cdot 60 = 2\,880 \text{ min}$

c) $3\,600 \text{ s} = 3\,600 : 60 = 60 \text{ min}$

d) $14\,400 \text{ s} = 14\,400 : 60 = 240 \text{ min}$

007 **Calcula la equivalencia en horas.**

a) 90 000 s **c) 1 semana**

b) 3 120 min **d) 3 días**

a) 90 000 s = 90 000 : 3 600 = 25 h

b) 3 120 min = 3 120 : 60 = 52 h

c) 1 semana = $7 \cdot 24 = 168$ h

d) 3 días = $3 \cdot 24 = 72$ h

008 **Si la jornada diaria de un estudiante de ESO es de 6 horas, expresa ese tiempo en minutos y también en segundos.**

6 h = $6 \cdot 60 = 360$ min = $360 \cdot 60 = 21\,600$ s

009 **Expresa en segundos la duración de un partido de baloncesto que tiene cuatro tiempos de 10 minutos cada uno.**

$4 \cdot 10 = 40$ min = $40 \cdot 60 = 2\,400$ s

010 **Jorge estudió el sábado por la mañana 2 horas y media, y por la tarde, tres cuartos de hora. ¿Cuántos minutos estudió más por la mañana que por la tarde?**

Por la mañana estudió: 2,5 h = $2{,}5 \cdot 60 = 150$ min

Y por la tarde estudió: $\frac{3}{4}$ h $= \frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45$ min

Jorge estudió: $150 - 45 = 105$ min más por la mañana que por la tarde

011 **Expresa en segundos.**

a) 28° 17′ 39″ **d) 60° 31′**

b) 56° 38″ **e) 2° 54′ 27″**

c) 2 h 16 min 20 s **f) 3 h 45 min**

a) 28° 17′ 39″ = $28 \cdot 3\,600 + 17 \cdot 60 + 39 = 100\,800 + 1\,020 + 39 =$
$= 101\,859$″

b) 56° 38″ = $56 \cdot 3\,600 + 38 = 201\,600 + 38 = 201\,638$″

c) 2 h 16 min 20 s = $2 \cdot 3\,600 + 16 \cdot 60 + 20 = 7\,200 + 960 + 20 =$
$= 8\,180$ s

d) 60° 31′ = $60 \cdot 3\,600 + 31 \cdot 60 = 216\,000 + 1\,860 = 217\,860$″

e) 2° 54′ 27″ = $2 \cdot 3\,600 + 54 \cdot 60 + 27 = 7\,200 + 3\,240 + 27 =$
$= 10\,467$″

f) 3 h 45 min = $3 \cdot 3\,600 + 45 \cdot 60 = 10\,800 + 2\,700 = 13\,500$ s

012 **Expresa 56° 40′ en forma incompleja.**

$56 \cdot 60 + 40 = 3\,400$′

Sistema sexagesimal

013 **¿Cuántos minutos son tres cuartos de hora? ¿Y cuántos segundos?**

Tres cuartos de hora son: 45 min $= 45 \cdot 60 = 2700$ s

014 **Un ciclista ha empleado 1 h 15 min 18 s en llegar a la meta y otro ha necesitado 23 458 s. ¿Cuál de los dos ha tardado más?**

1 h 15 min 18 s $= 1 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 18 = 4518$ s

Como 1 h 15 min 18 s < 23458 s, el segundo ciclista ha tardado más.

015 **Expresa en grados, minutos y segundos estas medidas de ángulos.**

a) 28 300″ **c) 872′** **e) 43 208″**

b) 28 215″ **d) 65 497″** **f) 45 001′**

a)
$$\begin{array}{l|l} 28300'' & \underline{60\quad} \\ \ \ 430 & 471' \\ \ \ \ 100 & \\ \ \ \ \ 40'' & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 471' & \underline{60\quad} \\ \ 51' & 7^\circ \end{array}$$

$28300'' = 7^\circ\ 51'\ 40''$

b)
$$\begin{array}{l|l} 28215'' & \underline{60\quad} \\ \ \ 421 & 470' \\ \ \ \ \ 15'' & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 470' & \underline{60\quad} \\ \ 50' & 7^\circ \end{array}$$

$28215'' = 7^\circ\ 50'\ 15''$

c)
$$\begin{array}{l|l} 872' & \underline{60\quad} \\ 272 & 14^\circ \\ \ 32' & \end{array}$$

$872' = 14^\circ\ 32'$

d)
$$\begin{array}{l|l} 65497'' & \underline{60\quad} \\ \ \ 549 & 1091' \\ \ \ \ 097 & \\ \ \ \ \ 37'' & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1091' & \underline{60\quad} \\ \ 491 & 18^\circ \\ \ \ 11' & \end{array}$$

$65497'' = 18^\circ\ 11'\ 37''$

e)
$$\begin{array}{l|l} 43208'' & \underline{60\quad} \\ \ \ 120 & 720' \\ \ \ \ \ 08'' & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 720' & \underline{60\quad} \\ 12 & 12^\circ \\ \ 0' & \end{array}$$

$43208'' = 12^\circ\ 8''$

f)
$$\begin{array}{l|l} 45001' & \underline{60\quad} \\ \ 300 & 750^\circ \\ \ \ 001' & \end{array}$$

$45001' = 750^\circ\ 1'$

016 **Expresa en forma compleja las siguientes medidas de tiempo.**

a) 458 min
b) 34 567 s
c) 8 010 s
d) 13 590 s
e) 5 681 min
f) 477 s

a) $\begin{array}{r|l} 458\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 38\text{ min} & 7\text{ h} \end{array}$

458 min = 7 h 38 min

b) $\begin{array}{r|l} 34567\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 456 & 576\text{ min} \\ 367 & \\ 07\text{ s} & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 576\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 36\text{ min} & 9\text{ h} \end{array}$

34 567 s = 9 h 36 min 7 s

c) $\begin{array}{r|l} 8010\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 201 & 133\text{ min} \\ 210 & \\ 30\text{ s} & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 133\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 13\text{ min} & 2\text{ h} \end{array}$

8 010 s = 2 h 13 min 30 s

d) $\begin{array}{r|l} 13590\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 159 & 226\text{ min} \\ 390 & \\ 30\text{ s} & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 226\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 46\text{ min} & 3\text{ h} \end{array}$

13 590 s = 3 h 46 min 30 s

e) $\begin{array}{r|l} 5681\text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 281 & 94\text{ h} \\ 41\text{ min} & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 94\text{ h} & 24 \\ \cline{2-2} 22\text{ h} & 3 \end{array}$

5 681 min = 94 h 41 min = 3 días 22 h 41 min

f) $\begin{array}{r|l} 477\text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 57\text{ s} & 7\text{ min} \end{array}$

477 s = 7 min 57 s

017 **Un tren ha tardado 1 hora y 10 minutos en llegar a la primera estación, y 27 minutos en llegar a la segunda estación. ¿Cuántos minutos ha tardado en total?**

1 h 10 min + 27 min = 1 h 37 min = 97 min

Sistema sexagesimal

018 **Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.**

a) 180 007″ = 50° 7″

b) 3 h 452 s = 3 h 7 min 3 s

c) 183 min 122 s = 3 h 5 min 2 s

a) Verdadera: 50° 7″ = 50 · 60 · 60 + 7 = 180 007″

b) Falsa: 3 h 452 s = 3 h 7 min 32 s

c) Verdadera: 183 min 122 s = 185 min 2 s = 3 h 5 min 2 s

019 **Efectúa estas operaciones.**

a) 12° 15′ 58″ + 23° 22′ 19″

b) 35° 45′ + 26° 10′ + 26° 15′ 33″

a) 35° 37′ 77″ = 35° 38′ 17″

b) 87° 70′ 33″ = 88° 10′ 33″

020 **El ganador de una carrera ha llegado a la meta a las 14 h 26 min 47 s, y el segundo, 17 min 52 s después. ¿A qué hora llegó el segundo?**

14 h 26 min 47 s + 17 min 52 s = 14 h 44 min 39 s

021 **Los tiempos de cuatro corredores han sido:**

2 min 3 s
1 min 59 s
2 min
1 min 58 s

Calcula el tiempo que han empleado en total.

2 min 3 s + 1 min 59 s + 2 min + 1 min 58 s = 8 min

022 **Efectúa estas operaciones.**

a) 32° 5′ 23″ − 17° 22′ 33″

b) 19° 35′ − 11° 34″

c) 4 h 14 min 34 s − 2 h 30 min 58 s

d) 2 h 6 min − 37 min 52 s

a) 14° 42′ 50″

b) 8° 34′ 26″

c) 1 h 43 min 36 s

d) 1 h 28 min 8 s

023 **Calcula: 24° 36′ − (24° 22″ − 6° 14′)**

24° 36′ − (24° 22″ − 6° 14′) = 24° 36′ − 17° 46′ 22″ = 6° 49′ 38″

024 **En una prueba contrarreloj los tiempos de dos ciclistas han sido 1 h 1 min 7 s y 59 min 43 s, respectivamente. Calcula la diferencia de tiempo que hay entre ambos.**

1.^{er} ciclista: 60 min 67 s   2.^{o} ciclista: 59 min 43 s
La diferencia es: 60 min 67 s − 59 min 43 s = 1 min 24 s

025 **Copia y completa cada igualdad.**

a) □° □′ □″ − 1° 22′ 33″ = 3° 14′ 12″
b) □ h □ min □ s + 17 min 58 s = 2 h 17 min 57 s

a) 4° 36′ 45″ − 1° 22′ 33″ = 3° 14′ 12″
b) 1 h 59 min 59 s + 17 min 58 s = 2 h 17 min 57 s

026 **Efectúa estas operaciones.**

a) (12° 23′ 4″) · 3
b) (41′ 10″) · 4
c) (2 h 19 min 14 s) · 5
d) (1 h 33 s) · 4

a) 36° 69′ 12″ = 37° 9′ 12″
b) 164′ 40″ = 2° 44′ 40″
c) 10 h 95 min 70 s = 11 h 36 min 10 s
d) 4 h 132 s = 4 h 2 min 12 s

027 **¿Cuánto mide el ángulo doble de $\hat{A}$ = 44° 56′ 41″?**

(44° 56′ 41″) · 2 = 88° 112′ 82″ = 89° 53′ 22″

028 **Una máquina de lavado funciona diariamente 7 h 20 min 40 s. ¿Cuánto tiempo funciona de lunes a viernes?**

(7 h 20 min 40 s) · 5 = 35 h 100 min 200 s = 36 h 43 min 20 s

029 **Si multiplicamos un ángulo de medida 45° 15′ 37″ por 4, ¿cuál es el error que cometemos si no tenemos en cuenta los segundos?**

El resultado, teniendo en cuenta los segundos, es:
(45° 15′ 37″) · 4 = 180° 60′ 148″ = 181° 2′ 28″

Si no tenemos en cuenta los segundos, el resultado es:
(45° 15′) · 4 = 180° 60′ = 181°, por lo que el error es 2′ 28″.

Sistema sexagesimal

030 **Calcula estas divisiones.**

a) (305° 75′ 85″) : 5 **c) (120° 48′) : 6**

b) (7° 4′ 16″) : 3 **d) (48° 36″) : 4**

a) 61° 15′ 17″ c) 20° 8′

b) 2° 21′ 25,$\widehat{3}$″ d) 12° 9″

031 **Calcula la mitad de 12 h 47 min 56 s.**

(12 h 47 min 56 s) : 2 = 6 h 23 min 58 s

032 **Efectúa estas divisiones.**

a) (126° 55′) : 3 **b) 124° : 5**

a) 42° 18′ 20″ b) 24° 48′

033 **Una teleoperadora ha hablado por teléfono, de lunes a viernes, un total de 22 h 49 min 32 s. ¿Cuál ha sido el tiempo medio diario que ha hablado?**

(22 h 49 min 32 s) : 5 = 4 h 33 min 54,4 s

ACTIVIDADES

034 ● **Copia y completa esta tabla:**

Grados	Minutos	Segundos
125°	**7 500′**	**450 000″**
26°	1 560′	**93 600″**
35°	**2 100′**	126 000″
9°	**540′**	32 400″
3°	180′	10 800″
14°	840′	**50 400″**

035 ● **Calcula mentalmente y expresa en minutos y en segundos las medidas de ángulos.**

a) 3° **b) 5°** **c) 8°** **d) 10°** **e) 1° 15′** **f) 10° 10′**

a) 180′ = 10 800″ c) 480′ = 28 800″ e) 75′ = 4 500″

b) 300′ = 18 000″ d) 600′ = 36 000″ f) 370′ = 22 200″

036 ● **Expresa en forma incompleja.**

a) 35° 54′ 65″ **c) 4 h 27 min 56 s**

b) 65° 53′ 12″ **d) 7 h 33 min 49 s**

a) 129 305″ b) 237 192″ c) 16 076 s d) 27 229 s

037 ●

Expresa en forma compleja.

a) 25 123 s
b) 45 125 s
c) 16 459″
d) 13,25 h
e) 5432 s
f) 452 min
g) 27 762 s
h) 90 000 s
i) 40 000′

a) 6 h 58 min 43 s
b) 12 h 32 min 5 s
c) 4° 34′ 19″
d) 13 h 15 min
e) 1 h 30 min 32 s
f) 7 h 32 min
g) 7 h 42 min 42 s
h) 25 h = 1 día 1 h
i) 666° 40′

038 ●

Expresa en forma incompleja.

a) 13° 15′ 32″
b) 100° 47′
c) 82° 3′
d) 7 h 51 min 46 s
e) 20 h 32 s
f) 19 h 46 min

a) 47 732″
b) 6047′
c) 4923′
d) 28 306 s
e) 72 032 s
f) 1 186 min

039 ●●

Expresa en minutos los siguientes ángulos.

a) 35°
b) 4° 30′
c) La mitad de 30°
d) 360″
e) 2° 45′ 120″
f) (18° − 15°) + 3°
g) 5°
h) 6° 25′
i) 13° 35′ 60″
j) 17° 180″
k) 35′ 420″
l) 5′ + 60″ + 3°

a) 2 100′
b) 270′
c) 900′
d) 6′
e) 167′
f) 6° = 360′
g) 300′
h) 385′
i) 816′
j) 1 023′
k) 42′
l) 186′

040 ●●

Expresa en segundos estos ángulos.

a) 1° 45′
b) (17° − 3°) − (10° − 5°)
c) 3′
d) (35″ − 28″) − 4″
e) 3° 5′ 10″
f) 4° 38″
g) 2° 20′ 30″
h) 35′ 10″
i) 55′
j) 7° 25′

a) 6300″
b) 9° = 32 400″
c) 180″
d) 3″
e) 11 110″
f) 14 438″
g) 8 430″
h) 2 110″
i) 3 300″
j) 26 700″

Sistema sexagesimal

041 **Realiza estas sumas de ángulos.**

a) 35° 20′ 15″ + 10° 30′ 40″
b) 6° 10′ 5″ + 8° 40′ 52″
c) 15° 36′ 40″ + 2° 10′ 13″
d) 18° 13′ 25″ + 28° 48′ 10″
e) 6° 30′ + 4° 50′ 45″
f) 5° 25′ 3″ + 75′ 8″
g) 4° 3′ 6″ + 5° 7′ 28″ + 25° 39′ 40″
h) 43° 25″ + 5° 48′
i) 2° 2″ + 75° 43′
j) 33′ 7″ + 4° 45′

a) 45° 50′ 55″
b) 14° 50′ 57″
c) 17° 46′ 53″
d) 46° 61′ 35″ = 47° 1′ 35″
e) 10° 80′ 45″ = 11° 20′ 45″
f) 5° 100′ 11″ = 6° 40′ 11″
g) 34° 49′ 74″ = 34° 50′ 14″
h) 48° 48′ 25″
i) 77° 43′ 2″
j) 4° 78′ 7″ = 5° 18′ 7″

042 **Efectúa las siguientes restas.**

a) 3° 35′ − 2° 10′
b) 1° 25′ − 10′
c) 63° 47″ − 25′ 30″
d) 1° 45′ 3″ − 75′ 10″
e) 4° 2′ − 1° 40′
f) 2° 30′ 10″ − 3′ 50″
g) 42° 5′ 3″ − 38′ 10″
h) 37′ 45″ − 20′ 78″
i) 2° 6′ 4″ − 1° 10′
j) 35° 11′ 54″ − 13° 12′ 15″

a) 1° 25′
b) 1° 15′
c) 62° 35′ 17″
d) 29′ 53″
e) 2° 22′
f) 2° 26′ 20″
g) 41° 26′ 53″
h) 16′ 27″
i) 56′ 4″
j) 21° 59′ 39″

043 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN SUMANDO EN UNA SUMA DE LA QUE CONOCEMOS SU RESULTADO?

¿Qué medida tiene el ángulo $\hat{B}$ si, al sumarlo con el ángulo $\hat{A} = 17°\ 26''$, resulta el ángulo 36° 7′ 15″?

PRIMERO. Se expresa el problema mediante una operación, y se despeja la medida desconocida.

$$\hat{A} + \hat{B} = 36^\circ\ 7'\ 15'' \rightarrow \underbrace{17^\circ\ 26''}_{\textit{Pasa}\text{ restando}} + \hat{B} = 36^\circ\ 7'\ 15''$$

SEGUNDO. Se realizan las operaciones.

$$\begin{array}{r} 36^\circ\ \ 7'\ \ 15'' \\ -\ 17^\circ\ \qquad 26'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' \,=\, 60''} \begin{array}{r} 16^\circ\ \ 6'\ \ 75'' \\ -\ 17^\circ\ \qquad 26'' \\ \hline 19^\circ\ \ 6'\ \ 49'' \end{array}$$

No se pueden restar
los segundos

Por tanto, el ángulo es $\hat{B} = 19°\ 6'\ 49''$.

044 ●●

Copia y completa el ángulo que falta.

a) ☐ + 25° = 50° 20′ 47″
b) ☐ + 27° 32″ = 80° 5′ 38″
c) ☐ + 1° 40″ = 5° 3′ 20″
d) 15° 10′ 30″ + ☐ = 20° 5′ 40″
e) ☐ + 25′ 35″ = 1° 30′ 16″
f) ☐ + 17° = 20° 12″
g) ☐ + 6° 42′ = 10° 58′ 35″
h) ☐ + 9° 18′ = 17° 43″

a) 25° 20′ 47″
b) 53° 5′ 6″
c) 4° 2′ 40″
d) 4° 55′ 10″
e) 1° 4′ 41″
f) 3° 12″
g) 4° 16′ 35″
h) 7° 42′ 43″

045 ●●

Calcula el ángulo que falta.

a) ☐ − 2° 36′ 45″ = 13° 15′ 10″
b) ☐ − 15′ 35″ = 6° 25′ 46″
c) ☐ − 1° 50″ = 3° 48′
d) ☐ − 47′ 58″ = 2° 35′ 40″
e) ☐ − 6° 18′ 40″ = 15° 27′ 38″
f) ☐ − 10° 45′ = 37° 53′ 44″
g) ☐ − 17° 25′ 46″ = 38′ 43″
h) ☐ − 65″ = 1° 48′ 35″

a) 15° 51′ 55″
b) 6° 40′ 81″ = 6° 41′ 21″
c) 4° 48′ 50″
d) 2° 82′ 98″ = 3° 23′ 38″
e) 21° 45′ 78″ = 21° 46′ 18″
f) 47° 98′ 44″ = 48° 38′ 44″
g) 17° 63′ 89″ = 18° 4′ 29″
h) 1° 48′ 100″ = 1° 49′ 40″

046

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES DE SUMA Y RESTA CON PARÉNTESIS?

Realiza esta operación: (39° + 45° 30′) − (6° 38′ − 2° 20′)

PRIMERO. Se resuelven los paréntesis.

$$\begin{array}{rr} & 39^\circ \\ + & 45^\circ\ 30' \\ \hline & 84^\circ\ 30' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 6^\circ\ 38' \\ - & 2^\circ\ 20' \\ \hline & 4^\circ\ 18' \end{array}$$

SEGUNDO. Se efectúan las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

$$\begin{array}{rr} & 84^\circ\ 30' \\ - & 4^\circ\ 18' \\ \hline & 80^\circ\ 12' \end{array}$$

047 ●●

Realiza las siguientes operaciones.

a) (10° 20″ + 15° 30′) − 13° 14′ 35″
b) (50° 35′ − 37° 45′) + 6° 18″
c) (5′ 38″ + 4° 36′) + (5° 10′ − 3° 2″)
d) (25° 35′ + 2° 10′) − (3° + 17° 43′)

a) 12° 15′ 45″
b) 18° 50′ 18″
c) 6° 51′ 36″
d) 7° 2′

Sistema sexagesimal

048 **Calcula.**

a) $(124^\circ\ 34'\ 12'' - 78^\circ\ 47'\ 24'') + 43^\circ$

b) $25^\circ\ 30'\ 6'' + (7^\circ\ 6'' - 1^\circ\ 25'')$

c) $(4^\circ\ 3'\ 5'' + 7^\circ\ 6'\ 3'') - 3^\circ\ 10'\ 15''$

d) $(10^\circ\ 8'\ 2'' - 4^\circ\ 2') + (6^\circ\ 4'\ 23'' - 2^\circ\ 5'')$

a) $88^\circ\ 46'\ 48''$

b) $31^\circ\ 29'\ 47''$

c) $7^\circ\ 58'\ 53''$

d) $10^\circ\ 10'\ 20''$

049 **Efectúa los siguientes productos.**

a) $(4^\circ\ 35'\ 46'') \cdot 2$

b) $(1^\circ\ 10'\ 15'') \cdot 7$

c) $(12^\circ\ 25'\ 37'') \cdot 6$

d) $(35^\circ\ 4'\ 20'') \cdot 4$

e) $(6^\circ\ 78'') \cdot 3$

f) $(36'\ 40'') \cdot 5$

g) $(2^\circ\ 17'\ 3'') \cdot 9$

h) $(27^\circ\ 15'\ 26'') \cdot 8$

a) $8^\circ\ 70'\ 92'' = 9^\circ\ 11'\ 32''$

b) $7^\circ\ 70'\ 105'' = 8^\circ\ 11'\ 45''$

c) $72^\circ\ 150'\ 222'' = 74^\circ\ 33'\ 42''$

d) $140^\circ\ 16'\ 80'' = 140^\circ\ 17'\ 20''$

e) $18^\circ\ 234'' = 18^\circ\ 3'\ 54''$

f) $180'\ 200'' = 3^\circ\ 3'\ 20''$

g) $18^\circ\ 153'\ 27'' = 20^\circ\ 33'\ 27''$

h) $216^\circ\ 120'\ 208'' = 218^\circ\ 3'\ 28''$

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LAS OPERACIONES COMBINADAS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL?

Calcula: $(75^\circ\ 26'\ 16'' - 58^\circ\ 15'\ 10'') \cdot 3$

PRIMERO. Se resuelve el paréntesis.

$$\begin{array}{rrrr} & 75^\circ & 26' & 16'' \\ - & 58^\circ & 15' & 10'' \\ \hline & 17^\circ & 11' & 6'' \end{array}$$

SEGUNDO. Se realizan las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.

$$\begin{array}{rrr} 17^\circ & 11' & 6'' \\ & & \times\ 3 \\ \hline 51^\circ & 33' & 18'' \end{array}$$

051 **Calcula.**

a) $(3^\circ\ 4'\ 6'' + 5^\circ\ 7'\ 10'') \cdot 2$

b) $(10^\circ\ 6'\ 10'' - 4^\circ\ 3'\ 7'') \cdot 3$

c) $(5^\circ\ 30' + 15'\ 65'') \cdot 6$

d) $(6^\circ + 15^\circ\ 10' - 3^\circ\ 7') \cdot 7$

e) $(15^\circ\ 35'\ 45'' - 40'\ 58'') \cdot 4$

f) $(22^\circ\ 5'\ 16'' + 73^\circ\ 16'\ 45'') \cdot 3$

g) Cuádruple de $\hat{A} = 3^\circ\ 36'\ 27''$

h) Doble de $(1^\circ\ 35'\ 5'' + 38'\ 55'')$

i) $(7^\circ + 1^\circ\ 30'' - 5^\circ\ 56'\ 10'') \cdot 7$

a) 16° 22′ 32″
b) 18° 9′ 9″
c) 30° 270′ 390″ = 34° 36′ 30″
d) 126° 21′
e) 56° 216′ 188″ = 59° 39′ 8″
f) 285° 66′ 3″ = 286° 6′ 3″
g) 2° 144′ 108″ = 14° 25′ 48″
h) 2° 146′ 120″ = 4° 28′
i) 14° 28′ 140″ = 14° 30′ 20″

052 ●

Haz las divisiones.

a) (40° 18′ 36″) : 2
b) (39° 57′ 15″) : 3
c) (120° 35′ 80″) : 5
d) (126° 48′ 15″) : 3
e) (111° 54′ 45″) : 3
f) (236° 17′) : 5
g) 288° : 7
h) 152′ : 3
i) (85′ 4″) : 4
j) (86° 5″) : 6

a) 20° 9′ 18″
b) 13° 19′ 5″
c) 24° 7′ 16″
d) 42° 16′ 5″
e) 37° 18′ 15″
f) 47° 15′ 24″
g) 41° 8′ 34,29″
h) 50′ 40″
i) 21′ 16″
j) 14° 20′ 0,8″

053 ●●

Un ángulo que mide 179° 36′ 15″ se divide en tres partes iguales. ¿Cuál es la medida de cada parte?

(179° 36′ 15″) : 3 = 59° 52′ 5″

054 ●●

Dada la medida de los ángulos: $\hat{A} = 15^\circ\ 25'\ 6''$ $\hat{B} = 36^\circ\ 10'\ 20''$ halla la medida de $\hat{C}$, si: $\hat{C} = 2 \cdot (\hat{A} + \hat{B})$

$\hat{C} = 2 \cdot (15^\circ\ 25'\ 6'' + 36^\circ\ 10'\ 20'') = 103^\circ\ 10'\ 52''$

055

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA FRACCIÓN DE UNA MEDIDA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL?

Calcula: $\frac{5}{2}$ (80° 45′)

PRIMERO. Se multiplica la medida por el numerador de la fracción.

$$\begin{array}{r} 80^\circ \quad 45' \\ \times\ 5 \\ \hline 400^\circ\ \ 225' \end{array} \xrightarrow{225' = 3^\circ + 45'} 403^\circ\ \ 45'$$

SEGUNDO. Se divide el resultado obtenido entre el denominador.

$$\begin{array}{rcrcr|l}
403^\circ & & 45' & & & 2 \\ \cline{6-6}
1^\circ & \xrightarrow{1^\circ = 60'} & 60' & & & 201^\circ\ \ 52'\ \ 30'' \\ \cline{3-3}
& & 105' & & & \\
& & 1' & \xrightarrow{1' = 60''} & 60'' & \\
& & & & 60'' & \\ \cline{5-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Sistema sexagesimal

056 ●● **Calcula.**

a) $\frac{2}{3}(3°\ 25'\ 15'')$ c) $\frac{1}{4}(36°\ 29'\ 18'')$

b) $\frac{2}{3}(44°\ 16'\ 40'')$ d) $\frac{7}{6}(27°\ 64'\ 30'')$

a) 2° 16′ 50″
b) 29° 31′ $6,\widehat{6}''$
c) 9° 7′ 19,5″
d) 32° 45′ 15″

057 ●● **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{4}{5}(7°\ 52'\ 13'' + 29°\ 57'')$ c) $\frac{1}{5}(46°\ 27'' - 2°\ 25')$

b) $\frac{4}{3}(37'' + 5°\ 36' - 2°\ 15'\ 10'')$ d) $\frac{1}{6}(125°\ 43'\ 58'' - 1°\ 7'\ 4'')$

a) 29° 30′ 32″
b) 4° 28′ 36″
c) 8° 43′ 5,4″
d) 20° 46′ 9″

058 ●● **Sabiendo la medida de los ángulos:**

$$\hat{A} = 36°\ 45'\ 58'' \qquad \hat{B} = 57°\ 27'\ 37'' \qquad \hat{C} = 29°\ 56'\ 45''$$

realiza estas operaciones.

a) $(\hat{A} - \hat{C}) \cdot 2$ d) $\hat{C} - (7°\ 15'\ 6'') + \hat{A} \cdot 2$

b) $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) : 4$ e) $\hat{C} \cdot 3 - (\hat{B} - \hat{A})$

c) $(\hat{C} + \hat{A}) - (\hat{B} - \hat{A})$ f) $2 \cdot \hat{A} - \hat{B}$

a) 13° 38′ 26″ d) 96° 13′ 35″
b) 31° 2′ 35″ e) 69° 8′ 36″
c) 46° 1′ 4″ f) 16° 4′ 19″

059 ●● **Sergio realiza un trabajo en 1 hora, 35 minutos y 50 segundos. Si pensaba tardar 2 horas, ¿cuánto tiempo le ha sobrado?**

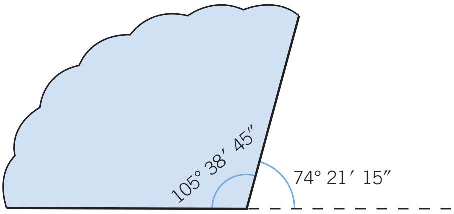
Le han sobrado: 2 h − 1 h 35 min 50 s = 24 min 10 s

060 ●● **El tren de las 10:05 h partió con 16 minutos de retraso. ¿A qué hora salió?**

Salió a las 10 h 5 min + 16 min = 10 h 21 min.

061 ●● **Un abanico abierto forma un ángulo de 180°. Al abrir otro abanico, al que le faltan algunas varillas, he comprobado que solo tiene una abertura de 105° 38′ 45″. ¿Cuál es el ángulo que formaban las varillas que se han roto?**

$180° - 105° 38′ 45″ = 74° 21′ 15″$



062 ●● **Un autobús parte de una estación a las 9 h 26 min y llega a la estación de destino a las 13 h 14 min. ¿Cuánto dura el trayecto?**

El trayecto dura: 13 h 14 min − 9 h 26 min = 3 h 48 min

063

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE ATRASOS HORARIOS?

Un reloj se atrasa 1 min 20 s cada día. ¿Cuánto tiempo se atrasa en una semana?

PRIMERO. Se determinan las operaciones.

(1 min 20 s) · 7

SEGUNDO. Se efectúan las operaciones.

(1 min 20 s) · 7 = 7 min 140 s = 9 min 20 s

El reloj se atrasa 9 min 20 s en una semana.

064 ●●

Lola trabajó el lunes 8 h 40 min 25 s, y de martes a jueves, media hora menos cada día. ¿Cuánto tiempo trabajó en total esta semana?

Lunes: 8 h 40 min 25 s

De martes a jueves:
(8 h 40 min 25 s − 30 min) · 3 = (8 h 10 min 25 s) · 3 = 24 h 31 min 15 s

Total de horas trabajadas:
8 h 40 min 25 s + 24 h 31 min 15 s = 33 h 11 min 40 s

065 ●●

Desde mi casa hasta el trabajo hay dos estaciones; en llegar a la primera suelo tardar 32 min 54 s, y a la segunda, 44 min 27 s. Hoy el tren se ha retrasado, y en llegar a la primera estación ha tardado 19 min 40 s más de lo habitual, mientras que en la segunda se ha retrasado 26 min 32 s.

a) ¿Cuánto tiempo he tardado en llegar?

b) Si en la vuelta no he tenido retrasos, ¿cuánto tiempo he invertido en los dos trayectos?

a) 32 min 54 s + 19 min 40 s + 44 min 27 s + 26 min 32 s = 2 h 3 min 33 s

b) 2 h 3 min 33 s + 32 min 54 s + 44 min 27 s = 3 h 20 min 54 s

066 ●●

Una máquina trabaja de manera ininterrumpida durante 4 h 50 min 30 s, parando después 1 h 50 min. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina en hacer tres turnos de trabajo y descanso?

Un turno de trabajo y descanso es:
4 h 50 min 30 s + 1 h 50 min = 6 h 40 min 30 s

Tres turnos son: (6 h 40 min 30 s) · 3 = 20 h 1 min 30 s

067 ●●

Un pintor ha tardado en pintar el salón 3 horas y cuarto por la mañana, y 2 horas y media por la tarde.

a) ¿Cuánto tiempo tardó en total?

b) ¿Cuánto tiempo trabajó más por la mañana?

c) Si cobra la hora a 19,20 €, ¿cuánto dinero ganó?

a) 3 h 15 min + 2 h 30 min = 5 h 45 min tardó en total.

b) 3 h 15 min − 2 h 30 min = 45 min trabajó más por la mañana.

c) Tardó: 5 h 45 min = 5,75 h
Y ganó: 5,75 · 19,20 = 110,40 €

068 ●●

Damián cobra el sábado 8 € por cada hora de trabajo, y el domingo, 9,50 €. Este mes ha trabajado tres sábados y cuatro domingos. Los sábados trabajó 5 horas y media, y los domingos, 3 horas y tres cuartos. ¿Cuánto cobrará a fin de mes?

Horas de trabajo de los sábados: 5,5 h · 3 = 16,5 h = 16 h 30 min

Salario de los sábados: 16,5 · 8 = 132 €

Horas de trabajo de los domingos: 3,75 h · 4 = 15 h

Salario de los domingos: 15 · 9,50 = 142,50 €

Salario total: 132 + 142,50 = 274,50 €

069 ●●

Marcos, Roberto y Ricardo se están comiendo un pastel:

- **Marcos se ha comido un trozo equivalente a 35° 10′.**
- **Roberto se ha comido un trozo de 40° 30′.**
- **Ricardo se ha comido un trozo de 50° 40′.**

a) ¿Cuánto mide el trozo de pastel que se han comido entre los tres?

b) ¿Cuánto mide el trozo que queda?

a) 35° 10′ + 40° 30′ + 50° 40′ = 126° 20′ mide el trozo de pastel que se han comido entre los tres.

b) 360° − 126° 20′ = 233° 40′ mide el trozo que queda.

Sistema sexagesimal

070 ●●● **Los rayos del sol entran por la mañana en una habitación y se reflejan en la pared con una determinada inclinación. A las 7 de la mañana de un día de verano ese ángulo era de 22° 14′. Cada hora que pasa el ángulo de inclinación aumenta en 2° 10′ 20″.**

a) ¿Qué ángulo tendrá a las 8 de la mañana?

b) ¿Y a las 9 de la mañana?

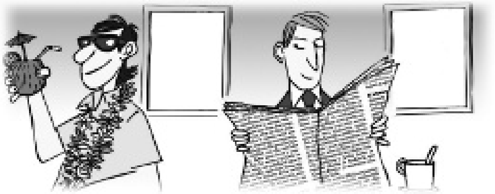
c) ¿Cuál será el ángulo a la 1 del mediodía?

a) 22° 14′ + 2° 10′ 20″ = 24° 24′ 20″

b) 24° 24′ 20″ + 2° 10′ 20″ = 26° 34′ 40″

c) 22° 14′ + (2° 10′ 20″) · 6 = 22° 14′ + 13° 2′ = 35° 16′

071 ●●● **El tiempo transcurrido entre dos equinoccios de primavera consecutivos es lo que se conoce como año trópico, y dura 365 días, 5 horas, 48 minutos y 45,51 segundos.**



En nuestro calendario usamos el año civil, que consta de 365 o 366 días. De esta manera, podemos contar el año en días completos.

a) ¿Cuántos minutos hay de diferencia entre un año trópico y un año civil de 365 días?

b) ¿Cuál es la diferencia, en horas, minutos y segundos, al cabo de 4 años?

a) 5 h 48 min 45,51 s = 348,75 min dura más el año trópico que el año civil de 365 días.

b) 4 años trópicos son:
(365 días 5 h 48 min 45,51 s) · 4 = 1460 días 23 h 15 min 2,04 s
4 años civiles son: 365 · 3 + 366 = 1461 días
Los 4 años civiles duran:
1461 días − 1460 días 23 h 15 min 2,04 s = 44 min 57,96 s más

072 ●●● **El calendario juliano (antecesor del calendario actual) insertaba un día adicional cada 4 años, al que denominaban bisiesto.**

a) ¿Cuál es la diferencia entre 4 años trópicos y 4 años civiles, siendo uno de ellos bisiesto?

b) ¿Cuántos años han de pasar para que el desfase sea de 10 días?

a) 4 años trópicos son:
(365 días 5 h 48 min 45,51 s) · 4 = 1460 días 23 h 15 min 2,04 s
4 años civiles son: 365 · 3 + 366 = 1461 días
Los 4 años civiles duran:
1461 días − 1460 días 23 h 15 min 2,04 s = 44 min 57,96 s más

b) 10 días = 864000 s   44 min 57,96 s = 2697,96 s
864000 s : 2697,96 s = 320,24 períodos de 4 años han de pasar para tener un desfase de 10 días, es decir: 320,24 · 4 = 1280,96 años

073 ●●●

Debido al desfase del calendario juliano, el papa Gregorio XIII mandó reformar el calendario. En el calendario gregoriano, que es el vigente en nuestros días, los años bisiestos son aquellos que son divisibles por 4, excepto los divisibles por 100, pero no por 400 (o sea, el año 2100 no será bisiesto). ¿Cuántos años han de pasar para tener un desfase de un día?

Desfase en 4 años: 44 min 57,96 s

Desfase en 100 años: (44 min 57,96 s) · 25 − 24 h =
= 18 h 44 min 9 s − 24 h = −5 h 15 min 51 s es menor el período civil.

Desfase en 400 años: (−5 h 15 min 51 s) · 4 + 24 h = 2 h 56 min 36 s

1 día = 86 400 s 2 h 56 min 36 s = 10 596 s

Para que haya un desfase de un día han de pasar 86 400 s : 10 596 s = 8,15 períodos de 400 años, es decir: 8,15 · 400 = 3 260 años

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

074 ●●●

Mariano comienza hoy a trabajar en una fábrica de muebles.

Según las condiciones del contrato que ha firmado, trabajará 8 horas diarias, de lunes a viernes. Por ese trabajo recibirá un sueldo fijo mensual de 600 €, al que habrá que añadir:

- **Por cada silla terminada, 2,75 €.**
- **Por cada mesa, 4,50 €.**

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si monta 3 sillas en un día, ¿cuánto dinero cobrará por el montaje de las sillas? ¿Y si monta 4 sillas y 1 mesa?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) El encargado le ha dicho que puede fabricar mesas o sillas según su elección, pero que no podrá ampliar su horario de trabajo, pues las máquinas de montaje solo funcionan 8 horas. ¿Cuántas sillas como máximo puede fabricar al día? ¿Y mesas?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) ¿Cuántas mesas y sillas deberá terminar diariamente para que su trabajo sea lo más rentable posible, y cuál será su sueldo mensual?

a) Montaje de 3 sillas: 3 · 2,75 = 8,25 €
Montaje de 4 sillas y una mesa: 4 · 2,75 + 1 · 4,5 = 15,50 €

b)
- Sillas:
  (1 h 20 min) · 7 = 7 h 140 min = 9 h 20 min > 8 h
  (1 h 20 min) · 6 = 6 h 120 min = 8 h
  Como máximo puede fabricar 6 sillas.
- Mesas:
  (2 h 15 min) · 4 = 8 h 60 min = 9 h > 8 h
  (2 h 15 min) · 3 = 6 h 45 min
  Como máximo puede fabricar 3 mesas.

Le sobra: 8 h − 6 h 45 min = 1 h 15 min

c) Horas en montar una silla: 1 h 20 min = 1,33 h
Horas en montar una mesa: 2 h 15 min = 2,25 h
Por cada hora de trabajo, montando sillas, cobrará: 2,75 : 1,33 = 2,0625 €
Por cada hora de trabajo, montando mesas, cobrará: 4,5 : 2,25 = 2 €
Mariano cobrará más dinero montando sillas.

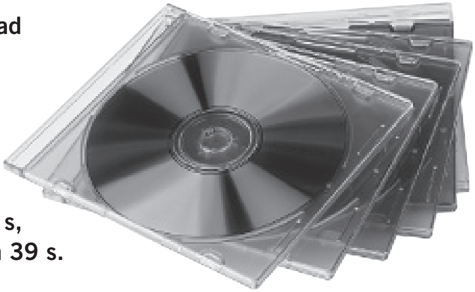
Como el máximo de sillas diario que puede montar es 6, y considerando un mes con 22 días laborables, su sueldo, aproximadamente, será:

600 + 22 · 6 · 2,75 = 600 + 363 = 963 €

075 ●●●

En mi DVD, grabando con una calidad normal, un CD tiene capacidad para 5 horas de grabación.

Tengo un CD en el que he grabado dos películas. La primera, *Las nueces de primavera*, según el menú de grabación dura 93 min 52 s, y la otra, *Al caer las nueces*, 73 min 39 s.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuánto tiempo duran las dos películas? ¿Cuánto espacio queda libre en el CD?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) El espacio que queda libre en el CD lo quiero completar grabando todos los capítulos que pueda de mi serie favorita, *Contando nueces*.

Un capítulo dura 35 minutos, a lo que hay que añadir la publicidad, 18 anuncios, de 20 segundos cada uno. ¿Cuántos capítulos caben en el CD?

c) ¿Cuánto tiempo de grabación sobra?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) La serie tiene 14 capítulos, el resto de los capítulos los voy a grabar en CD de 5 horas y DVD, que son más caros, pero tienen una duración de 8 horas. ¿Cuántos tendré que comprar de cada tipo para que el coste sea lo menor posible?

a) Duración de las dos películas: 93 min 52 s + 73 min 39 s = 167 min 31 s
Duración del CD: 5 h = 300 min
Tiempo restante de grabación tras grabar las películas:
300 min − 167 min 31 s = 132 min 29 s

b) Duración de cada capítulo: 35 min + 18 · 20 s = 35 min 360 s = 41 min
Como quedan 132 min 29 s:
41 · 4 = 164 min > 132 min 29 s
41 · 3 = 123 min
Como máximo se pueden grabar 3 capítulos.

c) Tiempo sobrante: 132 min 29 s − 123 min = 9 min 29 s

d) 8 h = 480 min 480 : 41 = 11,71
En un DVD de 8 horas caben 11 capítulos.
5 h = 300 min 300 : 41 = 7,32
En un CD de 5 horas caben 7 capítulos.
Como quedan por grabar 11 capítulos tenemos que comprar un DVD, o dos CD. Si el precio de un DVD es menor que el doble del precio de un CD, es más conveniente comprar un DVD.

5 Expresiones algebraicas

El templo de Apis

Desde un lugar privilegiado, el escriba Ahmes asistía al interrogatorio dirigido por el juez y el sumo sacerdote del templo, quien había denunciado la desaparición de la comida del buey.

El sacerdote se volvió hacia el juez y dijo:

–¡Al robar toda la comida del dios han cometido un delito imperdonable, y Apis exige que la condena sea máxima!

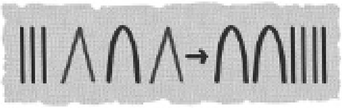
–La ley está escrita y estipula la condena por el acto cometido y la cantidad robada –le replicó el juez sin mirarlo. Y acto seguido volvió a preguntar a los dos detenidos por las cantidades que habían sustraído.

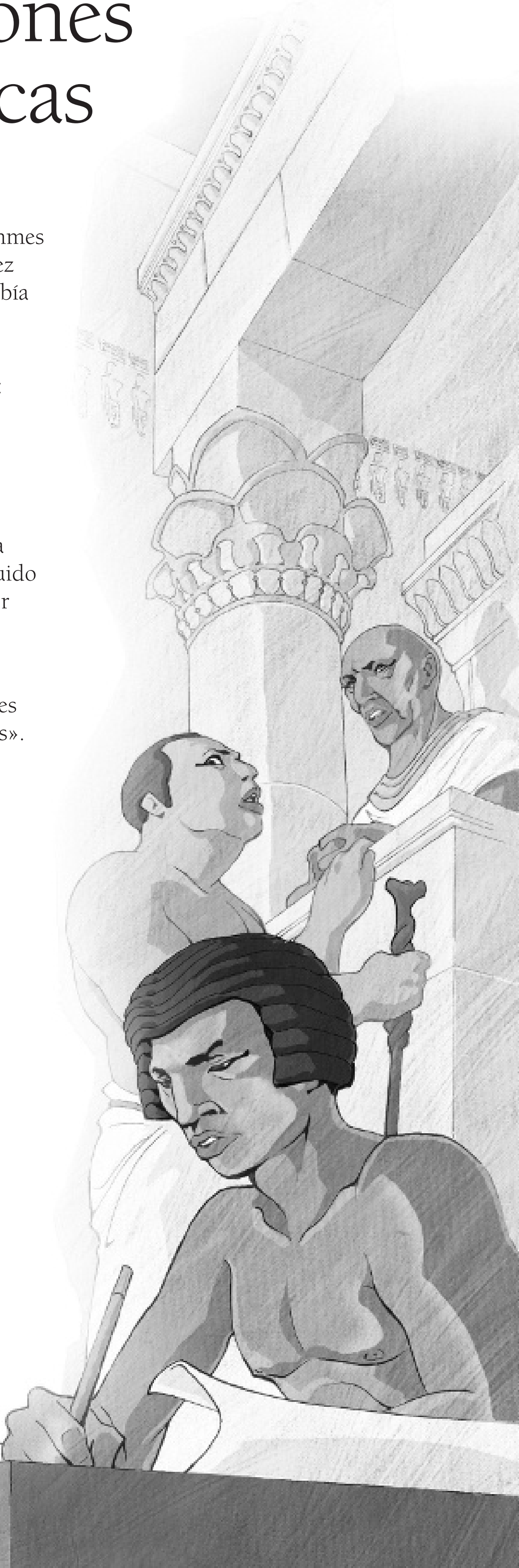
El mayor de ellos le contestó:

–Cada uno tomó lo que pudo: él cogió tres «montones» y yo sustraje diez «montones».

–El registro del templo dice que había 24 heqat destinadas a la reencarnación del dios Apis. Ahmes, anota los datos y calcula la cantidad que sustrajo cada uno –dijo el juez dirigiéndose al escriba, que seguía apuntando en el papiro.

El escriba anotó la siguiente expresión para designar lo sustraído por cada uno.





DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre el papiro de Rhind y otros papiros que se conserven en la actualidad relacionados con las matemáticas.**

Se puede encontrar información sobre el papiro de Rhind en la siguiente página web:
http://aulamagica.wordpress.com/2008/03/30/matematica-en-el-antiguo-egipto-el-papiro-rhind/

Para completar la información sobre el papiro de Rhind y obtener datos sobre otros papiros que se conservan en la actualidad se puede visitar esta página web:
http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-1-egipto.pdf

En ella también figuran datos sobre las matemáticas en Egipto.

2 **¿Cuál es la simbología utilizada por los egipcios para escribir números? ¿Cuál sería el significado de la expresión que aparece en el texto?**

En esta página web se puede obtener información no solo sobre la simbología utilizada por los egipcios, también sobre cómo medían y cómo realizaban operaciones matemáticas:
http://personal.us.es/cmaza/egipto/aritmetica.htm

3 **Investiga sobre las matemáticas en Egipto y las áreas en las que más se desarrollaron.**

En la siguiente página web se puede ampliar toda la información obtenida en los ejercicios anteriores sobre las matemáticas en Egipto:
http://www.ehu.es/aba/div/paseo-06-07.pdf

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Expresa como una sola potencia.**

a) $5^2 \cdot 5^6$
b) $(-3)^3 \cdot (-3)^5$
c) $7^5 : 7^3$
d) $(-2)^{12} \cdot (-2)^8$
e) $[(-5)^2 \cdot (-5)^9]^4$
f) $(4^6 : 4^2)^7$
g) $[(-11)^2 \cdot (-11)^3]^5$
h) $(5^{12} : 5^9)^5$

a) 5^8
b) $(-3)^8$
c) 7^2
d) $(-2)^{20}$
e) $(-5)^{44}$
f) 4^{28}
g) $(-11)^{25}$
h) 5^{15}

2 **Aplica la propiedad distributiva.**

a) $2 \cdot (7 + 3)$
b) $5 \cdot (3 - 1)$
c) $-5 \cdot (6 - 2)$
d) $(7 - 4) \cdot (-2)$
e) $(5 + 3) \cdot (-6)$
f) $(9 + 2) \cdot 5$

a) $2 \cdot (7 + 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$
b) $5 \cdot (3 - 1) = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 1$
c) $-5 \cdot (6 - 2) = (-5) \cdot 6 - (-5) \cdot 2$
d) $(7 - 4) \cdot (-2) = 7 \cdot (-2) - 4 \cdot (-2)$
e) $(5 + 3) \cdot (-6) = 5 \cdot (-6) + 3 \cdot (-6)$
f) $(9 + 2) \cdot 5 = 9 \cdot 5 + 2 \cdot 5$

3 **Calcula el máximo común divisor de:**

a) 24 y 30 **b) 15, 18 y 25** **c) 8, 24 y 64**

a) $24 = 2^3 \cdot 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ m.c.d. $(24, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

b) $15 = 3 \cdot 5$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $25 = 5^2$ m.c.d. $(24, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

c) $8 = 2^3$ $24 = 2^3 \cdot 3$ $64 = 2^6$ m.c.d. $(8, 24, 64) = 2^3 = 8$

EJERCICIOS

001 **Expresa en lenguaje algebraico.**

a) El doble de un número.

b) El doble de un número menos tres unidades.

c) El doble de un número menos tres unidades, más otro número.

d) El doble de un número menos tres unidades, más otro número, menos la tercera parte del primer número.

e) El doble de un número menos tres unidades, más otro número, menos la tercera parte del primer número, más la mitad del segundo.

a) $2x$

b) $2x - 3$

c) $2x - 3 + y$

d) $2x - 3 + y - \dfrac{x}{3}$

e) $2x - 3 + y - \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}$

002 **Si *x* es la edad de Inés, expresa en lenguaje algebraico.**

a) La edad que tendrá dentro de 10 años.

b) La edad que tenía hace 4 años.

a) $x + 10$ b) $x - 4$

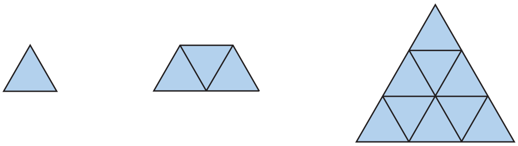
003 **Expresa con lenguaje algebraico.**

a) La propiedad conmutativa de la suma de dos números.

b) El teorema de Pitágoras.

a) $x + y = y + x$ b) $a^2 = b^2 + c^2$

004 **Observa la secuencia.**



a) ¿Cuántos triángulos habrá en la figura que ocupa el lugar 8?

b) ¿Y la figura que ocupa el lugar 15?

a)
- Primera: $3^{1-1} = 1$ triángulo
- Segunda: $3^{2-1} = 3$ triángulos
- Tercera: $3^{3-1} = 9$ triángulos
- Octava: $3^{8-1} = 2\,187$ triángulos

b)
- Figura que ocupa el lugar 15: $3^{15-1} = 4\,782\,969$ triángulos

005 **Escribe los cinco primeros números que siguen estas regularidades.**

a) $3(n^2 + 1)$ **b)** $n^3 - 2$

a) $n = 1 \rightarrow 3 \cdot (1^2 + 1) = 6$
$n = 2 \rightarrow 3 \cdot (2^2 + 1) = 15$
$n = 3 \rightarrow 3 \cdot (3^2 + 1) = 30$
$n = 4 \rightarrow 3 \cdot (4^2 + 1) = 51$
$n = 5 \rightarrow 3 \cdot (5^2 + 1) = 78$

b) $n = 1 \rightarrow 1^3 - 2 = -1$
$n = 2 \rightarrow 2^3 - 2 = 6$
$n = 3 \rightarrow 3^3 - 2 = 25$
$n = 4 \rightarrow 4^3 - 2 = 62$
$n = 5 \rightarrow 5^3 - 2 = 123$

006 **Expresa en lenguaje algebraico el número que ocupa el lugar *n* de estas sucesiones numéricas.**

a) 3, 7, 11, 15, ... **b) 2, 8, 18, 32, ...**

a) $4n - 1$
b) $2n^2$

007 **Calcula el valor numérico de estas expresiones algebraicas para $x = 3$.**

a) $x + 1$ **c)** $2x - 3$
b) $x^2 + 1$ **d)** $2x^2 - 3x$

a) $3 + 1 = 4$
b) $3^2 + 1 = 10$
c) $2 \cdot 3 - 3 = 3$
b) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 2 = 9$

008 **Halla el valor numérico de $2x^2 - y$ para estos valores.**

a) $x = 0, y = 1$ **b)** $x = -1, y = -2$

a) $2 \cdot 0^2 - 1 = -1$
b) $2 \cdot (-1)^2 - (-2) = 4$

009 **Indica mediante una expresión algebraica el perímetro y el área de un cuadrado de lado *x*. Halla su valor numérico cuando el lado mide:**

a) 4 cm **b) 5 cm** **c) 6 cm**

$P = 4x$ $A = x^2$

a) $P = 16$ cm $A = 16$ cm^2
b) $P = 20$ cm $A = 25$ cm^2
c) $P = 24$ cm $A = 36$ cm^2

010 **¿Cuánto debe valer *b* para que el valor numérico de la expresión $\frac{a - 4}{2} + b$, para $a = -4$, sea 0?**

$$\frac{-4 - 4}{2} + b = 0 \rightarrow b = 4$$

011 **Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.**

a) $7x^2yz$

b) $-2xy^3z^2$

c) $15x^2$

d) $8xy^2$

e) $3abc$

f) $-4a^2bc^4$

g) $9m^2$

h) 6

a) Coeficiente: 7	Parte literal: x^2yz	Grado: 4
b) Coeficiente: -2	Parte literal: xy^3z^2	Grado: 6
c) Coeficiente: 15	Parte literal: x^2	Grado: 2
d) Coeficiente: 8	Parte literal: xy^2	Grado: 3
e) Coeficiente: 3	Parte literal: abc	Grado: 3
f) Coeficiente: -4	Parte literal: a^2bc^4	Grado: 7
g) Coeficiente: 9	Parte literal: m^2	Grado: 2
h) Coeficiente: 6	Sin parte literal	Grado: 0

012 **Escribe los monomios opuestos.**

a) $4abc^2$ **b)** $-5xy^2z$ **c)** $3x^3y$ **d)** $-2a^2b^3c$

a) $-4abc^2$

b) $5xy^2z$

c) $-3x^3y$

d) $2a^2b^3c$

013 **Indica el grado de los monomios semejantes a:**

a) $-xy^2$ **b)** $-5xy$ **c)** x^3 **d)** $6x^3$

a) Grado: 3

b) Grado: 2

c) Grado: 3

d) Grado: 3

014 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $5x + 2x$

b) $-3y^2 + 4y^2$

c) $2ab^2 - a^2b$

d) $-4x^3 \cdot 2x$

e) $\frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{3}{4}a^2$

f) $9a : 3a$

g) $-10x^3y^2 : x^2y$

h) $5x^2 + 7x$

i) $4x - 5xy$

j) $-3x + 4y^2$

k) $10x^3 : 2xy^2$

a) $7x$

b) y^2

c) $2ab^2 - a^2b$

d) $-8x^4$

e) $\frac{3}{8}a^5$

f) 3

g) $-10xy$

h) $5x^2 + 7x$

i) $4x - 5xy$

j) $-3x + 4y^2$

k) $\frac{5x^2}{y^2}$

015 **Resuelve estas operaciones.**

a) $5x^3 - 6x + 7x - x^3 - x + 4x^3$ **b)** $2x^2 \cdot x^3 \cdot 3x^5 : (-6x)$

a) $8x^3$ b) $-x^9$

016 **Calcula.**

a) $8x^4 : (2x^2 + 2x^2)$ **b)** $(5y^3 - 2y^3) : (3xy^2)$

a) $8x^4 : 4x^2 = 2x^2$ b) $3y^3 : 3xy^2 = \frac{y}{x}$

017 **Reduce los términos semejantes en estos polinomios, ordena sus términos, de mayor a menor grado, e indica el grado de cada polinomio.**

a) $P(x) = 5x^3 - x + 7x^3 - x^2 + 8x - 2$
b) $Q(x) = 12 + x^2 + 7x - x^4 - 8 + 3x^2$
c) $R(x) = 9x - 4x^2 - 6 - 10x + 1$
d) $S(x) = 4x^2 - x^3 + 4x^3 - x^5 + 8 - x^2$

a) $P(x) = 12x^3 - x^2 + 7x - 2$ → Grado: 3
b) $Q(x) = -x^4 + 4x^2 + 7x + 4$ → Grado: 4
c) $R(x) = -4x^2 - x - 5$ → Grado: 2
d) $S(x) = -x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 8$ → Grado: 5

018 **Calcula el valor numérico de estos polinomios para $x = -3$.**

a) $Q(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ **b)** $R(x) = -5 + 7x + \frac{3x}{2}$

a) $Q(-3) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot (-3) = 5$
b) $R(-3) = -5 + 7 \cdot (-3) + \frac{3 \cdot (-3)}{2} = \frac{-61}{2}$

019 **Halla el valor de a para que el polinomio $P(x) = ax^2 - 3x + 5$ cumpla que $P(2) = 3$.**

$P(2) = a \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 4a - 6 + 5 = 3 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$

020 **Realiza las siguientes operaciones con estos polinomios:**

$P(x) = x^2 - 3x + 7$ $S(x) = 8x - 2$
$Q(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 3$ $R(x) = 7x^2 + 4$

a) $Q(x) + S(x)$ **c)** $2 \cdot Q(x)$
b) $R(x) - P(x)$ **d)** $P(x) \cdot 7$

a) $Q(x) + S(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 3 + 8x - 2 = 5x^3 - 6x^2 + 9x - 5$
b) $R(x) - P(x) = 7x^2 + 4 - (x^2 - 3x + 7) = 6x^2 + 3x - 3$
c) $2 \cdot Q(x) = 2 \cdot (5x^3 - 6x^2 + x - 3) = 10x^3 - 12x^2 + 2x - 6$
d) $P(x) \cdot 7 = (x^2 - 3x + 7) \cdot 7 = 7x^2 - 21x + 49$

021 **Calcula, con los polinomios anteriores.**

a) $(P(x) - R(x)) \cdot 2$ **b) $(R(x) - Q(x)) \cdot (-6)$**

a) $(P(x) - R(x)) \cdot 2 = (x^2 - 3x + 7 - (7x^2 + 4)) \cdot 2 =$
$= (-6x^2 - 3x + 3) \cdot 2 = -12x^2 - 6x + 6$

b) $(R(x) - Q(x)) \cdot (-6) = (7x^2 + 4 - (5x^3 - 6x^2 + x - 3)) \cdot (-6) =$
$= (-5x^3 + 13x^2 - x + 7) \cdot (-6) = 30x^3 - 78x^2 + 6x - 42$

022 **Indica, sin operar, el grado y el número de términos del polinomio $[(x^2 + x + 3) - (x^4 + 7x)] \cdot 5$.**

Grado: 4 Número de términos: 4

023 **Realiza estas operaciones.**

a) $(18x^5 - 10x^4 + 6x^2) \cdot (-2x)$
b) $(12x^4 - 24x^3 + x^2) \cdot 3x^2$
c) $(6x^2 - 8x + 3) \cdot (3x - 1)$
d) $(-x^3 + 4x^2 - 5) \cdot (-x - 1)$
e) $(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$

a) $-36x^6 + 20x^5 - 12x^3$
b) $36x^6 - 72x^5 + 3x^4$
c) $18x^3 - 24x^2 + 9x - 6x^2 + 8x - 3 = 18x^3 - 30x^2 + 17x - 3$
d) $x^4 - 4x^3 + 5x + x^3 - 4x^2 + 5 = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 5$
e) $x^3 - 1$

024 **Haz la siguiente operación:**

$$[(30a^2b - 15ab^2 + 5a^2b^2) \cdot (-a - b)] \cdot ab$$

$(-30a^3b - 15a^2b^2 - 5a^3b^2 + 15ab^3 - 5a^2b^3) \cdot ab =$
$= -30a^4b^2 - 15a^3b^3 - 5a^3b^3 + 15a^2b^4 - 5a^3b^4$

025 **Calcula el valor de a para que: $(2x^2 + x - 3) \cdot a = 2x^4 + x^3 - 3x^2$**

$2x^2a + xa - 3a = 2x^4 + x^3 - 3x^2 \rightarrow a = x^2$

026 **Realiza estas operaciones.**

a) $(12x^5 - 18x^4 - 9x^2 + 21x - 27) : 3$
b) $(5x^5 - 20x^3 - 45x^2 + 55x) : 5$
c) $(7x^3 - 21x^2 + 42x) : (-7x)$
d) $(-8x^3y + 12xy) : (2x)$
e) $(18x^4y^3 + 3xy) : (2x)$

a) $4x^5 - 6x^4 - 3x^2 + 7x - 9$
b) $x^5 - 4x^3 - 9x^2 + 11x$
c) $-x^2 + 3x - 6$
d) $-4x^2y + 6y$
e) $9x^3y^3 + \frac{3}{2}y$

027 **Halla el resultado de esta operación.**

$$[(45xy^3 - 20xy) : 5xy] \cdot (-3x^2y)$$

$$[(45xy^3 - 20xy) : 5xy] \cdot (-3x^2y) = (9y^2 - 4) \cdot (-3x^2y) = -27x^2y^3 + 12x^2y$$

028 **Calcula el valor de *a* para que se cumpla:**

$$(12x^3 + 9x^2 - 21x) : a = -4x^2 - 3x + 7$$

$a = -3x$

029 **Determina si se puede sacar factor común, y hazlo en los casos en los que sea posible.**

a) $-5x^4 + 2x^3$
b) $3x^2 + 6x^2 - 9x^3$
c) $3x^2 - 3x + 3$
d) $x^6 - x^3$
e) $7x^2 - 4y^2$
f) $3x^2 + 2$
g) $12x - 4y$
h) $5x^2 - 10$

a) $x^3 \cdot (-5x + 2)$
b) $9x^2 \cdot (1 - x)$
c) $3 \cdot (x^2 - x + 1)$
d) $x^3 \cdot (x^3 - 1)$
e) No es posible.
f) No es posible.
g) $4 \cdot (3x - y)$
h) $5 \cdot (x^2 - 2)$

030 **Saca factor común en estas expresiones.**

a) $5a^3b^3 + 10a^2b^2$
b) $a^4b^2 - a^2b^2$

a) $5a^2b^2 \cdot (ab + 2)$
b) $a^2b^2 \cdot (a^2 - 1)$

031 **Calcula *a* para que el factor común de $yx^5 + 4y^2x^3 - 6y^3x^a$ sea yx^2.**

$a = 2$

032 **Calcula los cuadrados de estas sumas y diferencias.**

a) $(4x + 5)^2$
b) $(x^2 + 7x)^2$
c) $(x^3 + 3x^2)^2$
d) $\left(\frac{5x}{6} + \frac{2}{7}\right)^2$
e) $(3a - 5b)^2$
f) $(8 - 3x)^2$
g) $(x^2 - x^3)^2$
h) $\left(\frac{x}{4} - \frac{2x}{3}\right)^2$

a) $16x^2 + 40x + 25$
b) $x^4 + 14x^3 + 49x^2$
c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4$
d) $\frac{25x^2}{36} + \frac{10x}{21} + \frac{4}{49}$
e) $9a^2 - 30ab + 25b^2$
f) $64 - 48x + 9x^2$
g) $x^4 - 2x^5 + x^6$
h) $\left(-\frac{5x}{12}\right)^2 = \frac{25x^2}{144}$

033 **Corrige los errores cometidos.**

a) $(7x + 2)^2 = 7x^2 + 4$
b) $(6x^4 - 4)^2 = 36x - 8x + 16$

a) $(7x + 2)^2 = 49x^2 + 28x + 4$
b) $(6x^4 - 4)^2 = 36x^8 - 48x^4 + 16$

034 **Expresa este polinomio como una suma de cuadrados:** $x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

035 **Expresa estos productos como una diferencia de cuadrados.**

a) $(x + 4)(x - 4)$
b) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
c) $(3 - 2x)(3 + 2x)$
d) $\left(\frac{x}{3} + 5\right)\left(\frac{x}{3} - 5\right)$
e) $\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3}\right)$

a) $x^2 - 16$
b) $x^4 - 1$
c) $9 - 4x^2$
d) $\frac{x^2}{9} - 25$
e) $\frac{1}{4} - \frac{x^4}{9}$

036 **Estudia si los polinomios se pueden expresar como el cuadrado de una suma o diferencia.**

a) $x^2 + 10x + 25$
b) $4 + 12x + 9x^2$
c) $x^6 - 12x^5 + 36x^4$
d) $18x - 9 + 9x^2$

a) $(x + 5)^2$
b) $(2 + 3x)^2$
c) $(x^3 - 6x^2)^2$
d) No es posible.

c)

037 **Expresa este polinomio como un producto:** $x^4 - x^3 + \frac{x^2}{4}$

$\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2$

ACTIVIDADES

038 **Expresa en lenguaje algebraico.**

a) El doble de un número más 5.
b) El triple de un número menos 6.
c) El doble de la suma de un número más 4.
d) La mitad de la diferencia de un número menos 8.
e) El cuadrado de la suma de un número más 7.
f) El cubo de la mitad de un número.

a) $2x + 5$

b) $3x - 6$

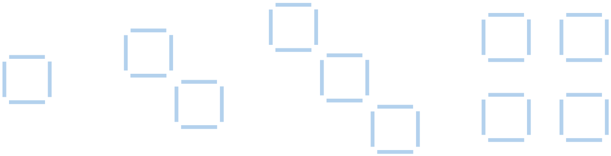
c) $2(x + 4)$

d) $\frac{x - 8}{2}$

e) $(x + 7)^2$

f) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$

039 **Observa la secuencia.**



a) ¿Cuántos palitos habrá en la figura que ocupa el lugar 9? ¿Y en la del lugar 13?
b) ¿Y en la figura que ocupa el lugar *n*?

a)
- Primera figura: $4 \cdot 1 = 4$ palillos
- Segunda figura: $4 \cdot 2 = 8$ palillos
- Tercera figura: $4 \cdot 3 = 12$ palillos
- Novena figura: $4 \cdot 9 = 36$ palillos
- Figura que ocupa el lugar 13: $4 \cdot 13 = 52$ palillos

b)
- Figura que ocupa el lugar n: $4 \cdot n$ palillos

040 **Escribe los seis primeros números que siguen estas regularidades.**

a) $3n^2$ **b) $-n^3$**

a) $n = 1 \rightarrow 3 \cdot 1^2 = 3$
$n = 2 \rightarrow 3 \cdot 2^2 = 12$
$n = 3 \rightarrow 3 \cdot 3^2 = 27$
$n = 4 \rightarrow 3 \cdot 4^2 = 48$
$n = 5 \rightarrow 3 \cdot 5^2 = 75$
$n = 6 \rightarrow 3 \cdot 6^2 = 108$

b) $n = 1 \rightarrow -1^3 = -1$
$n = 2 \rightarrow -2^3 = -8$
$n = 3 \rightarrow -3^3 = -27$
$n = 4 \rightarrow -4^3 = -64$
$n = 5 \rightarrow -5^3 = -125$
$n = 6 \rightarrow -6^3 = -216$

041 ●●

Transforma estas expresiones algebraicas en enunciados.

a) $4x - 2$

b) $5 - 2x$

c) $2x^3$

d) $\frac{x+3}{4}$

e) $(x+2)^2$

f) $x^2 - 4$

g) $3x - \frac{x}{2}$

h) $(2x - 1)^2$

i) $(2x)^2 - 1$

a) El cuádruple de un número menos 2.

b) El número 5 menos el doble de un número.

c) El doble del cubo de un número.

d) La cuarta parte de la suma de un número más 3.

e) El cuadrado de la suma de un número más 2.

f) El cuadrado de un número menos 4.

g) El triple de un número menos su mitad.

h) El cuadrado de la resta del doble de un número menos 1.

i) El cuadrado del doble de un número menos 1.

042 **HAZLO ASÍ**

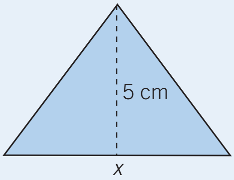
¿CÓMO SE EXPRESAN ALGEBRAICAMENTE ALGUNAS RELACIONES GEOMÉTRICAS?

Escribe, mediante una expresión algebraica, la superficie de un triángulo isósceles cuya altura mide 5 cm.

PRIMERO. Se nombran todos los elementos que intervienen en el cálculo de la superficie. A los elementos desconocidos se les designa mediante una letra.

SEGUNDO. Se escribe la fórmula correspondiente.

$$A = \frac{x \cdot 5}{2} = \frac{5x}{2}$$



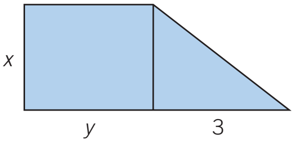
043 ●●

Si la base de un triángulo es 4 cm, escribe la expresión algebraica que representa su superficie.

x: altura → $A = \frac{4x}{2} = 2x$

044 ●●

Expresa de forma algebraica la superficie de esta figura.



$$A = xy + \frac{3x}{2}$$

045 ●

Calcula el valor numérico de la expresión $2x - 3$ para estos valores de x.

a) $x = 1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = -2$ **d)** $x = \frac{1}{2}$

a) $2 \cdot 1 - 3 = -1$

c) $2 \cdot (-2) - 3 = -7$

b) $2 \cdot 0 - 3 = -3$

d) $2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2$

046 ●

Determina el valor numérico de la expresión $3x^2 - 2y + 4$ para los valores de x e y:

a) $x = 1, y = -2$ **b)** $x = -1, y = -3$

a) $3 \cdot 1^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 11$

b) $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-3) + 4 = 13$

047 ●●

Halla el valor de a en la expresión $4x^3 + 3x^2 - ax - 5$, sabiendo que su valor numérico para $x = -1$ es 0.

$4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - a \cdot (-1) - 5 = 0 \rightarrow -4 + 3 + a - 5 = 0 \rightarrow a = 6$

048 ●●

Calcula el valor de a en la expresión $-2x^2 - 3x - a$ si su valor numérico para $x = 3$ es -5.

$-2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - a = -5 \rightarrow -18 - 9 - a = -5 \rightarrow a = -22$

049 ●

Copia y completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$\mathbf{-8xyz^2}$	-8	xyz^2	4
$\mathbf{3a^2b^4}$	3	a^2b^4	6
$4x^3y^2$	**4**	$\mathbf{x^3y^2}$	**5**
$-9a^2bc$	$\mathbf{-9}$	$\mathbf{a^2bc}$	**4**
z^6	**1**	$\mathbf{z^6}$	**6**

050 ●

Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Razona tu respuesta.

a) $12ab$ **y** $-2ab$ **son semejantes.**

b) $7xyz$ **y** $-7xy$ **son opuestos.**

c) $7xy^2z$ **y** $-7x^2yz$ **son semejantes y opuestos.**

a) Verdadera, ya que tienen la misma parte literal.

b) Falsa, pues no tienen la misma parte literal.

c) Falsa, porque no tienen la misma parte literal.

051 ●●

Escribe, si es posible.

a) Dos monomios de grado 5 que sean semejantes y no opuestos.

b) Dos monomios de grado 5 que sean opuestos y no semejantes.

c) Dos monomios de grado 5 que sean semejantes y opuestos.

a) Es posible. Por ejemplo: $3x^5$ y $6x^5$

b) No es posible, ya que si son opuestos serán semejantes.

c) Es posible. Por ejemplo: $3x^2y^3$ y $-3x^2y^3$

052 ●

Haz estas operaciones de monomios.

a) $-x^2 + x + x^2 + x^3 + x$

b) $2x^3 - (x^3 - 3x^3)$

c) $8x^2 - x + 9x + x^2$

d) $8xy^2 - 5x^2y + x^2y - xy^2$

e) $-3x + 7y - (8y + y - 6x)$

f) $\frac{4}{3}xy - \frac{5}{2}xy + \frac{7}{4}xy - xy$

g) $2x^2 \cdot 4x^3 \cdot 5x^6$

h) $-3x \cdot (-2x) \cdot \frac{7}{4}x$

i) $7x^3 \cdot 5x \cdot 9x^4$

j) $15x^3 : 5x^2$

k) $-8x^3y^2 : 2x^2y$

l) $10x^4yz^2 : 5xyz$

a) $x^3 + 2x$

b) $4x^3$

c) $9x^2 + 8x$

d) $7xy^2 - 4x^2y$

e) $3x - 2y$

f) $-\frac{3}{4}xy$

g) $40x^{11}$

h) $\frac{21}{2}x^3$

i) $315x^8$

j) $3x$

k) $-4xy$

l) $2x^3z$

053 ●●

Razona si las igualdades son verdaderas o falsas, y corrige los errores cometidos.

a) $a + a = 2a$

b) $2a + a = 2a^2$

c) $2a - a = 2$

d) $2a - 2 = a$

e) $2a - b = 2 \cdot (a - b)$

f) $2a + 3a = 5a$

g) $2a + 3b = 5ab$

h) $2a^2 = 4a$

a) Verdadera

b) Falsa: $2a + a = 3a$

c) Falsa: $2a - a = a$

d) Falsa: $2a - 2 = 2 \cdot (a - 1)$

e) Falsa: $2a - 2b = 2 \cdot (a - b)$

f) Verdadera

g) Falsa: $2a + 3b = 2a + 3b$

h) Falsa: $2a^2 = 2a^2$

054 ●●

Escribe $12x^2y$ como:

a) Suma y/o resta de tres monomios.

b) Producto de tres monomios.

c) Cociente de dos monomios.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $3x^2y + 5x^2y + 4x^2y$ b) $2x \cdot 2y \cdot 3x$ c) $24x^2y^2 : 2y$

055 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN OPERACIONES COMBINADAS DE MONOMIOS?

Resuelve: $8x^2 - (5x^4 + x^4) : 2x^2 + 15x^4 : (3x \cdot x)$

PRIMERO. Se resuelven las operaciones que hay entre paréntesis.

$$8x^2 - (5x^4 + x^4) : 2x^2 + 15x^4 : (3x \cdot x) = 8x^2 - 6x^4 : 2x^2 + 15x^4 : 3x^2$$

SEGUNDO. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.

$$8x^2 - 6x^4 : 2x^2 + 15x^4 : 3x^2 = 8x^2 - 3x^2 + 5x^2$$

TERCERO. Se resuelven las sumas y restas en el mismo orden.

$$8x^2 - 3x^2 + 5x^2 = 5x^2 + 5x^2 = 10x^2$$

056 ●● **Opera y reduce.**

a) $12x \cdot 3x^2 : x + 14x \cdot x^3 : 7x^2$
b) $16x \cdot x^3 : (-4) + 9x^5 : x^4 \cdot (-3x^3)$
c) $3x^2 \cdot (10 \cdot 5x^3) - 10x^4 \cdot 6x^2 : 2x$
d) $(5x^2 - 2x^2 + 7x^2) \cdot (4x^3 - x^3 + 6x^3)$
e) $(-4xy^2 + 9xy^2) : (3xy + 2xy)$
f) $(x^3 - 8x^3 + 4x^3) \cdot (y - 3y + 5y)$

a) $36x^2 + 2x^2 = 38x^2$
b) $-4x^4 - 27x^4 = -31x^4$
c) $150x^5 - 30x^5 = 120x^5$
d) $10x^2 \cdot 9x^3 = 90x^5$
e) $5xy^2 : 5xy = y$
f) $(-3x^3) \cdot (3y) = -9x^3y$

057 ● **Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones referidas a $2x + 3$.**

a) 3 es el coeficiente de *x*.
b) 3 es el término independiente.
c) Hay tres términos.
d) La *x* es la incógnita.

a) Falsa, es 2.
b) Verdadera
c) Falsa, hay dos términos.
d) Verdadera

058 ● **Señala los términos, coeficientes, variables y grados de estos polinomios.**

a) $2x + 3y - 2$
b) $5 - 2x + 8y - 3x^2$
c) $2a + 2b + 3c$
d) $7 + 5t - 2z^2 - 3y$

a) Términos: $2x$, $3y$, -2
Coeficientes: 2, 3, -2
Variables: x, y
Grado: 1

b) Términos: 5, $-2x$, $8y$, $-3x^2$
Coeficientes: 5, -2, 8, -3
Variables: x, y
Grado: 2

c) Términos: $2a$, $2b$, $3c$
Coeficientes: 2, 2, 3
Variables: a, b, c
Grado: 1

d) Términos: 7, $5t$, $-2z^2$, $-3y$
Coeficientes: 7, 5, -2, -3
Variables: t, z, y
Grado: 2

059 **Identifica estos elementos de los polinomios.**

a) Número de términos de $x^3 - x^2 + 4x + 5x^4 - 6$.

b) Término independiente de $y + 3y^4 - 3y^3$.

c) Grado de $R(x, y) = 5x^3y^2 + 6y^4 - 3x^4y^3 + 8x^2$.

d) Coeficientes de $\frac{7 - 2x + 10x^3}{3}$.

a) 5 b) 0 c) 7 d) $\frac{7}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{10}{3}$

060 **Escribe un polinomio de una variable, con grado 7, que tenga 6 términos y cuyo término independiente sea −2.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x^7 + 3x^6 - 2x^5 + x^4 + 5x^2 - 2$

061 **Indica el grado de los polinomios.**

a) $5x^2 - 2xy^2$

b) $8a^3b^2 + 5a^2b^3c$

c) $4x^2 + 5x^2y^2 - 10xy$

d) $a^2bc - 2abc + 6a^2b^3$

a) 3 b) 6 c) 4 d) 5

062 **Calcula el valor numérico de estas expresiones para los valores $n = 1$ y $n = -2$.**

a) $3n^2 + 4n$

b) $n(n + 3)$

c) $n^2 - 1$

d) $n^2(n + 2)$

a) $n = 1 \longrightarrow 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7$
$n = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4$

b) $n = 1 \longrightarrow 1 \cdot (1 + 3) = 4$
$n = -2 \rightarrow (-2) \cdot (-2 + 3) = -2$

c) $n = 1 \longrightarrow 1^2 - 1 = 0$
$n = -2 \rightarrow (-2)^2 - 1 = 3$

d) $n = 1 \longrightarrow 1^2 \cdot (1 + 2) = 3$
$n = -2 \rightarrow (-2)^2 \cdot (-2+2) = 0$

063 **Si $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$, calcula.**

a) $P(1) + P(0) - P(-2)$ **b) $2 \cdot P(2) + 3 \cdot (-P(-1))$** **c) $P\left(\frac{1}{2}\right)$**

a) $P(1) + P(0) - P(-2) = -3 + (-5) - 63 = -71$

b) $2 \cdot P(2) + 3 \cdot (-P(-1)) = 2 \cdot 31 + 3 \cdot (-1) = 59$

c) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-77}{16}$

064 ●●

Halla el valor de a para que el polinomio sea de grado 2.

$$P(x) = (2a + 4)x^3 - 3x + 4x^2 - 7$$

Para que el polinomio sea de grado 2: $2a + 4 = 0 \rightarrow a = -2$

065 ●●

Obtén el valor de a y b para que el polinomio tenga grado 3 y su término independiente sea 15.

$$P(x) = 3x^2 - (5 + a)x + x^3 - 3b$$

El polinomio siempre tendrá grado 3, ya que el coeficiente de grado 3 es 1.

Para que el término independiente sea 15: $-3b = 15 \rightarrow b = -5$

El valor de a no afecta al término independiente ni al grado,
por lo que puede ser cualquier valor.

066 ●●

Calcula el valor de a para que $P(1) = 2$ si $P(x) = ax^3 - 3x^2 + 4x - 7$.

Si $P(1) = 3 - 5 + a + 1 = 2$, entonces $a = 3$.

067 ●

Con estos polinomios, calcula.

$$A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 7$$
$$B(x) = x^3 + 7x^2 - 4x$$
$$C(x) = -2x^2 + x - 5$$

a) $A(x) + B(x) + C(x)$

b) $B(x) + C(x)$

c) $A(x) - B(x)$

d) $A(x) - B(x) - C(x)$

a) $3x^3 + 2x^2 - 2x - 12$

b) $x^3 + 5x^2 - 3x - 5$

c) $x^3 - 10x^2 + 5x - 7$

d) $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$

068 ●●

Halla dos polinomios cuya suma sea $4x^3 - 6x^2 + 7x - 2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 7$

069 ●●

Copia y completa.

a) $6x^2 - 4x + 7 + \square = 3x + 2$

b) $5x^3 + 3x^2 - 10 - \square = x - x^2 + 7$

c) $9x^3 + x^2 - 6x + 4 + \square = 2x^2 - x^3 + x$

a) $-6x^2 + 7x - 5$

b) $(5x^3 + 4x^2 - x - 17)$

c) $-10x^3 + x^2 + 7x - 4$

070 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(3x + 4) \cdot 2$

b) $(x - 2) \cdot 4x$

c) $(4x^2 + x - 2) \cdot (-5)$

d) $(x^2 + 3x - 6) \cdot (-3x^3)$

a) $6x + 8$

b) $4x^2 - 8x$

c) $-20x^2 - 5x + 10$

d) $-3x^5 - 9x^4 + 18x^3$

071 Opera y reduce términos semejantes.

a) $(x + 3) \cdot (x - 2)$

b) $(2x - 6) \cdot (3x + 5)$

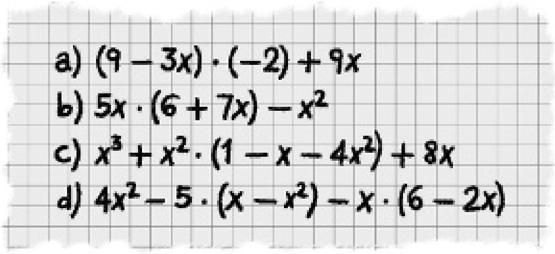
c) $(4 - 6x + 3x^2) \cdot (-2 - x + x^2)$

a) $x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$

b) $6x^2 + 10x - 18x - 30 = 6x^2 - 8x - 30$

c) $-8 - 4x + 4x^2 + 12x + 6x^2 - 6x^3 - 6x^2 - 3x^3 + 3x^4 =$
$= 3x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 8x - 8$

072 Opera y reduce términos semejantes.



a) $(9 - 3x) \cdot (-2) + 9x$

b) $5x \cdot (6 + 7x) - x^2$

c) $x^3 + x^2 \cdot (1 - x - 4x^2) + 8x$

d) $4x^2 - 5 \cdot (x - x^2) - x \cdot (6 - 2x)$

a) $-18 + 6x + 9x = -18 + 15x$

b) $30x + 35x^2 - x^2 = 34x^2 + 30x$

c) $x^3 + x^2 - x^3 - 4x^4 + 8x = -4x^4 + x^2 + 8x$

d) $4x^2 - 5x + 5x^2 - 6x + 2x^2 = 11x^2 - 11x$

073 Efectúa las siguientes divisiones.

a) $(25a - 15) : 5$

b) $(12a^2 - 18a + 69) : 6$

c) $(10a^4 - 20a^3 - 4a^2) : 2a$

d) $(16a^4 : 4a^2) : 2a$

a) $5a - 3$

b) $2a^2 - 3a + \dfrac{23}{2}$

c) $5a^3 - 10a^2 - 2a$

d) $2a$

074 Realiza estas operaciones.

a) $(x^3 + 3x^3) : x^2$

b) $(7x^3 - 4x^2 + 5x) : x$

c) $(9x^3y^3 + 3x^2y + 15xy^2) : 3xy$

d) $(12xy - x^2y) : xy$

a) $4x$

b) $7x^2 - 4x + 5$

c) $3x^2y^2 + x + 5y$

d) $12 - x$

075 ●

Copia y completa.

a) $\square : 4xy = 3y^2z^3 + 5xy^2 - 2xyz$

b) $\square : x^3y^2 = 9y + 6x - 4x^2y$

c) $\square : (-5yz^3) = 2x - 5x^2z + 7y^2z^3$

a) $12xy^3z^3 + 20x^2y^3 - 8x^2y^2z$

b) $9x^3y^3 + 6x^4y^2 - 4x^5y^3$

c) $-10xyz^3 + 25x^2yz^4 - 35y^3z^6$

076 ●●

Copia y completa.

a) $(10x^5 + 8x^3 - 6x^2 + 12x) : \square = 5x^4 + 4x^2 - 3x + 6$

b) $(12x^4z^3 - 18x^3z^4 + 24x^2z^2) : \square = 4x^2z - 6xz^2 + 8$

c) $(4x^5yz - 7x^4yz^2 + 6x^3y^3z^2) : \square = 4x^2 - 7xz + 6y^2z$

a) $2x$ b) $3x^2z^2$ c) x^3yz

077 ●

Extrae factor común en cada caso.

a) $3x + 6x - 9x$

b) $4x - 12y$

c) $10a - 10b + 10c$

d) $3ab + 5ab$

e) $10xy - 5xy + 15xy$

f) $14x^4 - 35x^3 - 7x^2 + 42$

g) $25m^2n + 20m^3n^2 - 30m^4$

h) $x^2y - xy^3 + xy$

a) $3x \cdot (1 + 2 - 3)$

b) $4 \cdot (x - 3y)$

c) $10 \cdot (a - b + c)$

d) $ab \cdot (3 + 5)$

e) $5xy \cdot (2 - 1 + 3)$

f) $7 \cdot (2x^4 - 5x^3 - x^2 + 6)$

g) $5m^2 \cdot (5n + 4mn^2 - 6m^2)$

h) $xy \cdot (x - y^2 + 1)$

078 ●●

Extrae factor común.

a) $4x^5 + 3x^4 - 5x^2$

b) $-6y^4 + 8y^3 + 4y$

c) $10x^2y - 15xy + 20xy^2$

d) $3z^4 + 9z^2 - 6z^3$

a) $x^2 \cdot (4x^3 + 3x^2 - 5)$

b) $2y \cdot (-3y^3 + 4y^2 + 2)$

c) $5xy \cdot (2x - 3 + 4y)$

d) $3z^2 \cdot (z^2 + 3 - 2z)$

079 ●

Desarrolla las igualdades notables.

a) $(x - 5)^2$

b) $(2x + 3y)^2$

c) $(4 + a)^2$

d) $(3a - 6b)^2$

a) $x^2 - 10x + 25$

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

c) $16 + 8a + a^2$

d) $9a^2 - 36ab + 36b^2$

080 ●●

Calcula.

a) $(x^2 + y^2)^2$

b) $(3x^2 - 5y^3)^2$

c) $(x^2 - y^2)^2$

d) $(1 + a^4)^2$

a) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

b) $9x^4 - 30x^2y^3 + 25y^6$

c) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

d) $1 + 2a^4 + a^8$

081 ●

Expresa como diferencia de cuadrados.

a) $(x + 1)(x - 1)$

b) $(5 + ab)(5 - ab)$

c) $(3a - 2b)(3a + 2b)$

d) $(2 + 7x^2y)(2 - 7x^2y)$

a) $x^2 - 1$

b) $25 - a^2b^2$

c) $9a^2 - 4b^2$

d) $4 - 49x^4y^2$

082 ●●

Corrige los errores cometidos.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4$

b) $(x - 3)^2 = x^2 + 6x - 9$

c) $5 + 2 \cdot (x + 1)^2 = 10 \cdot (x + 1)^2 = (10x + 10)^2$

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

c) $5 + 2 \cdot (x + 1)^2 = 5 + 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 7$

083 ●●

Copia y completa los términos que faltan.

a) $(2x + 4)^2 = \square + 16x + \square$

b) $(3x^2 - 2)^2 = 9\square + \square - 12x^2$

c) $(\square + 5)^2 = x^4 + 10\square + \square$

d) $(3 - \square)^2 = \square + 16x^2 - 24x$

a) $(2x + 4)^2 = 4x^2 + 16x + 16$

b) $(3x^2 - 2)^2 = 9x^4 + 4 - 12x^2$

c) $(x^2 + 5)^2 = x^4 + 10x^2 + 25$

d) $(3 - 4x)^2 = 9 + 16x^2 - 24x$

084 ●●

Copia y completa los términos que faltan para que los polinomios sean el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $x^6 + 8x^3 + \square$

b) $x^2 + 16 + \square$

c) $64 - \square + x^2$

d) $49 - \square + 4x^2$

a) $x^6 + 8x^3 + 16$

b) $x^2 + 16 + 8x$

c) $64 - 16x + x^2$

d) $49 - 28x + 4x^2$

085 ●●

Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1$

d) $x^4 + 2x^2 + 1$

e) $9x^4 + 6x^3 + x^2$

f) $9x^4 + 6x^2y + y^2$

a) $(x + 2)^2$

b) $(2x - 3)^2$

c) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

d) $(x^2 + 1)^2$

e) $(3x^2 + x)^2$

f) $(3x^2 + y)^2$

086

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE EXPRESA UN POLINOMIO DE LA FORMA $a^2 - b^2$ COMO UNA SUMA POR DIFERENCIA?

Expresa $P(x) = 16 - x^2$ como una suma por diferencia.

PRIMERO. Se identifican *a* y *b*.

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \qquad b^2 = x^2 \rightarrow b = x$$

SEGUNDO. Se aplica la igualdad.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 + x)(4 - x)$$

087 ●●

Expresa los polinomios como producto de una suma por diferencia.

a) $100 - 64x^2$

b) $49x^4 - 36x^2$

c) $1 - x^2$

d) $9x^6 - x^8$

e) $16x^2 - 25$

f) $x^4 - 4$

a) $(10 - 8x)(10 + 8x)$

b) $(7x^2 + 6x)(7x^2 - 6x)$

c) $(1 - x)(1 + x)$

d) $(3x^3 + x^4)(3x^3 - x^4)$

e) $(4x + 5)(4x - 5)$

f) $(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

088 ●●

El precio del kilo de naranjas es *x* y el de uvas es *y*. Expresa en lenguaje algebraico.

a) **El precio de 2 kg de naranjas y 3 kg de uvas.**

b) **Las uvas cuestan el doble que las naranjas.**

c) **El precio de 1,5 kg de naranjas y 2,5 kg de uvas.**

a) $2x + 3y$ b) $y = 2x$ c) $1{,}5x + 2{,}5y$

089 ●●

Si x es la edad actual de Jorge y Pedro tiene 8 años más que él, contesta a estas preguntas utilizando expresiones algebraicas.

a) ¿Cuál será la edad de Jorge dentro de 20 años?
b) ¿Qué edad tenía Jorge hace 7 años?
c) ¿Cuándo tendrá Jorge el doble de la edad que tiene ahora?
d) ¿Cuál es la edad actual de Pedro?
e) ¿Cuál será la edad de Pedro dentro de 15 años?
f) ¿Hace cuántos años Pedro tenía la mitad de la edad actual de Jorge?
g) ¿Dentro de cuántos años tendrá Jorge el doble de la edad actual de Pedro?

a) $x + 20$

b) $x - 7$

c) Dentro de x años

d) $x + 8$

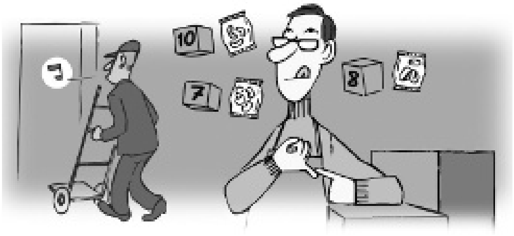
e) $x + 8 + 15$

f) $x + 8 - \frac{x}{2}$

g) $2 \cdot (x + 8) - x$

090 ●●

Un comerciante contabiliza 10 cajas de bolsas de gusanitos, 7 de palomitas y 8 de quicos. El repartidor trae 2 cajas de cada producto. Durante la semana se han vendido 2 cajas de bolsas de quicos, 4 de gusanitos y 3 de palomitas. Expresa en lenguaje algebraico las operaciones que debe hacer el comerciante para saber qué mercancía tendrá la semana que vuelva el repartidor.



El repartidor traerá x cajas de gusanitos, y cajas de palomitas y z cajas de quicos.
La mercancia que le queda al comerciante cuando vuelva el repartidor será:
Gusanitos: $x + 10 + 2 - 4$ Palomitas: $y + 7 + 2 - 3$ Quicos: $z + 8 + 2 - 2$

091 ●●●

Elige dos números de: 1, 2, 3, 4, 5, 6, y colócalos en los triángulos para que la expresión:

$$5(2x - \overset{\text{verde}}{\blacktriangle}) - (\overset{\text{naranja}}{\blacktriangledown}x + 3)(x - 2)$$

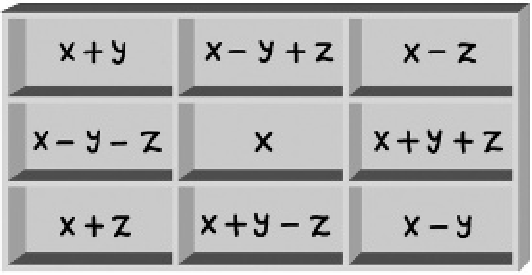
tome el valor 0 cuando $x = 1$.

Llamamos a al triángulo verde y b al naranja.
Operando, tenemos que: $13 - 5a + b = 0$
Como son valores positivos, resulta: $5a > 13 \rightarrow a \geq 3$
Y como el mayor valor de b es 6: $5a < 20 \rightarrow a < 4$, por lo que $a = 3$ y $b = 2$

092 ●●● **Encuentra el valor de *x*, *y* y *z* para que este cuadrado sea un cuadrado mágico compuesto por números del 1 al 9.**

(Recuerda: en un cuadrado mágico, la suma de los elementos de cada columna, fila y diagonal es la misma.)

Aunque existen varias soluciones, si $y > z$, solo hay una solución. ¿Cuál es?



$x + y$	$x - y + z$	$x - z$
$x - y - z$	x	$x + y + z$
$x + z$	$x + y - z$	$x - y$

En los cuadrados mágicos, el centro está ocupado por el número 5, luego $x = 5$.

Como el mayor valor es 9, tenemos que: $y + z = 4$, y al ser $y > z$: $y = 3$ y $z = 1$

8	3	4
1	5	9
6	7	2

093 ●●● **Observa esta tabla:**

$x + y + z$	=	**15**
$x + y - z$	=	**15**
$x + 2y + z$	=	**17**

a) ¿Cuánto tiene que valer *z* para que dé igual sumar que restar?

b) ¿Puedes hallar el valor de *y*? ¿Y el de *x*?

a) El valor de *z* debe ser 0.

b) $x + y = 15$

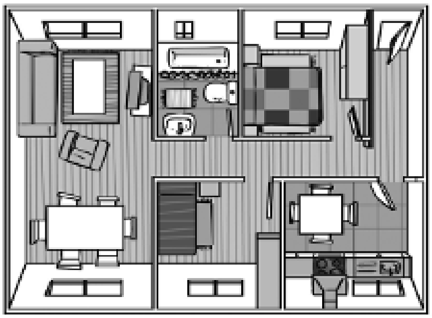
$x + 2y = (x + y) + y = 17 \rightarrow y = 2,\ x = 13$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

094 ●●● **Tras varios debates sobre vivienda y habitabilidad se han extraído una serie de conclusiones sobre las dimensiones idóneas que debe tener una vivienda de dos dormitorios:**

- **El largo del recibidor debe ser el triple que el ancho.**
- **La cocina y los dormitorios deben tener de ancho el doble del ancho del recibidor, y de largo, el triple.**
- **El ancho del pasillo debe ser la mitad que el de la cocina, y el largo, cinco veces el ancho del recibidor.**

- **El salón debe tener un ancho igual al largo de la cocina, y un largo, cinco veces el ancho del recibidor.**
- **El servicio debe ser cuadrado, y su lado igual que el ancho de la cocina.**



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si el ancho del recibidor es de 2 m, ¿cuánto medirán la cocina y el pasillo?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si el ancho del recibidor mide *x*, ¿cuánto mide la superficie de la vivienda que cumpla estas condiciones?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si una vivienda de dos dormitorios mide 92 m^2 y considerando que el ancho del recibidor no puede ser inferior a 1,5 m, ¿cumplirá las condiciones sobre dimensiones idóneas analizadas?

a) Ancho del recibidor: 2 m → Largo del recibidor: $2 \cdot 3 = 6$ m
Ancho de la cocina: $2 \cdot 2 = 4$ m
Largo de la cocina: $2 \cdot 3 = 6$ m
Ancho del pasillo: $4 : 2 = 2$ m
Largo del pasillo: $2 \cdot 5 = 10$ m

b) Ancho del recibidor: x → Largo del recibidor: $3x$
Ancho de la cocina: $2x$ → Ancho del dormitorio: $2x$
Largo de la cocina: $3x$ → Largo del dormitorio: $3x$
Ancho del pasillo: $\frac{2x}{2} = x$ Largo del pasillo: $5x$
Ancho del salón: $3x$ Largo del salón: $5x$
Ancho del servicio: $2x$ Largo del servicio: $2x$
Superficie Total:
$S = x \cdot 3x + 2x \cdot 3x + 2x \cdot 3x + x \cdot 5x + 3x \cdot 5x + 2x \cdot 2x = 39x^2$

c)
- Si la vivienda tiene dos dormitorios:
  Superficie Total $= 39x^2 + 2x \cdot 3x = 45x^2$
- Si el ancho del recibidor fuese el mínimo, 1,5 m:
  Superficie Total $= 45 \cdot 1{,}5^2 = 101{,}25$ m^2

Por tanto, una vivienda de dos dormitorios que tiene una superficie de 92 m^2 no cumple estas condiciones.

095 ●●●

La editorial SANTILIBRO va a lanzar una colección de novela de ciencia ficción.

Los diseñadores gráficos quieren dar un aspecto innovador a esta colección y proponen variar, además del tipo de letra, el formato de los libros, siendo las páginas 5 cm más anchas que largas.

El equipo directivo, por su parte, ha propuesto tres opciones:

- **Aumentar en 3 cm el ancho de la página.**
- **Aumentar en 3 cm el largo de la página.**
- **Aumentar en 3 cm las dos dimensiones.**

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si el ancho de página es de 21 cm y el largo es de 27 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de la página según la propuesta de los diseñadores?

b) ¿Y cuáles serán las dimensiones de la página según las propuestas del equipo directivo?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si el ancho de página es x y el largo es y, ¿cuál será la superficie de la página según cada una de las propuestas anteriores?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) Si se estima que el coste en papel y tintas de una página impresa es de 0,007 €/cm^2, ¿cuál de las propuesta as del equipo directivo es más económica?

a) Diseñadores: 5 cm más anchas que largas → Ancho: $27 + 5 = 32$ cm
Si mantienen el largo de las páginas, 27 cm, el ancho debe ser 32 cm.

b) Aumentar 3 cm el ancho de la página → Ancho: $21 + 3 = 24$ cm Largo: 27 cm
Aumentar 3 cm el largo de la página → Ancho: 21 cm Largo: $27 + 3 = 30$ cm
Aumentar 3 cm las dos dimensiones → Ancho: $21 + 3 = 24$ cm
Largo: $27 + 3 = 30$ cm

c) Diseñadores → Ancho: $y + 5$ Largo: y
Aumentar 3 cm el ancho de la página → Ancho: $x + 3$ Largo: y
Aumentar 3 cm el largo de la página → Ancho: x Largo: $y + 3$
Aumentar 3 cm las dos dimensiones → Ancho: $x + 3$ Largo: $y + 3$

d) Una página de ancho x y largo y tendrá un coste: $0{,}007xy$ €
Aumentar 3 cm el ancho de la página → Ancho: $x + 3$ Largo: y
Coste: $0{,}007(x + 3)y = 0{,}007xy + 0{,}021y$ Incremento: $0{,}021y$
Aumentar 3 cm el largo de la página → Ancho: x Largo: $y + 3$
Coste: $0{,}007x(y + 3) = 0{,}007xy + 0{,}021x$ Incremento: $0{,}021x$
Aumentar 3 cm las dos dimensiones → Ancho: $x + 3$ Largo: $y + 3$
Coste: $0{,}007(x + 3)(y + 3) = 0{,}007xy + 0{,}021x + 0{,}021y$
Incremento: $0{,}021x + 0{,}021y$

Como una página suele ser más larga que ancha, $x < y$, la propuesta más económica es aumentar 3 cm el largo de la página.

6

Ecuaciones de primer y segundo grado

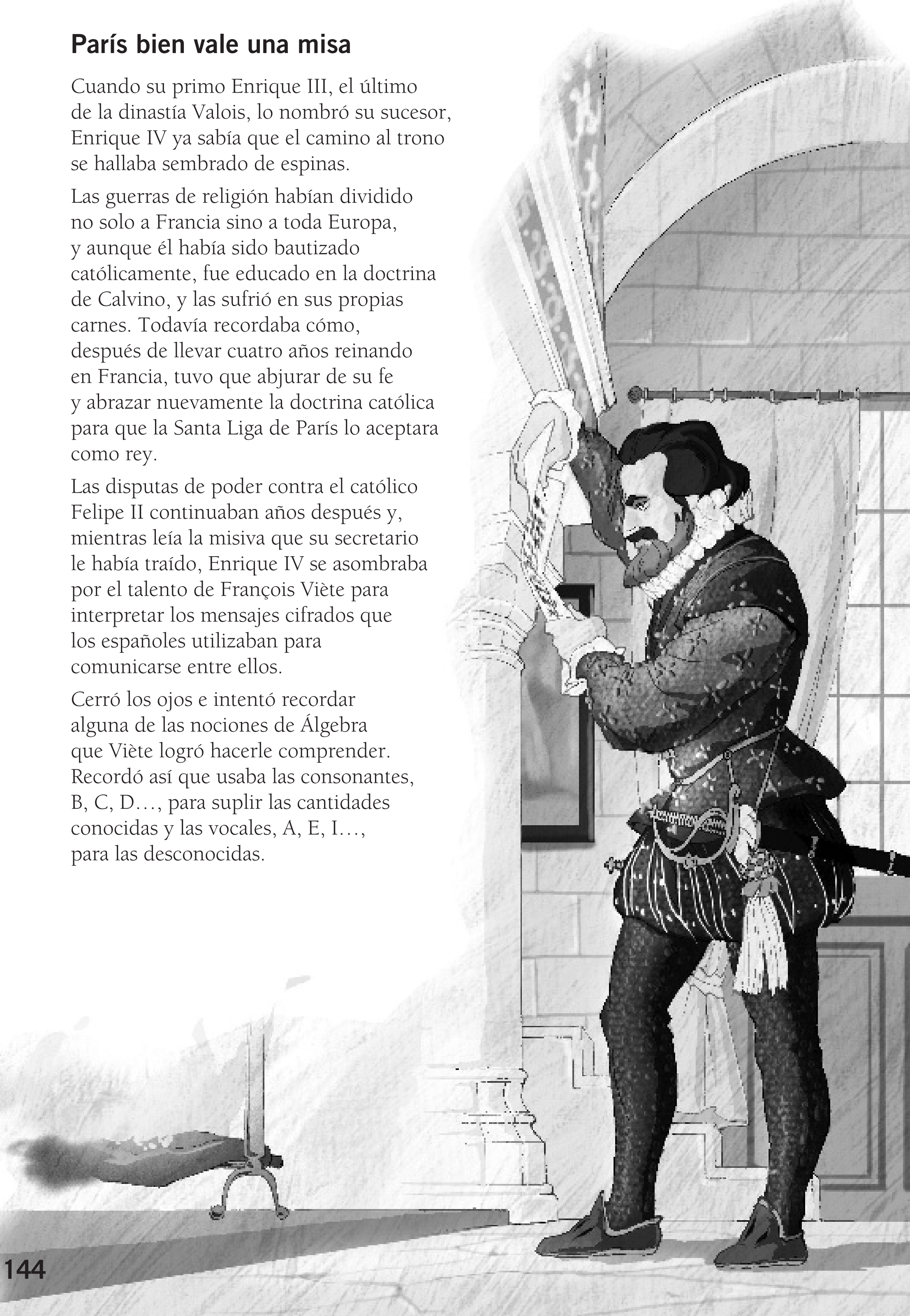
París bien vale una misa

Cuando su primo Enrique III, el último de la dinastía Valois, lo nombró su sucesor, Enrique IV ya sabía que el camino al trono se hallaba sembrado de espinas.

Las guerras de religión habían dividido no solo a Francia sino a toda Europa, y aunque él había sido bautizado católicamente, fue educado en la doctrina de Calvino, y las sufrió en sus propias carnes. Todavía recordaba cómo, después de llevar cuatro años reinando en Francia, tuvo que abjurar de su fe y abrazar nuevamente la doctrina católica para que la Santa Liga de París lo aceptara como rey.

Las disputas de poder contra el católico Felipe II continuaban años después y, mientras leía la misiva que su secretario le había traído, Enrique IV se asombraba por el talento de François Viète para interpretar los mensajes cifrados que los españoles utilizaban para comunicarse entre ellos.

Cerró los ojos e intentó recordar alguna de las nociones de Álgebra que Viète logró hacerle comprender. Recordó así que usaba las consonantes, B, C, D…, para suplir las cantidades conocidas y las vocales, A, E, I…, para las desconocidas.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre la vida de François Viète y su relación con la corte de Enrique III y Enrique IV.**

Se puede encontrar información sobre la vida de François Viète en esta página web:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vieta.htm

2 **Averigua cómo escribiría Viète una ecuación de segundo grado.**

En esta página web se puede obtener información no solo sobre cómo escribía Viète una ecuación de segundo grado, también sobre cómo han evolucionado diferentes signos matemáticos:
http://www.albaiges.com/matematicas/historiamatematicas%5Cevolucionsignosaritmeticos.htm

3 **Investiga sobre la evolución del álgebra a lo largo de la historia.**

En la siguiente página web puedes completar la biografía de Viéte y encontrar datos sobre los trabajos que realizó relacionados con el álgebra:
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/act11_12pdf_web/capitulos/11.pdf

En este enlace se puede completar la información sobre la historia del álgebra:
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/AlgebraHistoria.htm

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Determina el grado de estos monomios.**

a) $5x^2y^6$ **c)** $7x^5y$ **e)** $6xy^4$ **g)** $-7x^3$

b) $-9x^5$ **d)** $-2x^2$ **f)** $4x^2y^7$ **h)** $5z^2y$

a) $2 + 6 = 8$ c) $5 + 1 = 6$ e) $1 + 4 = 5$ g) 3

b) 5 d) 2 f) $2 + 7 = 9$ h) $2 + 1 = 3$

2 **Calcula el valor numérico de $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$ para:**

a) $x = 1$ **b)** $x = -4$

a) $2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 4$ b) $2 \cdot (-4)^2 + 5 \cdot (-4) - 3 = 9$

3 **Comprueba si estos monomios son semejantes, y en caso afirmativo, halla su suma y su resta.**

a) $12x^2$ y $4x^2$ **c)** $9xy^2$ y $7x^2y$ **e)** $-5xy$ y $4xy$

b) $73xy$ y $18xy$ **d)** $-18x^3y^2$ y $7x^2y^3$ **f)** $-7x^2yz$ y $3x^2y$

a) Son semejantes. Suma: $12x^2 + 4x^2 = 16x^2$ Resta: $12x^2 - 4x^2 = 8x^2$

b) Son semejantes. Suma: $73xy + 18xy = 91xy$ Resta: $73xy - 18xy = 55xy$

e) Son semejantes. Suma: $-5xy + 4xy = -xy$ Resta: $-5xy - 4xy = -9xy$

c), d) y f) No son semejantes.

Ecuaciones de primer y segundo grado

EJERCICIOS

001 **Clasifica estas igualdades algebraicas en identidades o ecuaciones.**

a) $2x + 1 = 11$ **e)** $6x = 18$

b) $x + x = 2x$ **f)** $a^7 = a^2 \cdot a^5$

c) $\frac{x}{2} = -8$ **g)** $x - 2 = 2x$

d) $4x + 5 = 5 + 4x$ **h)** $y + 1 = 1 + y$

a) Ecuación
b) Identidad
c) Ecuación
d) Identidad
e) Ecuación
f) Identidad
g) Ecuación
h) Identidad

002 **Comprueba si se cumplen las igualdades.**

a) $13 + x = 18$**, para** $x = 6$**.** **b)** $3 \cdot x = -12$**, para** $x = -4$**.**

a) $13 + 6 = 19 \neq 18$ → No se cumple.
b) $3 \cdot (-4) = -12$ → Se cumple.

003 **Calcula** a **para que la ecuación** $x^2 - 3x + a = 0$ **se cumpla para** $x = 2$**.**

$2^2 - 3 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow 4 - 6 + a = 0 \rightarrow a = 2$

004 **Determina los miembros, los términos y el grado de estas ecuaciones.**

a) $x + 3 = 10$
b) $4x - x = x + 8$
c) $x(x - 2) = 3 - 4(x + 2)$
d) $x - x^2 + 3 = 8 + x(5 - x)$
e) $x^2(x - 3) + 5x^2 = x(1 + x^2)$

a) Miembros: $x + 3$, 10
Términos: x, 3, 10
Grado: 1

b) Miembros: $4x - x$, $x + 8$
Términos: $4x$, x, x, 8
Grado: 1

c) $x^2 - 2x = 3 - 4x - 8$
Miembros: $x^2 - 2x$, $3 - 4x - 8$
Términos: x^2, $2x$, 3, $4x$, 8
Grado: 2

d) $x - x^2 + 3 = 8 + 5x - x^2$
Miembros: $x - x^2 + 3$, $8 + 5x - x^2$
Términos: x, x^2, 3, 8, $5x$, x^2
Grado: 1

e) $x^3 - 3x^2 + 5x^2 = x + x^3$
Miembros: $x^3 - 3x^2 + 5x^2$, $x + x^3$
Términos: x^3, $3x^2$, $5x^2$, x, x^3
Grado: 2

005 **¿Cuáles de estos valores son solución de la ecuación $x(x+1)=6$?**

a) $x=2$ **b)** $x=-2$ **c)** $x=3$ **d)** $x=-3$

a) $2\cdot 3=6$ → Es solución.

c) $3\cdot 4\neq 6$ → No es solución.

b) $(-2)\cdot(-1)\neq 6$ → No es solución.

d) $(-3)\cdot(-2)=6$ → Es solución.

006 **Calcula, probando valores, la solución.**

a) $x-5=20$ **b)** $-4+x=-12$

a) $x=25$ b) $x=-8$

007 **Resuelve estas ecuaciones utilizando la transposición de términos.**

a) $x+4=12$ **c)** $x-3=8$ **e)** $2x=16$ **g)** $5x=25$

b) $1-x=12$ **d)** $-5+x=-3$ **f)** $7x=49$ **h)** $2x=5$

a) $x=8$ c) $x=11$ e) $x=8$ g) $x=5$

b) $x=-11$ d) $x=2$ f) $x=7$ h) $x=\frac{5}{2}$

008 **Halla el valor de la incógnita.**

a) $-10=-x+3$ **b)** $\frac{x}{4}=-8$ **c)** $\frac{x}{-5}=3$

a) $x=13$ b) $x=-32$ c) $x=-15$

009 **Calcula el valor de a para que la solución de $x+a=10$ sea 7.**

$7+a=10\rightarrow a=3$

010 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $2x+4=16$

b) $7x+8=57$

c) $x+2=16-6x$

d) $x-1=9-x$

e) $5x-5=25$

f) $3x+4=2(x+4)$

g) $5(x-1)-6x=3x-9$

h) $4(x-2)+1+3x=5(x+1)$

a) $2x=12\rightarrow x=6$

b) $7x=49\rightarrow x=7$

c) $7x=14\rightarrow x=2$

d) $2x=10\rightarrow x=5$

e) $5x=30\rightarrow x=6$

f) $x=4$

g) $-4x=-4\rightarrow x=1$

h) $2x=12\rightarrow x=6$

011 **Resuelve.**

a) $3(3x+1)-(x-1)=6(x+10)$

b) $5(x-2)-(3+x)=3(x-4)$

a) $9x+3-x+1=6x+60\rightarrow 2x=56\rightarrow x=28$

b) $5x-10-3-x=3x-12\rightarrow x=1$

012 **Despeja x en $x(a - 3) = a(8 - x) - 5(x + a)$.**

$$ax - 3x = 8a - ax - 5x - 5a \rightarrow 2ax + 2x = 3a \rightarrow x = \frac{3a}{2a+2}$$

013 **Resuelve estas ecuaciones con denominadores.**

a) $\frac{x+3}{4} = \frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{5}$

b) $\frac{x+6}{40} - \frac{1}{4} = \frac{x-4}{3}$

c) $-(x+4) + \frac{x}{3} = -\frac{8x}{3}$

a) $5(x + 3) = 10(x + 1) + 4(x + 4)$

$$\rightarrow 5x + 15 = 14x + 26 \rightarrow -9x = 11 \rightarrow x = -\frac{11}{9}$$

b) $3(x + 6) - 30 = 40(x - 4)$

$$\rightarrow 3x - 12 = 40x - 160 \rightarrow 37x = 148 \rightarrow x = \frac{148}{37}$$

c) $-3(x + 4) + x = -8x \rightarrow -2x - 12 = -8x \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$

014 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\frac{2x-1}{5} = 9$

b) $\frac{x-3}{12} = \frac{3x-9}{10}$

a) $2x - 1 = 45 \rightarrow x = 23$

b) $10(x - 3) = 12(3x - 9) \rightarrow 10x - 30 = 36x - 108 \rightarrow 26x = 78 \rightarrow x = 3$

015 **Despeja x en la ecuación.**

$$\frac{a(x-3)}{12} = \frac{a(8-x)}{3}$$

$a(x - 3) = 4a(8 - x) \rightarrow ax - 3a = 32a - 4ax \rightarrow 5ax = 35a \rightarrow x = 7$

016 **La suma de un número y el doble de ese número es 120.**
¿De qué números se trata?

$x + 2x = 120 \rightarrow x = 40$

Los números son 40 y 80.

017 **El perímetro de un rectángulo es de 400 m. Halla la longitud de sus lados, sabiendo que la base es 2 m mayor que la altura.**

Altura: x Base: $x + 2$

$2x + 2(x + 2) = 400 \rightarrow x = 99 \rightarrow$ Altura = 99 m Base = 101 m

018 **El perímetro de un cuadrado es de 60 cm. Calcula la longitud de cada lado.**

Lado: x

$4x = 60 \rightarrow x = 15$ cm

019 **Antonio tiene 4 € de paga semanal y se gasta 2,50 € cada semana. Si quiere comprarse un teléfono móvil que vale 54 €, ¿cuánto tardará en ahorrar lo suficiente?**

Número de semanas que tarda en ahorrar el dinero: x

Ahorro semanal: $4 - 2{,}50 = 1{,}50$ €

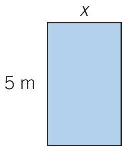
$1{,}50x = 54 \rightarrow x = 36$ semanas

020 **Por cada día de retraso en el pago de una multa de tráfico se aumenta su coste en 3 €. Juan tiene una multa por aparcar en doble fila. ¿Cuántos días se ha retrasado en pagar si ha abonado 156 € en vez de 105 €?**

Días de retraso: x

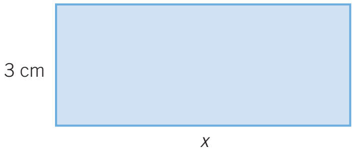
$156 = 105 + 3x \rightarrow x = 17$ días

021 **En un rectángulo de base *x* y altura 5 m sabemos que su perímetro es 16 m. Calcula la longitud de la base.**



Como $16 = 10 + 2x$, la base x mide 3 m.

022 **Halla la base *x* de un rectángulo de altura 3 cm y perímetro 22 cm.**



$2x + 6 = 22 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$ cm

023 **En un zoológico hay el doble número de chimpancés que de gorilas. Si en total son 171 animales, ¿cuántos habrá de cada especie?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gorilas: } x\\ \text{Chimpancés: } 2x\end{array}\right\} \rightarrow 2x + x = 171 \rightarrow 3x = 171 \rightarrow x = 57$$

Hay 57 gorilas y 114 chimpancés.

024 **En una clase de 33 alumnos hay doble número de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Chicos: } x\\ \text{Chicas: } 2x\end{array}\right\} \rightarrow 3x = 33 \rightarrow x = 11$$

Hay 11 chicos y 22 chicas.

025 **La suma de dos números consecutivos impares es 156. ¿Qué números son?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Un número impar: } 2x + 1\\ \text{Su consecutivo: } 2x + 3\end{array}\right\} \rightarrow 2x + 1 + 2x + 3 = 156 \rightarrow 4x = 152 \rightarrow x = 38$$

Los números buscados son:

$$2x + 1 = 2 \cdot 38 + 1 = 76 + 1 = 77$$
$$2x + 3 = 2 \cdot 38 + 3 = 76 + 3 = 79$$

026 **Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado, y determina sus coeficientes.**

a) $(x - 1)(x + 4) = 1$

b) $x^2 - 5x + 2 = -x^2$

c) $3x^2 - 5 = -2x^2 + x - 4$

d) $x(4x + 2) = 0$

e) $3x^2 - 5x = 0$

f) $-x^2 - x - 1 = 0$

g) $(x - 2)3x = 4$

a) $x^2 + 3x - 5 = 0$ Coeficientes: $a = 1$ $b = 3$ $c = -5$

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ Coeficientes: $a = 2$ $b = -5$ $c = 2$

c) $5x^2 - x - 1 = 0$ Coeficientes: $a = 5$ $b = -1$ $c = -1$

d) $4x^2 + 2x = 0$ Coeficientes: $a = 4$ $b = 2$ $c = 0$

e) $3x^2 - 5x = 0$ Coeficientes: $a = 3$ $b = -5$ $c = 0$

f) $-x^2 - x - 1 = 0$ Coeficientes: $a = -1$ $b = -1$ $c = -1$

g) $3x^2 - 6x - 4 = 0$ Coeficientes: $a = 3$ $b = -6$ $c = -4$

027 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes sean:**

a) $a = 4, b = -3, c = -2$

b) $a = 6, b = 0, c = -3$

c) $a = -1, b = 2, c = 0$

d) $a = -1, b = 0, c = 0$

a) $4x^2 - 3x - 2 = 0$

b) $6x^2 - 3 = 0$

c) $-x^2 + 2x = 0$

d) $-x^2 = 0$

028 **Determina si estas ecuaciones son de segundo grado.**

a) $3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 + 2x$

b) $3x^2 - 2x^2 = 2x^2 + x$

c) $(x - 2)(x + 1) = 0$

d) $x(x + 1) = x^2 + 2x$

a) $-7x + 2 = 0$ → Primer grado

b) $-x^2 - x = 0$ → Segundo grado

c) $x^2 - x - 2 = 0$ → Segundo grado

d) $x = 0$ → Primer grado

029 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 + 16 = 0$

c) $5x^2 - 320 = 0$

d) $x^2 - 2x = 0$

e) $x(x - 4) = 0$

a) $x_1 = 6, x_2 = -6$

b) No hay solución.

c) $x_1 = 8, x_2 = -8$

d) $x_1 = 0, x_2 = 2$

e) $x_1 = 0, x_2 = 4$

030 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $2x^2 = 72$ **b)** $3x^2 = -27$ **c)** $-2x^2 = 72x$

a) $x_1 = 6, x_2 = -6$ b) No hay solución. c) $x_1 = 0, x_2 = -36$

031 **Escribe una ecuación cuyas soluciones sean:**

a) $x_1 = 5, x_2 = -5$ **b)** $x_1 = 0, x_2 = -2$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x^2 - 25 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$

032 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $2x^2 - x - 1 = 0$

c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

d) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

e) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

a) $x_1 = 2, x_2 = 4$

b) $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

c) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$

d) $x_1 = 1, x_2 = 3$

e) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

033 **Calcula la solución de estas ecuaciones.**

a) $(x - 2)(x + 1) = 0$ **b)** $x^2 + 2x = 15$

a) $x_1 = 2, x_2 = -1$ b) $x_1 = -5, x_2 = 3$

034 **En la ecuación $x^2 + 3x + c = 0$, obtén el valor de c sabiendo que sus soluciones son -1 y -2.**

$(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + c = 0 \rightarrow c = 2$

$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + c = 0 \rightarrow c = 2$

ACTIVIDADES

035 ● **Indica si estas igualdades algebraicas son ciertas para $x = 2$.**

a) $5x^2 - 3x + 7 = 21$

b) $(x + 1)(x - 2) = 0$

c) $\frac{4x - 3}{2} = \frac{1}{2}$

d) $3x(2x - 4) - 1 = -1$

e) $(7x - 3)(-2) + x = 0$

f) $\frac{x + 1}{3} - \frac{x + 4}{2} = -2$

a) Verdadera

b) Verdadera

c) Falsa

d) Verdadera

e) Falsa

f) Verdadera

036 ● **¿Cuál de los siguientes valores hace cierta la igualdad $\frac{x + 3}{2} = \frac{x}{4} - 1$?**

a) $x = -1$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -10$ **d)** $x = 12$

Es cierta para $x = -10$.

037 ● **Indica cuáles de las igualdades algebraicas son identidades o ecuaciones.**

a) $-3(2 - 5x) = 15x - 6$

b) $\frac{8}{3}x - x = \left(1 + \frac{2}{3}\right)x$

c) $7x = 6x + x$

d) $2x = 10$

e) $\frac{2x - 4}{2} = x - 2$

f) $5(x - 2) = 5 - 2x$

a) Identidad

b) Ecuación

c) Identidad

d) Ecuación

e) Identidad

f) Ecuación

038 ●● **Escribe dos igualdades algebraicas que sean identidades y otras dos que sean ecuaciones.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Identidades: $2x - 5 = -5 + 2x$ $3x + 1 = 2x + x + 1$

Ecuaciones: $2x = 6$ $3x + 5 = 8$

039 ●● **Halla tres igualdades algebraicas que sean ciertas para estos valores.**

a) $x = 5$

b) $x = \frac{3}{2}$

c) $x = -4$

d) $x = \frac{-4}{3}$

¿Podrías escribir una igualdad algebraica que se verifique únicamente para los cuatro valores a la vez? ¿Qué nombre recibe?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $2x = 10$	$x + 1 = 5$	$3x - 2 = 13$
b) $2x = 3$	$4x + 2 = 8$	$6x - 3 = 6$
c) $x + 4 = 0$	$3x + 1 = -11$	$5 - 2x = 13$
d) $3x = -4$	$9x + 8 = -4$	$20 - 6x = 28$

La igualdad algebraica que cumple esa condición es la ecuación:

$$(x - 5) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (x + 4) \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

040 ●●

Encuentra el error y corrígelo.

a) La ecuación $4x = 3$ se cumple para $x = -1$ porque $4 - 1 = 3$.

b) La ecuación $4 - x = 3$ se cumple para $x = -1$ porque $4 - 1 = 3$.

c) La ecuación $\frac{x}{4} + 1 = 2$ es cierta para $x = \frac{1}{4}$

porque $\frac{1/\cancel{4}}{\cancel{4}} + 1 = 1 + 1 = 2$.

a) La ecuación $4x = 3$ se cumple para $x = \frac{3}{4}$ porque $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$.

b) La ecuación $4 - x = 3$ se cumple para $x = 1$ porque $4 - 1 = 3$.

c) La ecuación $\frac{x}{4} + 1 = 2$ es cierta para $x = 4$ porque $\frac{4}{4} + 1 = 2$.

041 ●●

Indica si la igualdad $x^2 = -4$ se verifica para los siguientes valores de x.

a) $x = 2$
c) $x = 1$
e) $x = 3$
b) $x = -2$
d) $x = -1$
f) $x = -3$

¿Puede existir algún valor de x que cumpla la ecuación?

No se verifica para ninguna de las opciones, ya que no tiene solución.

042 ●

Identifica los elementos de las ecuaciones.

Ecuación	1.er miembro	2.º miembro	Incógnitas	Grado
$4x - 3 = 5$	$4x - 3$	5	x	1
$4(x - 3) = 5x$	$4(x - 3)$	$5x$	x	1
$8y - y = \frac{y+2}{3}$	$8y - y$	$\frac{y+2}{3}$	y	1
$3a - b = \frac{a}{5}$	$3a - b$	$\frac{a}{5}$	a, b	1
$z^2 - 4z + 3 = 0$	$z^2 - 4z + 3$	0	z	2
$x(x + 1) = x^2 + 9$	$x(x + 1)$	$x^2 + 9$	x	2
$x(3 - x) = x - 1$	$x(3 - x)$	$x - 1$	x	2

043 **Escribe una ecuación para estos enunciados.**

a) El doble de un número es 8.
b) El triple de un número es 12.
c) La mitad de un número es 10.
d) La tercera parte de un número es 2.
e) El doble de un número más 3 es 8.
f) La mitad de un número menos 5 es 120.
g) La cuarta parte de un número menos 6 es 7.
h) El doble de un número más 7 es 18.
i) La diferencia entre el cuádruple de un número menos 10 es 24.

a) $2x = 8$
b) $3x = 12$
c) $\frac{x}{2} = 10$
d) $\frac{x}{3} = 2$
e) $2x + 3 = 8$
f) $\frac{x}{2} - 5 = 120$
g) $\frac{x}{4} - 6 = 7$
h) $2x + 7 = 18$
i) $4x - 10 = 24$

044 **Asigna una ecuación a cada enunciado.**

a) El cuadrado de un número es 100.
b) El cubo de un número es 125.
c) La suma del cuadrado de un número más 2 es 82.
d) La diferencia del cubo de un número menos 3 es 124.
e) La mitad del cuadrado de un número es 8.
f) La quinta parte del cubo de un número es 310.

a) $x^2 = 100$
b) $x^3 = 125$
c) $x^2 + 2 = 82$
d) $x^3 - 3 = 124$
e) $\frac{x^2}{2} = 8$
f) $\frac{x^3}{5} = 310$

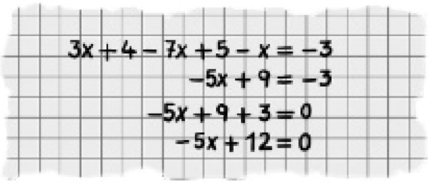
045 **Escribe los enunciados correspondientes a estas ecuaciones.**

a) $2x + 5 = 3$
b) $7 - x = 2$
c) $2(x + 1) = 10$
d) $\frac{x^2}{2} = 3$
e) $x^2 - 1 = 8$
f) $3(x - 2) = 9$
g) $\frac{x - 4}{2} = 1$
h) $\frac{x + 6}{3} = 2$

a) El doble de un número más 5 es 3.
b) El número 7 menos un número es 2.
c) El doble de la suma de un número más 1 es 10.
d) La mitad del cuadrado de un número es 3.
e) El cuadrado de un número menos 1 es 8.
f) El triple de la diferencia de un número menos 2 es 9.
g) La mitad de la diferencia de un número menos 4 es 1.
h) La tercera parte de la suma de un número más 6 es 2.

046 ●

Simplifica estas ecuaciones reduciendo términos semejantes, tal como se indica en el ejemplo.



$$\begin{aligned} 3x+4-7x+5-x &= -3 \\ -5x+9 &= -3 \\ -5x+9+3 &= 0 \\ -5x+12 &= 0 \end{aligned}$$

a) $5(x-6)+2(-3x-7)=2(3x+5)$

b) $4x+5-x=10x+7-x$

c) $7-10x+3(x^2-9x)=x-8$

d) $8+\frac{7}{3}(x-3)-x^2+x=\frac{5}{4}$

e) $-2(2x+4)-x(x+3)=5-3x$

a) $5x-30-6x-14=6x+10 \rightarrow -7x-54=0$

b) $-6x-2=0 \rightarrow 6x+2=0$

c) $7-10x+3x^2-27x=x-8 \rightarrow 3x^2-38x+15=0$

d) $96+28x-84-12x^2+12x=15 \rightarrow -12x^2+40x-3=0$

e) $-4x-8-x^2-3x=5-3x \rightarrow -x^2-4x-13=0$

047 ●●

Corrige los errores cometidos al reducir términos semejantes de estas ecuaciones.

a)

$$\begin{aligned} 7x-(2-x) &= 3x+1 \\ 7x-2-x &= 3x+1 \\ 7x-x-3x-2+1 &= 0 \\ 3x-1 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 8(2-x)-x &= x \\ 16-8x-x &= x \\ 8x-x-x+16 &= 0 \\ 6x+16 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 5-(x-3) &= x-(-7) \\ 5+7-x-3-x &= 0 \\ -2x+9 &= 0 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} 7x-(2-x) &= 3x+1 \\ 7x-2+x &= 3x+1 \\ 7x+x-3x-2-1 &= 0 \\ 5x-3 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 8(2-x)-x &= x \\ 16-8x-x &= x \\ -8x-x-x+16 &= 0 \\ -10x+16 &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 5-(x-3) &= x-(-7) \\ 5-7-x+3-x &= 0 \\ -2x+1 &= 0 \end{aligned}$$

048 ●

Averigua cuáles de las ecuaciones son equivalentes a la ecuación $x=4$.

a) $2x=8$

b) $3x=9$

c) $4x=12$

d) $-x=-4$

e) $-2x=8$

f) $-3x=-12$

a) Equivalente

b) No equivalente

c) No equivalente

d) Equivalente

e) No equivalente

f) Equivalente

Ecuaciones de primer y segundo grado

049 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x + 2 = 7$
b) $x - 3 = 15$
c) $x + 13 = 21$
d) $x - 7 = 2$
e) $x + 11 = 3$
f) $x - 17 = 17$
g) $x + \frac{6}{2} = 11$
h) $x - 9 = -16$
i) $4x = 20$
j) $13x = 91$
k) $\frac{x}{4} = 5$
l) $-x = 3$
m) $-7x = 21$
n) $-12x = 60$
ñ) $6x = 18$
o) $-3x = 21$

a) $x = 5$
b) $x = 18$
c) $x = 8$
d) $x = 9$
e) $x = -8$
f) $x = 34$
g) $x = 8$
h) $x = -7$
i) $x = 5$
j) $x = 7$
k) $x = 20$
l) $x = -3$
m) $x = -3$
n) $x = -5$
ñ) $x = 3$
o) $x = -7$

050 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\frac{2x}{20} = 5$
b) $\frac{9x}{6} = 27$
c) $\frac{4x}{2} = 82$
d) $\frac{3x}{6} = 9$

a) $2x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{2} = 50$

b) $9x = 162 \rightarrow x = \frac{162}{9} = 18$

c) $4x = 164 \rightarrow x = \frac{164}{4} = 41$

d) $3x = 54 \rightarrow x = \frac{54}{3} = 18$

051 **Halla la solución de las ecuaciones.**

a) $-5x = 45$
b) $6x = -36$
c) $3x = 2$
d) $8x = 48$
e) $-12x = -72$
f) $\frac{x}{-3} = 8$
g) $\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$
h) $\frac{x}{15} = 1$
i) $\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$
j) $x + 4 + x = 18 + 3$
k) $x + 3x + 4x = 8$
l) $5x - 2 + 2x = 6x + 8$
m) $4x + 3x - 2x = 45$
n) $-x + 4x - 3 = 5 - 2x$

a) $x = -9$

b) $x = -6$

c) $x = \frac{2}{3}$

d) $x = 6$

e) $x = 6$

f) $x = -24$

g) $x = 1$

h) $x = 15$

i) $x = 2$

j) $2x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{2}$

k) $8x = 8 \rightarrow x = 1$

l) $7x - 2 = 6x + 8 \rightarrow x = 10$

m) $5x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{5} = 9$

n) $5x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{5}$

052 ●

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 10 = 0$

b) $5x + 4 = x - 8$

c) $x + 2(x - 1) = 4$

d) $2(3x - 5) - x - (2x - 3) = 1 - (2x - 5)$

e) $7(x + 2) + 4(x + 3) = 3x + 1$

f) $3(x - 3) - 4(2 - 3x) = 2(1 - 2x)$

a) $x = 5$

b) $x = -3$

c) $3x = 6 \rightarrow x = 2$

d) $3x - 7 = -2x + 6 \rightarrow 5x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{5}$

e) $11x + 26 = 3x + 1 \rightarrow 8x = -25 \rightarrow x = -\frac{25}{8}$

f) $15x - 17 = 2 - 4x \rightarrow 19x = 19 \rightarrow x = 1$

053 ●●

Obtén la solución de estas ecuaciones de primer grado.

a) $4x + 1 + 3x - 5 = 2(x - 2) + 30$

b) $3(x + 8) = 6(x - 2) + 24$

c) $3(x + 8) - (x - 4) = 12$

d) $2(4 - x) + 3(4x + 16) = 3$

e) $6(x + 8) - 2(x - 4) = 24$

f) $6(x - 2) = 3(x + 8) - 24$

a) $7x - 4 = 2x + 26 \rightarrow 7x - 2x = 26 + 4 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

b) $3x + 24 = 6x + 12 \rightarrow 3x - 6x = 12 - 24 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = 4$

c) $2x + 28 = 12 \rightarrow 2x = 12 - 28 \rightarrow 2x = -16 \rightarrow x = -8$

d) $10x + 56 = 3 \rightarrow 10x = 3 - 56 \rightarrow 10x = -53 \rightarrow x = -\frac{53}{10}$

e) $4x + 56 = 24 \rightarrow 4x = 24 - 56 \rightarrow 4x = -32 \rightarrow x = -8$

f) $6x - 12 = 3x \rightarrow 6x - 3x = 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$

054 ●●

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\frac{5-x}{7}=1$

b) $\frac{x-8}{6}=3$

c) $\frac{x+5}{6}=4$

d) $\frac{4x-8}{-2}=2$

e) $\frac{3x+8}{4}=x$

f) $\frac{3x}{2}-25=x-20$

g) $\frac{x+4}{5}-1=\frac{x}{2}-x$

h) $\frac{3x}{5}-9=\frac{2x}{6}-7$

a) $x=-2$

b) $x=26$

c) $x=19$

d) $x=1$

e) $x=8$

f) $x=10$

g) $x=\frac{2}{7}$

h) $x=\frac{15}{2}$

055 ●●

Halla la solución de las ecuaciones.

a) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{15}+13$

b) $\frac{x}{2}-x=\frac{x+4}{5}-1$

c) $\frac{3x-4}{4}=x-3$

d) $\frac{x}{3}-7=\frac{3x}{5}-9$

a) $12x+3x=2x+195 \rightarrow 13x=195 \rightarrow x=15$

b) $5x-10x=2x+8-10 \rightarrow 7x=2 \rightarrow x=\frac{2}{7}$

c) $3x-4=4x-12 \rightarrow x=8$

d) $5x-105=9x-135 \rightarrow 4x=30 \rightarrow x=\frac{15}{2}$

056 ●●

Resuelve las ecuaciones.

a) $\frac{x+8}{2}=\frac{x-4}{6}+2$

b) $\frac{x-5}{5}+\frac{8-x}{2}=3-\frac{2x-10}{2}$

c) $\frac{x-10}{2}-5=\frac{x-20}{4}+\frac{x-30}{3}$

d) $-\frac{3x-12}{4}=-1-\frac{2x-10}{3}$

a) $3x + 24 = x - 4 + 12 \rightarrow x = -8$

b) $2x - 10 + 40 - 5x = 30 - 10x + 50 \rightarrow x = \frac{50}{7}$

c) $6x - 60 - 60 = 3x - 60 + 4x - 120 \rightarrow x = 60$

d) $-9x + 36 = -12 - 8x + 40 \rightarrow x = 8$

057 ●●

Obtén la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{4x+3}{5} - \frac{x-2}{4} = 2 - \frac{x+3}{6}$

b) $\frac{13-2x}{6} + \frac{5x-2}{4} = 1 - \frac{x+1}{12}$

c) $x - \frac{2-x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+1}{3}$

d) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{2} = \frac{4-2x}{5}$

a) $48x + 36 - 15x + 30 = 120 - 10x - 30 \rightarrow x = \frac{24}{43}$

b) $26 - 4x + 15x - 6 = 12 - x - 1 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

c) $6x - 4 + 2x = 9 - 2x - 2 \rightarrow x = \frac{11}{10}$

d) $10x - 20 - 15x + 45 = 24 - 12x \rightarrow x = -\frac{1}{7}$

058 ●●

Resuelve estas ecuaciones.

a) $y + 2 = 3y - 4$

b) $\frac{z}{2} + 1 = \frac{4z}{3} - 2$

c) $3u = u + 4$

d) $6 + 5t = (7 - t)(-2)$

e) $\frac{v+3}{2} - \frac{v}{3} = 4$

f) $1 - (4w - 7) = (1 - w)(-1)$

a) $y = 3$

b) $z = \frac{18}{5}$

c) $u = 2$

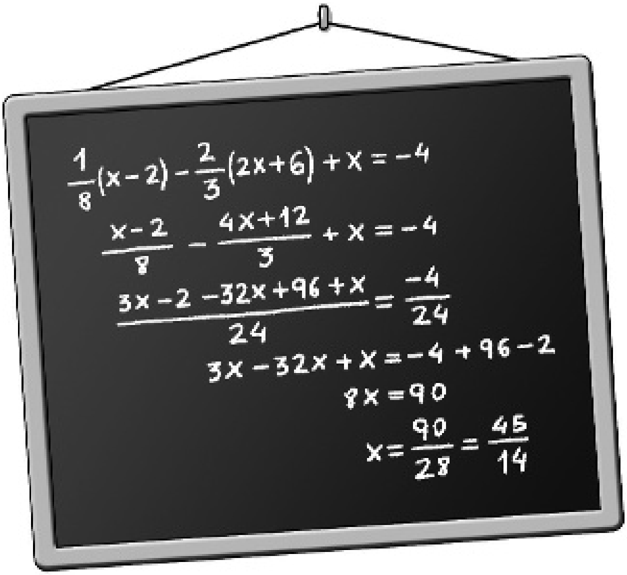
d) $t = -\frac{20}{3}$

e) $v = 15$

f) $w = \frac{9}{5}$

Ecuaciones de primer y segundo grado

059 **Corrige los errores cometidos en la resolución de la ecuación.**



$$\frac{1}{8}(x-2)-\frac{2}{3}(2x+6)+x=-4$$

$$\frac{x-2}{8}-\frac{4x+12}{3}+x=-4$$

$$\frac{3x-6-32x-96+24x}{24}=\frac{-96}{24}$$

$$3x-32x+24x=-96+96+6$$

$$5x=-6$$

$$x=-\frac{6}{5}$$

060 **Identifica cuáles de estas ecuaciones son de segundo grado.**

a) $x(x+2)=0$

b) $x^2-3(x-5)=3x-4$

c) $5+x+x^2=-30+x^2$

d) $\frac{x^2+8}{3}=\frac{x}{4}(2+x)$

e) $(x+1)^2+x^2=5x$

f) $(x+2)^2-(x-3)^2=8$

a) Segundo grado
b) Segundo grado
c) Primer grado
d) Segundo grado
e) Segundo grado
f) Primer grado

061 ● **Expresa estas ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, e identifica los términos a, b y c.**

a) $\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{3} = 0$

b) $5(x - 3)^2 = 2$

c) $x^2 - x(2x + 4) + 7 = 6$

d) $3x(2x - 6) - x(x - 5) = 9$

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{1}{3}$

b) $5x^2 - 30x + 43 = 0 \rightarrow a = 5, b = -30, c = 43$

c) $-x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow a = -1, b = -4, c = 1$

d) $5x^2 - 13x - 9 = 0 \rightarrow a = 5, b = -13, c = -9$

062 ● **Expresa la forma general de las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $(x + 3)(x - 5) = 3$

b) $2x^2 - 5x = -4x^2 - x + 8$

c) $-5x^2 - 3x + 9 = -x^2 - 7x + 11$

d) $-4x(7 - 3x) = 0$

a) $x^2 - 2x - 18 = 0$

b) $6x^2 - 4x - 8 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 2 = 0$

d) $12x^2 - 28x = 0$

063 ● **Escribe las ecuaciones de segundo grado cuyos coeficientes son:**

a) $a = -1$ $b = 2$ $c = -3$

b) $a = 3$ $b = 0$ $c = 9$

c) $a = 4$ $b = 2$ $c = 0$

d) $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{2}{3}$ $c = \frac{-1}{5}$

a) $-x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $3x^2 + 9 = 0$

c) $4x^2 + 2x = 0$

d) $\frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{5} = 0$

064 ● **Halla la solución de las ecuaciones.**

a) $4x^2 - 16 = 0$

b) $5x^2 = 45$

c) $3x^2 - 75 = 0$

d) $4x^2 = 64$

e) $8x^2 - 8 = 0$

f) $9x^2 = 900$

g) $16x^2 = 9$

h) $x^2 = \frac{25}{4}$

a) $x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $x_1 = 3, x_2 = -3$

c) $x_1 = 5, x_2 = -5$

d) $x_1 = 4, x_2 = -4$

e) $x_1 = 1, x_2 = -1$

f) $x_1 = 10, x_2 = -10$

g) $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{3}{4}$

h) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$

065 ●

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - x = 0$ **e)** $9x = 18x^2$

b) $5x^2 + 10x = 0$ **f)** $6x - 10x^2 = 0$

c) $7x - 21x^2 = 0$ **g)** $4x^2 = 9x$

d) $2x^2 = 16x$ **h)** $5x^2 + 3x = 0$

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$

b) $x_1 = 0, x_2 = -2$

c) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0, x_2 = 8$

e) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

f) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{5}$

g) $x_1 = 0, x_2 = \frac{9}{4}$

h) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{5}$

066 ●

Resuelve estas ecuaciones de segundo grado completas, aplicando la fórmula general.

a) $7x^2 + 21x - 28 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 3 = 0$

b) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ **d)** $x^2 + x - 20 = 0$

a) $x_1 = -4, x_2 = 1$

b) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$

c) $x_1 = -3, x_2 = -1$

d) $x_1 = -5, x_2 = 4$

067 ●●

Obtén la solución de las ecuaciones.

a) $x^2 - 3x = x - 2$ **e)** $2x^2 - 7x + 3 = 0$

b) $x^2 - 2x = -1$ **f)** $6x^2 = 5x - 1$

c) $x^2 + 5 = 6x$ **g)** $3x^2 - 1 = -2x$

d) $x - 12 = -x^2$ **h)** $5x = 3 - 2x^2$

a) $x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}, x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1$

d) $x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3$

e) $2x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}$

f) $6x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$

g) $3x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$

h) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$

068 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LAS ECUACIONES EN LAS QUE UN PRODUCTO ES IGUAL A UN NÚMERO?

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(3x - 1)(4x + 2) = 0$ **b)** $(x - 1)(x + 2) = -2$

a) Cuando el producto es igual a 0.

PRIMERO. Se iguala a cero cada uno de los factores.

$$(3x - 1)(4x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

SEGUNDO. Se resuelve cada una de las ecuaciones de primer grado. Estas serán las soluciones de la ecuación de segundo grado.

$$3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) Cuando el producto es igual a un número distinto de 0.

PRIMERO. Se realiza el producto y se agrupan los términos en el mismo miembro.

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 2) &= -2 \\ x^2 + 2x - x - 2 &= -2 \\ x^2 + x &= 0 \end{aligned}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación de segundo grado resultante.

$$x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

069 ●●

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x(x - 3) = 0$

b) $(x - 5)(3x + 9) = 0$

c) $(7x + 1)(4x - 3) + 3 = 3$

d) $(x + 4)(x - 5) = -14$

e) $(5x + 3)\left(x - \frac{1}{5}\right) + 2 = 3$

f) $(x + 3)(x + 3) = 0$

g) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

a) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

b) $x_1 = 5,\ x_2 = -3$

c) $x_1 = -\frac{1}{7},\ x_2 = \frac{3}{4}$

d) $x_1 = 3,\ x_2 = -2$

e) $x_1 = -\frac{4}{5},\ x_2 = \frac{2}{5}$

f) $x_1 = -3,\ x_2 = -3$

g) $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

070 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES DEL TIPO $(ax + b)^2 = n$?

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 2)^2 = 9$ **b)** $(x - 2)^2 = -9$

a) Cuando el término de la derecha es mayor o igual que 0 se procede de esta manera:

PRIMERO. Se calcula la raíz cuadrada en los dos miembros, teniendo en cuenta el signo positivo y negativo de su resultado.

$$(x - 2)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{9} \rightarrow x - 2 = \pm 3$$

SEGUNDO. Se resuelve cada una de las ecuaciones de primer grado que resultan.

$$x - 2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \longrightarrow x_1 = 5 \\ x - 2 = -3 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

b) Cuando el término de la derecha es negativo, la ecuación no tiene solución. No existe ningún número que elevado al cuadrado sea un número negativo.

071 ●●

Halla la solución de las ecuaciones.

a) $(3x + 4)^2 = 0$ **d)** $(5x - 8)^2 = 0$

b) $\left(9x + \frac{3}{7}\right)^2 = 0$ **e)** $(4x - 2)^2 = 4$

c) $(x + 3)^2 = 64$ **f)** $(3x - 2)^2 = 8$

a) $x_1 = x_2 = -\frac{4}{3}$

b) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{21}$

c) $x_1 = 5, x_2 = -11$

d) $x_1 = x_2 = \frac{8}{5}$

e) $x_1 = 1, x_2 = 0$

f) $x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{3}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{3}$

072 ●●

Escribe una ecuación de segundo grado con estas soluciones.

a) 0 y -3 **b)** 5 y -5 **c)** 0 y 2 **d)** 8 y 3

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $x(x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0$

b) $(x - 5)(x + 5) = 0 \rightarrow x^2 - 25 = 0$

c) $x(x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0$

d) $(x - 8)(x - 3) = 0 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$

073 ●●●

Resuelve las ecuaciones.

a) $\frac{x^2-1}{3}=\frac{(x-1)^2}{2}$

b) $\frac{3x^2-33}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$

c) $\frac{(x+4)(2x-1)}{7}=0$

a) $2x^2-2=3x^2-6x+3 \rightarrow x^2-6x+5=0 \rightarrow x_1=1, x_2=5$

b) $21x^2-231-10x^2+600=1260 \rightarrow 11x^2=891 \rightarrow x_1=9, x_2=-9$

c) $(x+4)(2x-1)=0 \rightarrow x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$

074 ●

Calcula el número tal que si le sumamos 2 nos da 10.

Si llamamos al número x, le sumamos 2, y es igual a 10:

$x+2=10 \rightarrow x=8$

075 ●

Obtén el número cuyo doble más su triple suma 35.

Si llamamos al número x, su doble es $2x$ y su triple es $3x$, y han de sumar 35:

$2x+3x=35 \rightarrow 5x=35 \rightarrow x=7$

076 ●

Determina un número, de forma que la suma de su triple y cuatro veces el número sea 21.

Si llamamos al número x, su triple es $3x$, y cuatro veces el número es $4x$, y han de sumar 21:

$3x+4x=21 \rightarrow 7x=21 \rightarrow x=3$

077 ●●

Escribe en lenguaje algebraico los enunciados y resuélvelos.

a) La suma de dos números consecutivos es 63.

b) La suma de dos números pares consecutivos es 126.

c) El doble de un número y su mitad suman 10.

d) El doble de la suma de un número más 7 es 18.

e) El triple de un número menos 8 es 40.

f) Un número menos su quinta parte es 80.

a) $x+(x+1)=63 \rightarrow x=31$
Los números son 31 y 32.

b) $x+(x+2)=126 \rightarrow x=62$
Los números son 62 y 64.

c) $2x+\frac{x}{2}=10 \rightarrow x=4$
El número es 4.

d) $2(x+7)=18 \rightarrow x=2$
El número es 2.

e) $3x-8=40 \rightarrow x=16$
El número es 16.

f) $x-\frac{x}{5}=80 \rightarrow x=100$
El número es 100.

078 ●● **La suma de dos números es 55 y uno de ellos es la cuarta parte del otro. Halla los números.**

Primer número: x

Segundo número: $\frac{x}{4}$

$$x + \frac{x}{4} = 55 \rightarrow x = 44$$

Los números son 44 y 11.

079 ●● **Encuentra dos números sabiendo que su suma es 20 y se diferencian en 6 unidades.**

Primer número: x

Segundo número: $x - 6$

$$x + (x - 6) = 20$$

$$x = 13$$

Los números son 13 y 7.

080 ●● **La suma de tres números es 330. El primero es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcula dichos números.**

Tercer número: x

Segundo número: $3x$

Primer número: $6x$

$$x + 3x + 6x = 330$$

$$x = 33$$

Los números son 33, 99 y 198.

081 ●● **Un trayecto en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada kilómetro. Si pagamos 13 €, ¿qué distancia hemos recorrido?**

Distancia (en km): x

$$2{,}50 + 1{,}50x = 13$$

$$x = 7$$

Hemos recorrido 7 km.

082 ●● **En el zoológico hay el doble de tigres que de panteras, y sabemos que en total son 171 animales. Determina cuántos hay de cada especie.**

Panteras: x

Tigres: $2x$

$$2x + x = 171$$

$$x = 57$$

Hay 57 panteras y 114 tigres.

083 ●●

Carlos, David y Sergio han ganado 3 200 € y deciden repartirlo así: Carlos tendrá 200 € menos que Sergio, y David 200 € menos que Carlos. Calcula el dinero de cada uno.

Sergio: x
Carlos: $x - 200$
David: $(x - 200) - 200$

$$x + (x - 200) + (x - 400) = 3\,200 \rightarrow 3x - 600 = 3\,200 \rightarrow 3x = 3\,800 \rightarrow x = 1\,266{,}\widehat{6}$$

Sergio: 1 266 € y 67 céntimos

Carlos: 1 066 € y 67 céntimos

David: 866 € y 67 céntimos

084 ●●

En una clase hay $\frac{3}{7}$ partes de chicos y las chicas son 16. ¿Cuántos chicos hay en la clase?

Alumnos: x Chicos: $\frac{3x}{7}$ Chicas: $\frac{4x}{7} = 16$

$\frac{4x}{7} = 16 \rightarrow x = 28$ alumnos

El número de chicos es: $\frac{3}{7} \cdot 28 = 12$ chicos

085 ●●

Juan realiza la cuarta parte de un viaje en autobús, la sexta parte en moto, tres octavas partes en bicicleta, y los últimos 40 km andando.

a) ¿Qué distancia recorrió en total?

b) ¿Qué distancia ha recorrido en cada medio de transporte?

Recorrido total: x

En autobús: $\frac{x}{4}$ En moto: $\frac{x}{6}$ En bicicleta: $\frac{3x}{8}$ Andando: 40 km

a) $40 = x - \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{3x}{8}\right) \rightarrow 960 = 24x - 19x \rightarrow x = 192$ km

b) En autobús: 48 km En bicicleta: 72 km
En moto: 32 km Andando: 40 km

086 ●●

Luis tiene 92 monedas de 1, 2 y 5 céntimos. Calcula cuántas monedas tiene de cada tipo si las monedas de 1 céntimo son la tercera parte de las de 5 céntimos, y estas son el quíntuplo de las monedas de 2 céntimos.

Monedas de 5 céntimos: x

Monedas de 2 céntimos: $\frac{x}{5}$

Monedas de 1 céntimo: $\frac{x}{3}$

$$x + \frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 92 \rightarrow 15x + 3x + 5x = 1380 \rightarrow x = 60$$

Monedas de 5 céntimos: 60

Monedas de 2 céntimos: 12

Monedas de 1 céntimo: 20

087 ●●

María se entrena aumentando el recorrido del día anterior en 1 km. Al cabo de siete días, el recorrido total que ha hecho es de 42 km. ¿Cuánto ha entrenado el último día?

Día 1: x

Día 2: $x + 1$

Día 3: $x + 2$

Día 4: $x + 3$

Día 5: $x + 4$

Día 6: $x + 5$

Día 7: $x + 6$

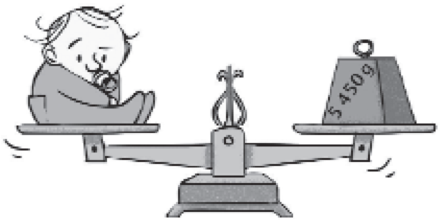
Total: $7x + 21$

$$7x + 21 = 42$$
$$x = 3$$

El último día entrenó: $3 + 6 = 9$ km

088 ●●

Un bebé gana durante su primer mes de vida la quinta parte de su peso, y en el segundo mes aumenta las cuatro quintas partes del peso que aumentó en el mes anterior. Si al acabar el segundo mes pesa 5 450 g, ¿cuánto pesó al nacer?



$$\left.\begin{array}{l}\text{Peso al nacer: } x\\ \text{El 1.}^{\text{er}}\text{ mes ganó: } \frac{x}{5}\\ \text{El 2.}^{\text{o}}\text{ mes ganó: } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{x}{5}\end{array}\right\} \rightarrow x + \frac{x}{5} + \frac{4x}{25} = 5\,450$$

$$25x + 25 \cdot \frac{x}{5} + 25 \cdot \frac{4x}{25} = 25 \cdot 5\,450 \rightarrow 25x + 5x + 4x = 136\,250$$
$$\rightarrow 34x = 136\,250 \rightarrow x = \frac{136\,250}{34} = 4\,007{,}4 \text{ g}$$

El bebé pesó al nacer 4 007,4 g.

089 ●●● **Preguntamos la hora y nos contestan de la siguiente manera: «Lo que queda de día es igual a 7 veces la quinta parte de las horas que han transcurrido». ¿Qué hora es?**

$$\left.\begin{array}{l}x\text{: lo que queda del día}\\ 24 - x\text{: lo que ha transcurrido del día}\end{array}\right\} \rightarrow x = 7 \cdot \frac{24 - x}{5}$$

$5x = 7(24 - x) \rightarrow 5x = 168 - 7x \rightarrow 12x = 168 \rightarrow x = 14$ horas

Por tanto, son las 10 de la mañana.

090 ●●● **Averigua mi edad si tengo el triple de la edad que tenía hace 8 años.**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Edad actual: } x\\ \text{Edad hace 8 años: } 3(x - 8)\end{array}\right\} \rightarrow \quad x = 3(x - 8)$$

$x = 3x - 24 \rightarrow 2x = 24$

Actualmente tengo 12 años.

091 ●●● **Una madre tiene 36 años y las edades de sus tres hijos suman 18 años.**

a) ¿Cuántos años tienen que pasar para que sumen la edad de la madre?

b) ¿Y para que sumen el doble de su edad?

a) Años que tienen que pasar: x

$36 = 18 + 3x$

$x = 6$

Tienen que pasar 6 años.

b) Años que tienen que pasar: x

$72 = 18 + 3x$

$x = 18$

Tienen que pasar 18 años.

092 ●●● **Lola tiene ahorradas monedas de 50 céntimos y las cambia por monedas de 1 euro. Tras el cambio, tiene 80 monedas menos.**

a) ¿Cuánto dinero tiene Lola?

b) Si tuviese 120 monedas menos que al principio, ¿cuánto dinero tendría que cambiar?

c) ¿Y si las monedas fuesen de 20 céntimos y al cambiarlas obtuviese 60 monedas menos?

a) Monedas de 50 céntimos: x

Monedas de 1 €: $\frac{x}{2}$

$x - \frac{x}{2} = 80$

$x = 160$

Lola tiene 80 €.

b) $x - \frac{x}{2} = 120$

$x = 240$

Tendría que cambiar 120 €.

c) Monedas de 20 céntimos: x

Monedas de 1 €: $\frac{x}{5}$

$x - \frac{x}{5} = 60$

$x = 75$

Lola tiene 15 €.

093 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO?

El área de una parcela que tiene forma rectangular es 450 m². Si mide el doble de largo que de ancho, ¿cuánto medirá su ancho?

PRIMERO. Se identifica la incógnita.

Lo que sé...	Lo que no sé...
Parcela rectangular Área $= 450$ m^2 El doble de largo que de ancho	Medida del ancho

Incógnita (x) → Medida del ancho

SEGUNDO. Se plantea la ecuación.

$$\text{Ancho} \xrightarrow{\hspace{4cm}} x$$
$$\text{Largo} = \text{Doble que ancho} \xrightarrow{\hspace{2cm}} 2x$$
$$\text{Área} = 450\ \text{m}^2 \xrightarrow{\text{Área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}} x \cdot 2x = 450$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación.

$$x \cdot 2x = 450 \rightarrow 2x^2 = 450 \rightarrow x^2 = \frac{450}{2} = 225$$
$$\rightarrow x = \pm\sqrt{225} = \begin{cases} x_1 = +\sqrt{225} = 15 \\ x_2 = -\sqrt{225} = -15 \end{cases}$$

CUARTO. Se comprueba e interpreta la solución.

COMPROBACIÓN:

$$x \cdot 2x = 450 \xrightarrow{x = 15} 15 \cdot 2 \cdot 15 = 450 \rightarrow 450 = 450$$
$$x \cdot 2x = 450 \xrightarrow{x = -15} (-15) \cdot 2 \cdot (-15) = 450 \rightarrow 450 = 450$$

Ambos valores son soluciones de la ecuación.

INTERPRETACIÓN: Se descarta la solución −15, porque no existen longitudes negativas.

Por tanto, el ancho de la parcela es 15 m.

094 ●●

Halla las dimensiones de un rectángulo de área 30 cm², siendo la base la mitad de la altura.

Base: x

Altura: $2x$

$$x \cdot 2x = 30 \rightarrow 2x^2 = 30 \rightarrow x^2 = 15 \rightarrow x = \sqrt{15}$$

Base: $\sqrt{15}$ cm

Altura: $2\sqrt{15}$ cm

095 ●●

Calcula las dimensiones de un rectángulo de 80 cm^2 cuyo largo es 2 cm mayor que el ancho.

Ancho: x Largo: $x + 2$

$$x(x + 2) = 80 \rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = -10$$

Como las medidas de longitud tienen que ser positivas:

Ancho: 8 cm Largo: 10 cm

096 ●●●

Halla la longitud del lado de una parcela cuadrada si su área, más cinco veces su lado, menos 18, es igual a 482.

Lado: x Área: x^2

$$x^2 + 5x - 18 = 482 \rightarrow x^2 + 5x - 500 = 0 \rightarrow x_1 = -25,\ x_2 = 20$$

Como es válida solo la medida positiva, el lado de la parcela mide 20 m.

097 ●●●

La solución de esta ecuación es $x = 9$.

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{x-\Delta}{10} = x - 6$$

Investiga a qué número equivale el triángulo.

$$\frac{18-3}{5} - \frac{9-\Delta}{10} = 9 - 6 \rightarrow -\frac{9-\Delta}{10} = 3 \rightarrow \frac{9-\Delta}{10} = 0 \rightarrow \Delta = 9$$

098 ●●●

Investiga qué relación debe existir entre *b* y *c* para que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ sean iguales.

Basándote en tus investigaciones, escribe una ecuación de segundo grado cuyas dos soluciones sean 7.

¿Es posible que si *b* y *c* son números enteros y *b* es impar sean las dos soluciones iguales?

Para que las soluciones sean iguales, tenemos que:

$$\sqrt{b^2 - 4c} = 0 \rightarrow b^2 - 4c = 0 \rightarrow b^2 = 4c$$

Una posible ecuación con 7 como solución doble es: $x^2 - 14x + 49 = 0$

Si b y c son números enteros y b es impar no puede existir una solución doble, ya que b^2 sería impar y como $4c$ es par, las soluciones no serían iguales.

099 ●●● **Encuentra el error y recuerda que «2 no es igual a 1».**

$$x = y \xrightarrow{\cdot x} x^2 = xy \xrightarrow{-y^2} \overbrace{x^2 - y^2}^{\text{Diferencia de cuadrados}} = \overbrace{xy - y^2}^{\text{Factor común: } y} \rightarrow (x + y)(x - y) = y(x - y)$$

$$\xrightarrow{:(x - y)} x + y = y \xrightarrow{\text{Como } x = y} y + y = y \rightarrow 2y = y \xrightarrow{:y} 2 = 1$$

El error está en el paso en el que dividimos los términos entre $(x - y)$, ya que $x - y = 0$ y, además, no podemos dividir entre 0.

100 ●●● **Calcula el tiempo que necesitas para resolver este problema si empleas:**

- $\frac{1}{25}$ **partes del tiempo total en leerlo.**
- $\frac{1}{4}$ **partes del tiempo total en plantearlo.**
- $\frac{41}{100}$ **partes del tiempo total en resolverlo y minuto y medio en comprobarlo.**

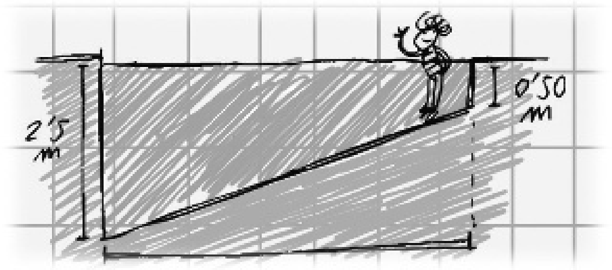
$$x - \frac{x}{25} - \frac{x}{4} - \frac{41x}{100} = 1{,}5 \rightarrow 100x - 4x - 25x - 41x = 150$$
$$\rightarrow 30x = 150 \rightarrow x = 5$$

Se necesitan 5 minutos para resolverlo.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

101 ●●● **La familia Alcubilla quiere construir una piscina en su jardín.**

Siguiendo estas indicaciones, Alberto ha dibujado el siguiente croquis de la piscina:



El único aspecto que quedaría por determinar sería el ancho de la piscina, que por las características del terreno en el que se construirá no puede ser superior a 9 m.

Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuáles son las dimensiones máximas de la piscina?

Eres capaz de… Resolver

b) Con esas dimensiones máximas, ¿cuánto medirá el área de las paredes y el fondo de la piscina?

Eres capaz de… Decidir

c) Celia ha encontrado en unos almacenes una oferta interesante de baldosas para cubrir la piscina, pero de cantidad limitada.
¿Tendrán suficientes baldosas para alicatar la piscina?

a) El largo no debe ser mayor de 8 m y el ancho no superior a 9 m. En una parte tendrá una profundidad de 2,5 m y en la otra, como máximo, de 0,5 m.

b) Longitud del fondo:

$$(2{,}5 - 2)^2 + 8^2 = (\text{Longitud del fondo})^2$$

$$\text{Longitud del fondo} = \sqrt{4 + 64} = 8{,}25\ \text{m}$$

El fondo es un rectángulo de largo 8,25 m y ancho 9 m.

Área del fondo: $9 \cdot 8{,}25 = 74{,}25$ m^2

Las paredes que marcan la profundidad de la piscina son rectángulos de 2,5 m × 9 m y 0,5 m × 9 m.

Área del lateral de la zona más profunda: $2{,}5 \cdot 9 = 22{,}5$ m^2

Área del lateral de la zona menos profunda: $0{,}5 \cdot 9 = 4{,}5$ m^2

Las otras dos paredes laterales son trapecios rectángulos con base mayor de 2,5 m, base menor 0,5 m y altura 8 m.

Área del lateral con forma de trapecio: $\dfrac{2{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 8 = 12$ m^2

Por tanto, el área de las paredes laterales y el fondo de la piscina es:

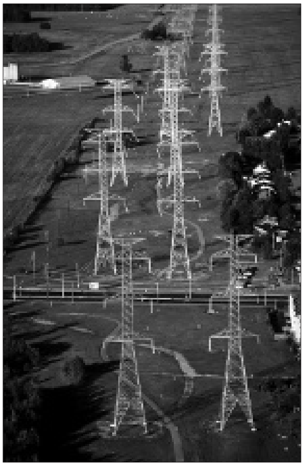
Área total $= 74{,}25 + 22{,}5 + 4{,}5 + 2 \cdot 12 = 125{,}25$ m^2

c) Área que cubren las baldosas: $24 \cdot 50 \cdot 30 \cdot 25 = 900\,000$ cm^2 $= 90$ m^2
Como $125{,}25$ m^2 > 90 m^2, no tendrán suficientes baldosas.

102 ●●●

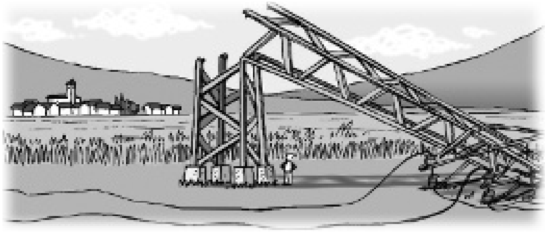
Los vientos han sido tan fuertes que han partido una torre eléctrica de alta tensión situada en el Cerro de los Mochuelos.

La torre medía 32 m de altura y se ha quebrado de tal manera que su extremo superior ha quedado apoyado en el suelo, a una distancia de 16 m de la base.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si la parte que se mantiene en pie mide *x*, ¿cuánto mide la parte quebrada?



ERES CAPAZ DE… RESOLVER

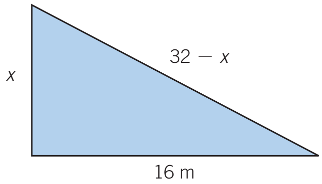
b) Los técnicos de la empresa encargada del mantenimiento dicen que podrían colocar unos refuerzos en cada uno de los cuatro pilares de sujeción que irían desde la base de la torre hasta la zona por donde se ha partido. ¿Qué altura deberían tener estos refuerzos?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Existen dos tipos de refuerzo: uno de hierro, que iría desde la base hasta 3 m por encima del extremo donde se ha quebrado, y cuyo coste es de 6,50 €/m, y otro de acero cuya longitud coincidiría con la parte que se ha mantenido en pie, y cuyo coste es de 9,10 €/m.

¿Cuál de los dos tipos es más conveniente?

a)



La parte quebrada medirá $32 - x$.

b) Tenemos un triángulo rectángulo de catetos x y 16 m, y con hipotenusa $32 - x$.

$$\begin{aligned}(32 - x)^2 &= x^2 + 16^2\\ 1024 - 64x + x^2 &= x^2 + 256\\ 64x &= 768\\ x &= 12\end{aligned}$$

Luego la altura de los refuerzos será de 12 m.

c) Refuerzo de hierro:

$$4 \cdot (12 + 3) \cdot 6{,}50 = 390\ €$$

Refuerzo de acero:

$$4 \cdot 12 \cdot 9{,}10 = 436{,}80\ €$$

Es más barato colocar refuerzos de hierro.

7 Sistemas de ecuaciones

Gabriel & Giovanni

No hacía mucho tiempo que los dos jóvenes, Gabriel Cramer y Giovanni Calandrini, habían sido rivales al competir por la misma cátedra de Filosofía, que los dos perdieron y, al mismo tiempo, los dos ganaron: la cátedra de Filosofía fue asignada a otra persona, pero ambos impresionaron tanto al tribunal que crearon una nueva cátedra de Matemáticas que fue adjudicada a los dos.

Y es que sus personalidades tan diferentes hicieron que se complementaran y, a la postre, se convirtieron en inseparables amigos.

Aquel día, un pensativo Calandrini le dijo a Cramer:

–Gabriel, te has dado cuenta de que pasamos una parte importante de nuestra vida averiguando lo que queremos ser, y cuando lo sabemos, gastamos el resto del tiempo intentando cambiar en lo que nos hemos convertido.

–La solución es sencilla –contestó Cramer–; ponemos a un lado lo que sabemos y al otro lo que no sabemos, y, planteando las relaciones de manera correcta, la solución surge ante nosotros de forma natural.

Calandrini dio un manotazo al aire y respondió:

–A veces me sacas de quicio, no sé por qué tienes que aplicar las Matemáticas a todo.

–Porque pienso que cualquier problema tiene su solución, aunque lamentablemente no somos capaces de plantear las ecuaciones adecuadas.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Uno de los científicos más destacables de Suiza del siglo XVIII fue Gabriel Cramer. Busca información sobre su vida y sus aportaciones a las matemáticas.**

Se puede encontrar un extracto de su biografía en:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/cramer.htm

Una biografía más extensa sobre la vida y obra de Cramer se puede encontrar en esta página web en inglés:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cramer.html

2 **Investiga sobre la rivalidad que existió entre Gabriel Cramer y Giovanni Calandrini.**

Algunos detalles sobre la amistad que unía a estos personajes se puede encontrar en:
http://www.educared.net/Concurso2010/710/biograf/Bcramer.html

De la misma manera se puede consultar la página web:
http://johnnfactor0109.blogspot.com/2009/10/el-padre-gabriel-cramer-fue-jean-isaac.html

3 **Analiza la evolución a lo largo de la historia en el estudio sobre sistemas de ecuaciones lineales.**

Un repaso histórico sobre la creación y los métodos de resolución de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales se puede encontrar en:
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Resuelve estas ecuaciones de primer grado.**

a) $5x + 4 = 3x$

b) $x - 2 + 8x = 7x + 6$

c) $x - 4 = 9x - 12$

a) $5x - 3x = -4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$

b) $9x - 7x = 6 + 2 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

c) $-4 + 12 = 9x - x \rightarrow 8 = 8x \rightarrow x = 1$

2 **Copia y completa esta tabla de valores:**

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3x - 2$	-8	-5	-2	1	4

3 **Halla el resultado de estas multiplicaciones de números enteros.**

a) $(-7) \cdot (+8)$
b) $(+7) \cdot (+8)$
c) $(+7) \cdot (-8)$
d) $(-7) \cdot (-8)$

a) -56
b) 56
c) -56
d) 56

Sistemas de ecuaciones

EJERCICIOS

001 **Decide si estas ecuaciones son lineales, y determina su número de incógnitas.**

a) $x + y = 0$ **b)** $x^2 - 2 = 0$ **c)** $3(x - y) = 10$

a) Ecuación lineal con dos incógnitas.

b) No es una ecuación lineal por ser de segundo grado.

c) Ecuación lineal con dos incógnitas.

002 **Comprueba si $x = -1$, $y = 8$ es solución de estas ecuaciones.**

a) $2x + y = 6$ **c)** $x - y = 7$

b) $7x - y = 11$ **d)** $x + y = 7$

a) $2 \cdot (-1) + 8 = 6 \rightarrow 6 = 6 \rightarrow$ Es solución.

b) $7 \cdot (-1) - 8 \neq 11 \rightarrow -15 \neq 11 \rightarrow$ No es solución.

c) $(-1) - 8 \neq 7 \rightarrow -9 \neq 7 \rightarrow$ No es solución.

d) $(-1) + 8 = 7 \rightarrow 7 = 7 \rightarrow$ Es solución.

003 **Expresa, mediante una ecuación lineal con dos incógnitas, los enunciados.**

a) La diferencia de dos números es 3.

b) El doble de un número más otro es 43.

a) $x - y = 3$

b) $2x + y = 43$

004 **Escribe dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea $x = 3$, $y = -2$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$2x + 3y = 0$ $x - 2y = 7$

005 **En una piscina, el ancho y el borde a ambos lados suman 16 metros.**

a) Plantea y resuelve la ecuación lineal con dos incógnitas para determinar la medida del ancho y del borde de la piscina.

b) Comprueba en la ecuación que el ancho de la piscina no puede medir 18 metros.

a) $x \rightarrow$ ancho de la piscina

$y \rightarrow$ borde de la piscina

$x + y = 16 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

b) Si $x = 18 \rightarrow 18 + y = 16 \rightarrow y = 16 - 18 = -2$

Si el ancho de la piscina fuese 18 m, el borde de la piscina tendría una medida negativa.

006 **Encuentra tres valores que sean soluciones y tres que no lo sean de estas ecuaciones.**

a) $\mathbf{x + 2y = 10}$ **b)** $\mathbf{2x + 3y = 5}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Si $x = 0 \to 0 - 2y = 10 \to y = -5$ Los valores $x = 0$, $y = -5$ son solución.

  Los valores $x = 0$, $y = 0$ no son solución.
- Si $x = 2 \to 2 - 2y = 10 \to y = -4$ Los valores $x = 2$, $y = -4$ son solución.

  Los valores $x = 2$, $y = 0$ no son solución.
- Si $x = 4 \to 4 - 2y = 10 \to y = -3$ Los valores $x = 4$, $y = -3$ son solución.

  Los valores $x = 4$, $y = 0$ no son solución.

007 **Busca dos ecuaciones lineales que no tengan como solución** $\mathbf{x = -1}$ **e** $\mathbf{y = 3}$**.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x + y = 0$ $x - y = 0$

008 **Decide cuáles de estos sistemas son lineales.**

a) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x - 2y = 5}\\ \mathbf{x + y^2 = 15}\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x - 2y = 9}\\ \mathbf{x + y = 8}\end{array}\right\}$

a) No es un sistema de ecuaciones lineales, la segunda ecuación es de segundo grado.

b) Es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

009 **Comprueba si** $\mathbf{x = 1}$ **e** $\mathbf{y = -1}$ **es solución de este sistema:**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x - 3y = 5}\\ \mathbf{x + y = 0}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5\\ 1 + (-1) = 0\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}5 = 5\\ 0 = 0\end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones se verifican, por lo que es solución.

010 **Si en el sistema** $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + y = 3}\\ \mathbf{x + 5y = 15}\end{array}\right\}$**,** $\mathbf{x}$ **toma el valor 0, ¿qué valor tendrá** $\mathbf{y}$ **para obtener la solución?**

$$\left.\begin{array}{r}2x + y = 3\\ x + 5y = 15\end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0} \left.\begin{array}{r}2 \cdot 0 + y = 3\\ 0 + 5y = 15\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to y = 3\\ \to y = \dfrac{15}{5} = 3\end{array}$$

La solución es: $x = 0$, $y = 3$

011 **Dada la ecuación $x + 3y = 20$, comprueba que una de las soluciones es $x = 8$ e $y = 4$, y escribe otra ecuación para que se forme un sistema de ecuaciones lineales con esa solución.**

$x + 3y = 20 \xrightarrow{x = 8,\, y = 4} 8 + 3 \cdot 4 = 20 \rightarrow$ Es solución.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Otra ecuación de la que es solución es:

$x - 2y = 0 \xrightarrow{x = 8,\, y = 4} 8 - 2 \cdot 4 = 0 \rightarrow$ Es solución.

El sistema del que es solución sería:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 20 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

012 **Si en el sistema $\left.\begin{array}{r} -x + y = 3 \\ 2x = y \end{array}\right\}$, x toma estos valores, ¿qué valores tendrá y en cada una de las ecuaciones? ¿Cuál es la solución del sistema?**

a) $x = 0$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = -1$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 3 \\ 2x = y \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0} \left.\begin{array}{r} 0 + y = 3 \\ 2 \cdot 0 = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 3 \\ \rightarrow y = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 3 \\ 2x = y \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 2} \left.\begin{array}{r} -2 + y = 3 \\ 2 \cdot 2 = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 5 \\ \rightarrow y = 4 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 3 \\ 2x = y \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 3} \left.\begin{array}{r} -3 + y = 3 \\ 2 \cdot 3 = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 6 \\ \rightarrow y = 6 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 3 \\ 2x = y \end{array}\right\} \xrightarrow{x = -1} \left.\begin{array}{r} 1 + y = 3 \\ 2 \cdot (-1) = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 2 \\ \rightarrow y = -2 \end{array}$

La solución es: $x = 3$, $y = 6$

013 **Utiliza tablas para resolver estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ y - x = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

a)

x	0	1	**2**
$y = 5 - x$	5	4	**3**
$y = 1 + x$	1	2	**3**

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 3$

b)

x	0	1	2	**3**
$y = 6 - x$	6	5	4	**3**
$y = x$	0	1	2	**3**

La solución del sistema es: $x = 3$, $y = 3$

014 **Halla la solución de los sistemas utilizando tablas.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = -7 \end{array}\right\}$

a)

y	0	1	2	-1	$\mathbf{-2}$
$x = -3 - 2y$	-3	-5	-7	-2	**1**
$x = 5 + 2y$	5	7	9	3	**1**

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -2$

b)

x	0	1	2	-1	-2	$\mathbf{-3}$
$y = x - 1$	-1	0	1	-2	-3	$\mathbf{-4}$
$x = -7 - x$	-7	-8	-9	-6	-5	$\mathbf{-4}$

La solución del sistema es: $x = -3$, $y = -4$

015 **Raquel paga 3 € por 1 bote de gel y 1 bolsa de galletas, y Luis paga 4 € por 1 bote de gel y 2 bolsas de galletas. Calcula el precio de cada producto.**

Precio del gel: x Precio de las galletas: y

$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow$

x	0	1	**2**
$y = 3 - x$	3	2	**1**
$y = \dfrac{4 - x}{2}$	2	$\dfrac{3}{2}$	**1**

El precio del bote de gel es 2 € y el precio de la bolsa de galletas es 1 €.

016 **Resuelve por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos x: $x = 12 - y$

2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $(12 - y) - y = 2$

3.º Resolvemos: $12 - 2y = 2 \rightarrow 10 = 2y \rightarrow y = 5$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 12 - 5 = 7$

5.º Solución: $x = 7$, $y = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos x: $x = 5 - y$

2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $-(5 - y) + 2y = -2$

3.º Resolvemos: $-5 + y + 2y = -2 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 5 - 1 = 4$

5.º Solución: $x = 4$, $y = 1$

017 **Resuelve por el método de sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x-(y+1)=3} \\ \mathbf{y+(x+2)=4} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{10(x-2)+y=1} \\ \mathbf{x+3(x-y)=5} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-(y+1)=3 \\ y+(x+2)=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=4 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la x: $x=2-y$

2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $(2-y)-y=4$

3.º Resolvemos: $2-y-y=4 \rightarrow -2=2y \rightarrow y=-1$

4.º Hallamos la otra variable: $x=2-(-1)=2+1=3$

5.º Solución: $x=3$, $y=-1$

b) $\left.\begin{array}{r} 10(x-2)+y=1 \\ x+3(x-y)=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+y=21 \\ 4x-3y=5 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la y: $y=21-10x$

2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $4x-3(21-10x)=5$

3.º Resolvemos: $4x-63+30x=5 \rightarrow 34x=68 \rightarrow x=2$

4.º Hallamos la otra variable: $y=21-20=1$

5.º Solución: $x=2$, $y=1$

018 **Corrige los errores cometidos al resolver el sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{5x-4y=1} \\ \mathbf{2x+4y=-1} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{x=(1-y)5}$$

$$\mathbf{2x+4y=-1 \xrightarrow{x=(1-y)5} 2(1-y)5+4y=-1 \rightarrow 2-2y+4y=-1}$$
$$\mathbf{\rightarrow 2y=-3 \rightarrow y=-3-2=-5}$$

$$\mathbf{x=(1-y)5 \xrightarrow{y=-5} x=\big(1-(-5)\big)5 \rightarrow x=30}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x-4y=1 \\ 2x+4y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow x=\frac{1+4y}{5}$$

$$2x+4y=-1 \xrightarrow{x=\frac{1+4y}{5}} 2\cdot\frac{1+4y}{5}+4y=-1 \rightarrow 2+8y+20y=-5$$
$$\rightarrow 28y=-7 \rightarrow y=\frac{-7}{28}=-\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1+4y}{5} \xrightarrow{y=-\frac{1}{4}} x=\frac{1+(-1)}{5}=0$$

019 **Resuelve por el método de igualación.**

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y=12} \\ \mathbf{x-y=2} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y=5} \\ \mathbf{-x+2y=-2} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la x en las dos ecuaciones: $x = 12 - y$; $x = 2 + y$

2.º Igualamos: $12 - y = 2 + y$

3.º Resolvemos: $12 - 2 = y + y \rightarrow 10 = 2y \rightarrow y = 5$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 12 - 5 = 7$

5.º Solución: $x = 7$, $y = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la x en las dos ecuaciones: $x = 5 - y$; $x = 2y + 2$

2.º Igualamos: $5 - y = 2y + 2$

3.º Resolvemos: $5 - 2 = 2y + y \rightarrow 3 = 3y \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 5 - 1 = 4$

5.º Solución: $x = 4$, $y = 1$

020 **Resuelve por los métodos de igualación y sustitución, y comprueba que coinciden las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - 3y = 7} \\ \mathbf{3x + 9y = -3} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{-4x + 3y = -7} \\ \mathbf{2x + 5y = 7} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 9y = -3 \end{array}\right\}$

Resolvemos por igualación: $x = \dfrac{7 + 3y}{2}$; $x = \dfrac{-3 - 9y}{3} = -1 - 3y$

$$\frac{7 + 3y}{2} = -1 - 3y \rightarrow 7 + 3y = -2 - 6y \rightarrow 9y = -9 \rightarrow y = -1$$

$$x = \frac{7 + 3 \cdot (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{Solución: } x = 2,\ y = -1$$

Resolvemos por sustitución: $x = -1 - 3y$

$2(-1 - 3y) - 3y = 7 \rightarrow -2 - 6y - 3y = 7 \rightarrow -9y = 9 \rightarrow y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -7 \\ 2x + 5y = 7 \end{array}\right\}$

Resolvemos por igualación: $x = \dfrac{3y + 7}{4}$; $x = \dfrac{7 - 5y}{2}$

$$\frac{3y + 7}{4} = \frac{7 - 5y}{2} \rightarrow 6y + 14 = 28 - 20y \rightarrow 26y = 14 \rightarrow y = \frac{7}{13}$$

$$x = \frac{3 \cdot \frac{7}{13} + 7}{4} = \frac{28}{13} \quad \text{Solución: } x = \frac{28}{13},\ y = \frac{7}{13}$$

Resolvemos por sustitución: $x = \dfrac{3y + 7}{4}$

$$2\left(\frac{3y + 7}{4}\right) + 5y = 7 \rightarrow 6y + 14 + 20y = 20y = 28 \rightarrow 26y = 14 \rightarrow y = \frac{7}{13}$$

021 **Corrige los errores cometidos en la resolución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y = 7} \\ \mathbf{4x - y = 3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbf{x = 7 - y} \\ \rightarrow \mathbf{x = 3 + \dfrac{y}{4}} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ \dfrac{y}{4} \end{array}}\right\} \rightarrow \mathbf{7 - y = 3 + \dfrac{y}{4}}$$

$$\rightarrow \mathbf{4\,(7 - y) = 4\left(3 + \dfrac{y}{4}\right) \rightarrow 28 - 4y = 12 + 4y \rightarrow -8y = 40 \rightarrow y = 5}$$

$$\mathbf{x = 7 - y \xrightarrow{y\,=\,5} x = 7 - 5 = 2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\ x = 7 - y \\ \rightarrow\ x = \dfrac{3 + y}{4} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ \dfrac{3+y}{4} \end{array}}\right\} \rightarrow 7 - y = \frac{3 + y}{4} \rightarrow 4\,(7 - y) = 3 + y$$

$$\rightarrow\ 28 - 4y = 3 + y$$

$$\rightarrow\ -5y = -25\ \rightarrow\ y = 5$$

$$x = 7 - y \xrightarrow{y\,=\,5} x = 2$$

022 **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x + y = 12} \\ \mathbf{x - y = 2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + y = 5} \\ \mathbf{-x + 2y = -2} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y para reducir.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $2x = 14$

3.º Resolvemos: $x = 7$

4.º Hallamos la otra variable: $7 + y = 12\ \rightarrow\ y = 5$

5.º Solución: $x = 7$, $y = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ -x + 2y = -2 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable x para reducir.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $3y = 3$

3.º Resolvemos: $y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x + 1 = 5\ \rightarrow\ x = 4$

5.º Solución: $x = 4$, $y = 1$

023 **Resuelve estos sistemas por los métodos de sustitución, igualación y reducción, y comprueba que coincide la solución.**

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ -x - y = -3 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ -x - y = -3 \end{array}\right\}$$

1.º Elegimos la variable x.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $2y = 2$

3.º Resolvemos: $y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$

5.º Solución: $x = 2$, $y = 1$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x + 3y = 25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-1).

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $10x = 100$

3.º Resolvemos: $x = 10$

4.º Hallamos la otra variable: $20 - 3y = -25 \rightarrow 45 = 3y \rightarrow y = 15$

5.º Solución: $x = 10$, $y = 15$

024 **Corrige los errores cometidos.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 3 \\ -\quad 3x + 2y = -4 \\ \hline 5y = 7 \end{array} \rightarrow y = \frac{7}{5}$$

$$x + y = 0 \xrightarrow{y = \frac{7}{5}} x + \frac{7}{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{5}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 3y = 0 \\ -\quad 3x + 2y = -4 \\ \hline y = 4 \end{array}$$

$$x + y = 0 \xrightarrow{y = 4} x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$

025 **Resuelve por el método de reducción.**

a) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x + 5y = 20}\\ \mathbf{7x + 4y = 39}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x + 3y = 13}\\ \mathbf{3x + 2y = 12}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3x + 5y = 20\\ 7x + 4y = 39\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}21x + 35y = 140\\ -21x - 12y = 117\end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable *y*, y multiplicamos la 1.ª ecuación por 7 y la 2.ª ecuación por (−3).

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $23y = 23$

3.º Resolvemos: $y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $3x + 5 = 20 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$

5.º Solución: $x = 5$, $y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r}2x + 3y = 13\\ 3x + 2y = 12\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}6x + 9y = 39\\ -6x - 4y = -24\end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable *x*, y multiplicamos la 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª ecuación por (−2).

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $5y = 15$

3.º Resolvemos: $y = 3$

4.º Hallamos la otra variable: $2x + 9 = 13 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

5.º Solución: $x = 2$, $y = 3$

026 **Resuelve este sistema por el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1}\\ \mathbf{x + 2y = 2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1\\ x + 2y = 2\end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot\, 2} \left.\begin{array}{r}x - \frac{3}{2}y = 2\\ x + 2y = 2\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r}- \left.\begin{array}{r}x - \frac{3}{2}y = 2\\ x + 2y = 2\end{array}\right\}\\ \hline -\frac{7}{2}y = 0 \rightarrow y = 0\end{array}$$

$$x + 2y = 2 \xrightarrow{y = 0} x = 2$$

027 Resuelve estos sistemas por el método que creas más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ 5x + 2y = 12 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 15 \end{array}\right\}$

En todos los casos elegimos el método de reducción por ser el más rápido, y poderse aplicar multiplicando una sola ecuación por un número.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ 5x + 2y = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4x - 2y = -14 \\ 5x + 2y = 12 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-2).

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $x = -2$

3.º Hallamos la otra variable: $2 \cdot (-2) + y = 7 \rightarrow y = 11$

4.º Solución: $x = -2$, $y = 11$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $3x = 6$

3.º Resolvemos: $x = 2$

4.º Hallamos la otra variable: $2 + y = 5 \rightarrow y = 3$

5.º Solución: $x = 2$, $y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y = -9 \\ 2x + 5y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4x - y = -9 \\ 4x + 10y = 18 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable x, y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.

2.º Sumamos las dos ecuaciones y resolvemos: $9y = 9 \rightarrow y = 1$

3.º Hallamos la otra variable: $-4x - 1 = -9 \rightarrow -4x = -8 \rightarrow x = 2$

4.º Solución: $x = 2$, $y = 1$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.

2.º Sumamos las dos ecuaciones y resolvemos: $5x = 15 \rightarrow x = 3$

3.º Hallamos la otra variable: $3 + y = 5 \rightarrow y = 2$

4.º Solución: $x = 3$, $y = 2$

e) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 4x + 2y &= 14 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -x - 2y &= -5 \\ 4x + 2y &= 14 \end{aligned}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-1).
2.º Sumamos las dos ecuaciones y resolvemos: $3x = 9 \rightarrow x = 3$
3.º Hallamos la otra variable: $3 + 2y = 5 \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = 1$
4.º Solución: $x = 3$, $y = 1$

f) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 8 \\ 3x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -2x - 2y &= -8 \\ 3x + 2y &= 15 \end{aligned}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-1).
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $x = 7$
3.º Hallamos la otra variable: $14 + 2y = 8 \rightarrow 2y = -6 \rightarrow y = -3$
4.º Solución: $x = 7$, $y = -3$

028 **Busca dos números cuya suma es 14 y su diferencia es 4.**

Un número: x Otro número: y

Suma: $x + y$

Diferencia: $x - y$

Sistema: $\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

Sumando las ecuaciones obtenemos: $2x = 18 \rightarrow x = 9$

Y sustituyendo en la 1.ª ecuación: $y = 5$

Los números buscados son 9 y 5.

029 **¿Qué dos números suman 21 y el doble de uno más el triple del otro es 56?**

Un número: x Otro número: y

$\left.\begin{aligned} x + y &= 21 \\ 2x + 3y &= 56 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 21 - y$

$2x + 3y = 56 \xrightarrow{x = 21 - y} 42 - 2y + 3y = 56 \rightarrow y = 14, x = 7$

Los números buscados son 7 y 14.

030 **Reparte 60 € entre dos personas, de manera que una obtenga el doble de dinero que la otra.**

Dinero de una persona: x Dinero de la otra persona: y

Una persona tiene el doble de dinero que la otra: $x = 2y$

Dinero de las dos personas: $x + y = 60$

Sistema: $\left.\begin{aligned} x &= 2y \\ x + y &= 60 \end{aligned}\right\}$

Sustituyendo la 1.ª ecuación en la 2.ª: $3y = 60 \rightarrow y = 20$

Y sustituyendo en la 1.ª: $x = 40$

El reparto es 40 € y 20 €.

031 **En una granja hay 100 animales, entre conejos y gallinas. Las patas de estos animales son 260. Halla el número de conejos y gallinas que hay en la granja.**

Conejos: x Gallinas: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 260 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la 1.ª ecuación:

$y = 100 - x$

Sustituimos en la 2.ª ecuación:

$$4x + 2(100 - x) = 260 \rightarrow 4x + 200 - 2x = 260 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

Hallamos la otra variable:
$y = 100 - 30 = 70$

Hay 30 conejos y 70 gallinas.

032 **En una cafetería, el camarero anota: mesa A: 2 cafés y 4 zumos, 16 €; mesa B: 3 cafés y 2 zumos, 12 €. Halla el precio del café.**

Cafés: x Zumos: y

Anotaciones del camarero:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 16 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 16 \\ -6x - 4y = -24 \end{array}\right\} \rightarrow -4x = -8 \rightarrow x = 2$$

$$4 + 4y = 16 \rightarrow 4y = 12 \rightarrow y = 3$$

Los cafés cuestan 2 € y los zumos cuestan 3 €.

033 **En un avión vuelan 192 pasajeros entre hombres y mujeres. El número de mujeres es $\frac{3}{5}$ del número de hombres. ¿Cuántos hombres hay en el avión? ¿Y mujeres?**

Hombres: x Mujeres: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 192 \\ y = \frac{3}{5}x \end{array}\right\} \rightarrow x + \frac{3}{5}x = 192 \rightarrow 5x + 3x = 960 \rightarrow x = 120,\ y = 72$$

Hay 120 hombres y 72 mujeres.

034 **En un aparcamiento hay 120 vehículos entre coches y motos. Si se van 40 coches, el número de coches y el número de motos es el mismo. ¿Cuántos coches hay en el aparcamiento? ¿Y motos?**

Coches: x Motos: y

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ x - 40 = y \end{array}\right\} \xrightarrow{y = x - 40} x + x - 40 = 120 \rightarrow 2x = 160 \rightarrow x = 80,\ y = 40$$

En el aparcamiento hay 80 coches y 40 motos.

035 **Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Si el padre tuviera 30 años menos, y el hijo, 8 años más, ambos tendrían la misma edad. ¿Cuáles son las edades del padre y el hijo?**

Padre: x Hijo: y

$$\left.\begin{aligned} x &= 3y \\ x - 30 &= y + 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 3y} 3y - 30 = y + 8 \rightarrow 2y = 38$$

$$\rightarrow y = 19,\ x = 57$$

El padre tiene 57 años y el hijo tiene 19 años.

ACTIVIDADES

036 ● **Identifica cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

a) $x + 2y = 4$

b) $x + y = 0$

c) $x + y = x$

d) $2(x - y) = 3x$

e) $\frac{x - y}{5} = 3$

f) $x^2 = y$

g) $x + y = y$

h) $-x = 2y$

i) $x \cdot y = 8$

j) $\frac{x^2}{y} = 8$

Son ecuaciones lineales con dos incógnitas: a), b), c), d), e), g) y h).

037 ● **Dada la ecuación $2x - 3y = 7$, di cuál es su solución.**

a) $x = 1, y = 5$ **b)** $x = 5, y = 1$

a) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$ → No es solución.

b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$ ⟶ Es solución.

038 ● **¿Cuáles de estas ecuaciones tienen como solución $x = -1, y = 3$?**

a) $3x + y = 3$

b) $3x - y = 0$

c) $3x - \frac{y}{3} = 0$

d) $\frac{x}{3} - \frac{y}{9} = 1$

Ninguna de las ecuaciones tiene como solución $x = -1, y = 3$.

039 ●● **Escribe tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como solución $x = 2, y = -1$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$x + y = 1$

$2x + 3y = 1$

$3x - 2y = 8$

040 ●●

Comprueba que si $x = 2$, $y = -3$ es solución de una ecuación, también lo será de la ecuación que resulta al:

a) Sumar 8 en los dos miembros.

b) Restar 10 en los dos miembros.

c) Multiplicar los dos miembros por 3.

d) Dividir los dos miembros entre 5.

Es cierto porque al sumar, restar, multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número, las ecuaciones resultantes son equivalentes.

041 ●●

Comprueba que $x = 2$, $y = 1$ es solución de las ecuaciones.

a) $3x + 2y = 8$

b) $\frac{3}{2}x + y = 4$

c) $9x + 6y = 24$

d) $12x + 8y = 32$

e) $15x + 10y = 40$

f) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 2$

g) $6x + 4y = 16$

h) $x + \frac{2}{3}y = \frac{8}{3}$

¿Encuentras alguna relación entre ellas?

a) $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$

b) $\frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = 4$

c) $9 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 24$

d) $12 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 32$

e) $15 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 40$

f) $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$

g) $6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$

h) $2 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$

La relación que hay entre las ecuaciones es:

b) $= \frac{\text{a)}}{2}$

c) $= 3\text{a)}$

d) $= 4\text{a)}$

e) $= 5\text{a)}$

f) $= \frac{\text{a)}}{4}$

g) $= 2\text{a)}$

h) $= \frac{\text{a)}}{3}$

042 ●

¿Son los valores $x = -2$, $y = -1$ solución de estos sistemas de ecuaciones?

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= -5 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ x - 2y &= -4 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} x + y &= -3 \\ -x - 2y &= 4 \end{aligned}\right\}$

a) $-2 + (-1) = -3 \neq 3 \rightarrow$ No es solución.

b) $\left.\begin{aligned} 3 \cdot (-2) - (-1) &= -5 \\ -2 - 2 \cdot (-1) &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$ Es solución.

c) $-2 - 2 \cdot (-1) = 0 \neq -4 \rightarrow$ No es solución.

d) $\left.\begin{aligned} (-2) + (-1) &= -3 \\ -(-2) - 2 \cdot (-1) &= 4 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$ Es solución.

043 **Escribe un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea:**

a) $x = 3,\ y = 4$

b) $x = -2,\ y = 5$

c) $x = 8,\ y = 10$

d) $x = \dfrac{1}{2},\ y = 8$

e) $x = -4;\ y = 0{,}5$

f) $x = 6,\ y = 0$

g) $x = -2,\ y = -2$

h) $x = 0,\ y = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = -17 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y = -2 \\ x + 2y = 28 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -7 \\ 4x + y = 10 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x - 4y = -6 \\ 3x + 2y = -11 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ x + 5y = 6 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -10 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 0 \\ x + 6y = 0 \end{array}\right\}$

044 **Resuelve por el método de sustitución los sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 4 - 3y$
2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $2(4 - 3y) - 3y = -1$
3.º Resolvemos: $8 - 6y - 3y = -1 \rightarrow 9 = 9y \rightarrow y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 4 - 3 = 1$
5.º Solución: $x = 1,\ y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 1 + 2y$
2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $2(1 + 2y) + 2y = 8$
3.º Resolvemos: $2 + 4y + 2y = 8 \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 1 + 2 = 3$
5.º Solución: $x = 3,\ y = 1$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 3y$
2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $2 \cdot 3y + y = 7$
3.º Resolvemos: $6y + y = 7 \rightarrow 7y = 7 \rightarrow y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 3$
5.º Solución: $x = 3,\ y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable x: $x = y$
2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $5y + 3y = 16$
3.º Resolvemos: $8y = 16 \rightarrow y = 2$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 2$
5.º Solución: $x = 2, y = 2$

e) $\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 5 + y$
2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $2(5 + y) + y = 1$
3.º Resolvemos: $3y = -9 \rightarrow y = -3$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 2$
5.º Solución: $x = 2, y = -3$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\}$

1.º De la 1.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 9 - 4y$
2.º Sustituimos en la 2.ª ecuación: $3(9 - 4y) - 6y = 9$
3.º Resolvemos: $27 - 12y - 6y = 9 \rightarrow 18 = 18y \rightarrow y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 9 - 4 = 5$
5.º Solución: $x = 5, y = 1$

g) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable y: $y = 11 - 4x$
2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $5x - 3(11 - 4x) = 1$
3.º Resolvemos: $5x - 33 + 12x = 1 \rightarrow 17x = 34 \rightarrow x = 2$
4.º Hallamos la otra variable: $y = 11 - 8 = 3$
5.º Solución: $x = 2, y = 3$

h) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable y: $y = 14 - 4x$
2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $3x - 2(14 - 4x) = 5$
3.º Resolvemos: $3x - 28 + 8x = 5 \rightarrow 11x = 33 \rightarrow x = 3$
4.º Hallamos la otra variable: $y = 14 - 12 = 2$
5.º Solución: $x = 3, y = 2$

i) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable x: $x = 6 - 2y$
2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $(6 - 2y) + y = 5$
3.º Resolvemos: $6 - 2y + y = 5 \rightarrow y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x = 6 - 2 = 4$
5.º Solución: $x = 4, y = 1$

j) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$

1.º De la 2.ª ecuación despejamos la variable y: $y = x - 1$

2.º Sustituimos en la 1.ª ecuación: $x + 3(x - 1) = 5$

3.º Resolvemos: $x + 3x - 3 = 5 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$

4.º Hallamos la otra variable: $y = 2 - 1 = 1$

5.º Solución: $x = 2$, $y = 1$

045 **Resuelve estos sistemas por sustitución.**

a) $\left.\begin{array}{r} x = 3y + 2 \\ 2x - 5y = 5 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 11 \\ 5x - 3y = -19 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} -2x - 3y = -7 \\ 5x + y = -2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x = 1 - y \\ 3x + 2y = -1 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 4x + y = 6 \\ -x - y = 0 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x = 3y + 2 \\ 2x - 5y = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 3y + 2} 2(3y + 2) - 5y = 5$

$\rightarrow y = 1, x = 5$

b) $\left.\begin{array}{r} x = 1 - y \\ 3x + 2y = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1 - y} 3(1 - y) + 2y = -1$

$\rightarrow y = 4, x = -3$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 11 \\ 5x - 3y = -19 \end{array}\right\} \xrightarrow{} x = \dfrac{11 - 5y}{2}$

$5x - 3y = -19 \xrightarrow{x = \frac{11 - 5y}{2}} 5\left(\dfrac{11 - 5y}{2}\right) - 3y = -19$

$\rightarrow 55 - 25y - 6y = -38$

$\rightarrow y = 3, x = -2$

d) $\left.\begin{array}{r} 4x + y = 6 \\ -x - y = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{} y = 6 - 4x$

$-x - y = 0 \xrightarrow{y = 6 - 4x} -x - (6 - 4x) = 0$

$\rightarrow x = 2, y = -2$

e) $\left.\begin{array}{r} -2x - 3y = -7 \\ 5x + y = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{} y = -2 - 5x$

$-2x - 3y = -7 \xrightarrow{y = -2 - 5x} -2x - 3(-2 - 5x) = -7$

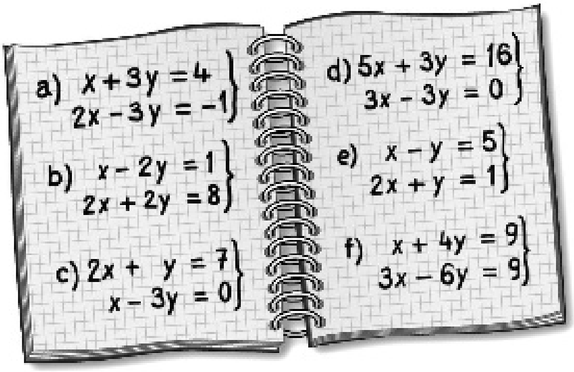
$\rightarrow x = -1, y = 3$

f) $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{} y = 9 - 2x$

$2x + 3y = 11 \xrightarrow{y = 9 - 2x} 2x + 3(9 - 2x) = 11$

$\rightarrow x = 4, y = 1$

046 ● **Resuelve por el método de igualación los sistemas de ecuaciones.**



a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable x: $x = 4 - 3y$; $x = \dfrac{3y - 1}{2}$

2.º Igualamos: $4 - 3y = \dfrac{3y - 1}{2}$

3.º Resolvemos: $8 - 6y = 3y - 1 \rightarrow 9 = 9y \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 4 - 3 = 1$

5.º Solución: $x = 1$, $y = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable x: $x = 1 + 2y$; $x = \dfrac{8 - 2y}{2}$

2.º Igualamos: $1 + 2y = \dfrac{8 - 2y}{2}$

3.º Resolvemos: $2 + 4y = 8 - 2y \rightarrow 6y = 6 \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 1 + 2 = 3$

5.º Solución: $x = 3$, $y = 1$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + \quad y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable x: $x = \dfrac{7 - y}{2}$; $x = 3y$

2.º Igualamos: $\dfrac{7 - y}{2} = 3y$

3.º Resolvemos: $7 - y = 6y \rightarrow 7 = 7y \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 3$

5.º Solución: $x = 3$, $y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable x: $x = \dfrac{16 - 3y}{5}$; $x = y$

2.º Igualamos: $\dfrac{16 - 3y}{5} = y$

3.º Resolvemos: $16 - 3y = 5y \rightarrow 16 = 8y \rightarrow y = 2$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 2$

5.º Solución: $x = 2$, $y = 2$

e) $\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable y: $y = x - 5$; $y = 1 - 2x$

2.º Igualamos: $x - 5 = 1 - 2x$

3.º Resolvemos: $3x = 6 \rightarrow x = 2$

4.º Hallamos la otra variable: $y = -3$

5.º Solución: $x = 2$, $y = -3$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\}$

1.º Despejamos la variable x: $x = 9 - 4y$; $x = 3 + 2y$

2.º Igualamos: $9 - 4y = 3 + 2y$

3.º Resolvemos: $6y = 6 \rightarrow y = 1$

4.º Hallamos la otra variable: $x = 9 - 4 = 5$

5.º Solución: $x = 5$, $y = 1$

047 ●

Resuelve estos sistemas por igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = 15 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 6y = 12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 7y = 5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y = 13 \\ 2x - 5y = -23 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2y - x = 3 \\ 3x + 7y = 43 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 11 \\ 2x + 5y = 29 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 7 \rightarrow x = \dfrac{7 - 2y}{3} \\ 4x - 3y = 15 \rightarrow x = \dfrac{15 + 3y}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7 - 2y}{3} = \frac{15 + 3y}{4}$$

$$\rightarrow 28 - 8y = 45 + 9y \rightarrow y = -1, x = 3$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 13 \rightarrow x = \dfrac{13 + 3y}{2} \\ 3x - 6y = 12 \rightarrow x = 4 + 2y \end{array}\right\} \rightarrow \frac{13 + 3y}{2} = 4 + 2y$$

$$\rightarrow 13 + 3y = 8 + 4y \rightarrow y = 5, x = 14$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}2x+4y=6\\3x+7y=5\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to x=3-2y\\\to x=\dfrac{5-7y}{3}\end{array}\end{array}\right\}\to 3-2y=\frac{5-7y}{3}$$

$$\to 9-6y=5-7y\to y=-4,\ x=11$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}x+y=13\\2x-5y=-23\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to x=13-y\\\to x=\dfrac{5y-23}{2}\end{array}\end{array}\right\}\to 13-y=\frac{5y-23}{2}$$

$$\to 26-2y=5y-23\to y=7,x=6$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}2y-x=3\\3x+7y=43\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to x=2y-3\\\to x=\dfrac{43-7y}{3}\end{array}\end{array}\right\}\to 2y-3=\frac{43-7y}{3}$$

$$\to 6y-9=43-7y\to y=4,x=5$$

f) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}3x+y=11\\2x+5y=29\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to y=11-3x\\\to y=\dfrac{29-2x}{5}\end{array}\end{array}\right\}\to 11-3x=\frac{29-2x}{5}$$

$$\to 55-15x=29-2x\to x=2,y=5$$

048 ●●

Resuelve por el método de reducción.

a) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+3y=4}\\\boldsymbol{2x-3y=-1}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x-2y=1}\\\boldsymbol{2x+2y=8}\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{2x+y=7}\\\boldsymbol{x-3y=0}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{5x+3y=16}\\\boldsymbol{3x-3y=0}\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+4y=9}\\\boldsymbol{3x-6y=9}\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{5x-3y=1}\\\boldsymbol{4x+y=11}\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{3x-2y=5}\\\boldsymbol{4x+y=14}\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+y=5}\\\boldsymbol{x+2y=6}\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}x+3y=4\\2x-3y=-1\end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $3x=3$

3.º Resolvemos: $x=1$

4.º Hallamos la otra variable: $1+3y=4\to 3y=3\to y=1$

5.º Solución: $x=1,\ y=1$

b) $\left.\begin{array}{r}x-2y=1\\2x+2y=8\end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y.

2.º Sumamos las dos ecuaciones: $3x=9$

3.º Resolvemos: $x=3$

4.º Hallamos la otra variable: $3-2y=1\to 2=2y\to y=1$

5.º Solución: $x=3,\ y=1$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 1.ª ecuación por 3.
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $7x = 21$
3.º Resolvemos: $x = 3$
4.º Hallamos la otra variable: $6 + y = 7 \rightarrow y = 1$
5.º Solución: $x = 3$, $y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y = 16 \\ 3x - 3y = 0 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y.
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $8x = 16$
3.º Resolvemos: $x = 2$
4.º Hallamos la otra variable: $10 + 3y = 16 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$
5.º Solución: $x = 2$, $y = 2$

e) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 9 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x - 12y = -27 \\ 3x - 6y = 9 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable x, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-3).
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $-18y = -18$
3.º Resolvemos: $y = 1$
4.º Hallamos la otra variable: $x + 4 = 9 \rightarrow x = 5$
5.º Solución: $x = 5$, $y = 1$

f) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 12x + 3y = 33 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 2.ª ecuación por 3.
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $17x = 34$
3.º Resolvemos: $x = 2$
4.º Hallamos la otra variable: $10 - 3y = 1 \rightarrow -3y = -9 \rightarrow y = 3$
5.º Solución: $x = 2$, $y = 3$

g) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 4x + y = 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 8x + 2y = 28 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable y, y multiplicamos la 2.ª ecuación por 2.
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $11x = 33$
3.º Resolvemos: $x = 3$
4.º Hallamos la otra variable: $9 - 2y = 5 \rightarrow 4 = 2y \rightarrow y = 2$
5.º Solución: $x = 3$, $y = 2$

h) $\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x - y = -5 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\}$

1.º Elegimos la variable x, y multiplicamos la 1.ª ecuación por (-1).
2.º Sumamos las dos ecuaciones: $y = 1$
3.º Hallamos la otra variable: $x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$
4.º Solución: $x = 4$, $y = 1$

049 ●

Resuelve estos sistemas por reducción.

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=0\\ x-y=-10\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} 4x-2y=-2\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=1\\ -x+4y=4\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{l} -3x+7y=-44\\ 2x-9y=38\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=-2\\ 2x+3y=0\end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{l} x-5y=6\\ x+4y=15\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=0\\ x-y=-10\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} x+y= 0\\ x-y= -10\end{array}\right\} \\ \hline 2y= 10 \end{array} \rightarrow y=5,\ x=-5$$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-5y=1\\ -x+4y=4\end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)}\end{array} \left.\begin{array}{l} 2x-5y=1\\ 2x-8y=-8\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} 2x-5y= 1\\ 2x-8y= -8\end{array}\right\} \\ \hline 3y= 9 \end{array} \rightarrow y=3,\ x=8$$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=-2\\ 2x+3y=0\end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2}\\ \xrightarrow{\cdot 3}\end{array} \left.\begin{array}{l} 6x+8y=-4\\ 6x+9y=0\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} 6x+8y= -4\\ 6x+9y= 0\end{array}\right\} \\ \hline -y= -4 \end{array} \rightarrow y=4,\ x=-6$$

d) $\left.\begin{array}{l} 4x-2y=-2\\ 5x+3y=6\end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 5}\\ \xrightarrow{\cdot 4}\end{array} \left.\begin{array}{l} 20x-10y=-10\\ 20x+12y=24\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} 20x-10y= -10\\ 20x+12y= 24\end{array}\right\} \\ \hline -22y= -34 \end{array} \rightarrow y=\frac{17}{11},\ x=\frac{3}{11}$$

e) $\left.\begin{array}{r} -3x+7y=-44\\ 2x-9y=38\end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2}\\ \xrightarrow{\cdot(-3)}\end{array} \left.\begin{array}{l} -6x+14y=-88\\ -6x+27y=-114\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} -6x+14y= -88\\ -6x+27y= -114\end{array}\right\} \\ \hline -13y= 26 \end{array} \rightarrow y=-2,\ x=10$$

f) $\left.\begin{array}{l} x-5y=6\\ x+4y=15\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} -\left.\begin{array}{r} x-5y= 6\\ x+4y= 15\end{array}\right\} \\ \hline -9y= -9 \end{array} \rightarrow y=1,\ x=11$$

050 ●●

Resuelve por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}$ Resolvemos por reducción. Sumando: $2x = 8 \rightarrow x = 4$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $4 + y = 2 \rightarrow y = -2$

Solución: $x = 4$, $y = -2$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ Resolvemos por reducción. Sumando: $4x = 8 \rightarrow x = 2$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación: $4 + 3y = 4 \rightarrow 3y = 0 \rightarrow y = 0$

Solución: $x = 2$, $y = 0$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 11 \end{array}\right\}$ Por sustitución: $x = 5 - 2y \rightarrow 2(5 - 2y) + 5y = 11$
$10 - 4y + 5y = 11 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 5 - 2 = 3$

Solución: $x = 3$, $y = 1$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\}$

Resolvemos por reducción, multiplicando la 2.ª ecuación por (-2), y sumando las dos ecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ -2x - 4y = -6 \end{array}\right\} \rightarrow -y = 2 \rightarrow y = -2 \rightarrow x - 4 = 3 \rightarrow x = 7$

Solución: $x = 7$, $y = -2$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ Resolvemos por reducción. Multiplicamos la 1.ª ecuación por 3: $3x + 3y = 27$

$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 27 \\ 20x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ Sumando: $23x = 23 \rightarrow x = 1 \rightarrow 1 + y = 9 \rightarrow y = 8$

Solución: $x = 1$, $y = 8$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$ Resolvemos por reducción. Multiplicamos la 1.ª ecuación por (-1): $-2x + 3y = 25$

$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = 25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$ Sumando: $10x = 100 \rightarrow x = 10$
$20 - 3y = -25 \rightarrow 45 = 3y \rightarrow y = 15$

Solución: $x = 10$, $y = 15$

g) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$ Resolvemos despejando la x en la 1.ª ecuación: $x = 5 - 2y$,

y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $2(5 - 2y) + y = 7$

$10 - 4y + y = 7 \rightarrow 3 = 3y \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3$, $y = 1$

h) $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 23 \\ -9x + 5y = 13 \end{array}\right\}$ Resolvemos por reducción. Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5: $25x - 5y = 115$

$\left.\begin{array}{r} 25x - 5y = 115 \\ -9x + 5y = 13 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones: $16x = 128$ $x = 8 \rightarrow 40 - y = 23 \rightarrow y = 17$

Solución: $x = 8$, $y = 17$

051 ●●

Resuelve por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 4 \\ 2x - 5y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 3 \\ 6x - y = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 10 \\ 2x + 7y = -4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 13 \\ 5x - 2y = 26 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 8x + 14y = -6 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x - \dfrac{4}{5}y = 13 \\ \dfrac{8}{3}x - \phantom{\dfrac{4}{5}}y = -4 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 4 \\ 2x - 5y = 8 \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 + 3y$

$$2x - 5y = 8 \xrightarrow{x = 4 + 3y} 2(4 + 3y) - 5y = 8 \rightarrow y = 0,\ x = 4$$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 3 \\ 6x - y = 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} 3x + y = 3 \\ + \quad 6x - y = 0 \\ \hline 9x = 3 \end{array} \rightarrow x = \frac{1}{3},\ y = 2$$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 10 \\ 2x + 7y = -4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 4x - 15y = 10 \\ 4x + 14y = -8 \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{r} 4x - 5y = 10 \\ - \quad 4x + 14y = -8 \\ \hline - 19y = 18 \end{array} \rightarrow y = \frac{-18}{19},\ x = \frac{25}{19}$$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = 13 \\ 5x - 2y = 26 \end{array}\right\} \rightarrow x = 13 + 3y$

$$5x - 2y = 26 \xrightarrow{x = 13 + 3y} 5(13 + 3y) - 2y = 26 \rightarrow y = -3,\ x = 4$$

e) $\left.\begin{array}{r} 8x + 14y = -6 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -y$

$$8x + 14y = -6 \xrightarrow{x = -y} -8y + 14y = -6 \rightarrow y = -1,\ x = 1$$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x - \dfrac{4}{5}y = 13 \\ \dfrac{8}{3}x - y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{8}{3}x + 4$

$$3x - \frac{4}{5}y = 13 \xrightarrow{y = \frac{8}{3}x + 4} 3x - \frac{4}{5}\left(\frac{8}{3}x + 4\right) = 13$$

$$\rightarrow 45x - 32x - 48 = 195 \rightarrow x = \frac{243}{13},\ y = \frac{700}{13}$$

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVE UN SISTEMA CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES?

Resuelve:

$$\left.\begin{aligned} 2(x-2)-3(y+1)+6&=17\\ 4(x-y)-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=25\end{aligned}\right\}$$

PRIMERO. Se eliminan paréntesis y denominadores, y se reducen los términos semejantes en las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 2(x-2)-3(y+1)+6&=17\\ 4(x-y)-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=25\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-4-3y-3+6&=17\\ 4x-4y-\frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=25\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-3y-1&=17\\ \frac{24x-24y-2x+3y}{6}&=25\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-\ \ 3y&=18\\ 22x-21y&=150\end{aligned}\right\}$$

SEGUNDO. Se resuelve por uno de los tres métodos, en este caso por reducción.

$$\left.\begin{aligned} 2x-\ \ 3y&=18\\ 22x-21y&=150\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\cdot(-11)} \begin{array}{rr} & \left.\begin{aligned}-\cancel{22x}+33y&=-198\\ \cancel{22x}-21y&=\ \ 150\end{aligned}\right\}\\ + & \\ \hline & 12y=-\ 48 \end{array}\rightarrow y=-4$$

$$2x-3y=18\xrightarrow{y=-4}2x-3\cdot(-4)=18\rightarrow x=3$$

053 ●●● **Resuelve estos sistemas.**

a) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x+3y}&\mathbf{=5+x+2y}\\ \mathbf{x-2y-3}&\mathbf{=3-4y}\end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{2y-x-1}&\mathbf{=4-y-2x}\\ \mathbf{2x-y}&\mathbf{=1+x}\end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{3y-2}&\mathbf{=x-2(x+y)}\\ \mathbf{(x+4)+2(y-2)}&\mathbf{=18-x-y}\end{aligned}\right\}$$

d) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{3x-2(y-1)}&\mathbf{=y-x+1}\\ \mathbf{2x-y}&\mathbf{=x+y-9}\end{aligned}\right\}$$

e) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{\frac{x}{2}-\frac{y}{5}}&\mathbf{=\frac{11}{5}}\\ \mathbf{\frac{4x-5y}{2}}&\mathbf{=2}\end{aligned}\right\}$$

f) $$\left.\begin{aligned} \mathbf{\frac{x+4y}{3}+\frac{x-y}{5}}&\mathbf{=\frac{2}{3}}\\ \mathbf{-x+5y}&\mathbf{=13}\end{aligned}\right\}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5+x+2y \\ x-2y-3=3-4y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\ \ y=5 \\ x+2y=6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-\ \ y=-5 \\ x+2y=6 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow y=1,\ x=4$$

Solución: $x=4$, $y=1$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2y-x-1=4-y-2x \\ 2x-y=1+x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=5 \\ x-\ \ y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-3y=-5 \\ x-\ \ y=1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow -4y=-4 \rightarrow y=1,\ x=2$$

Solución: $x=2$, $y=1$

c) $$\left.\begin{array}{r} 3y-2=x-2(x+y) \\ (x+4)+2(y-2)=18-x-y \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y-2=x-2x-2y \\ x+4+2y-4=18-x-y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+5y=2 \\ 2x+3y=18 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-10y=-4 \\ 2x+\ \ 3y=18 \end{array}\right\} \rightarrow -7y=14 \rightarrow y=-2,\ x=12$$

Solución: $x=12$, $y=-2$

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x-2(y-1)=y-x+1 \\ 2x-y=x+y-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y+2=y-x+1 \\ 2x-y=x+y-9 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x-3y=-1 \\ x-2y=-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x-3y=-1 \\ -4x+8y=36 \end{array}\right\} \rightarrow 5y=35 \rightarrow y=7,\ x=5$$

Solución: $x=5$, $y=7$

e) $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}=\dfrac{11}{5} \\ \dfrac{4x-5y}{2}=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 10} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} \left.\begin{array}{r} 5x-2y=22 \\ 4x-5y=4 \end{array}\right\} \rightarrow x=1+\frac{5y}{4}$$

$$5x-2y=22 \xrightarrow{x=1+\frac{5y}{4}} 5\left(1+\frac{5y}{4}\right)-2y=22$$

$$\rightarrow 20+25y-8y=88 \rightarrow y=4,\ x=6$$

Solución: $x=6$, $y=4$

f) $$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+4y}{3}+\dfrac{x-y}{5}=\dfrac{2}{3} \\ -x+5y=13 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 15} \left.\begin{array}{r} 5(x+4y)+3(x-y)=2\cdot 5 \\ -x+5y=13 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+17y=10 \\ -x+15y=13 \end{array}\right\} \rightarrow x=5y-13$$

$$8x+17y=10 \xrightarrow{x=5y-13} 8(5y-13)+17y=10$$

$$\rightarrow 40y-104+17y=10 \rightarrow y=2,\ x=-3$$

Solución: $x=-3$, $y=2$

054 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXPRESAN CIERTOS ENUNCIADOS MEDIANTE ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS?

Expresa mediante ecuaciones con dos incógnitas estos enunciados.

a) La suma de dos números es 33.
b) Cuatro sillas y una mesa cuestan 260 €.
c) Jaime pesa 22 kg más que su perro.
d) El ancho de un rectángulo es el doble que su altura.

PRIMERO. Se asigna una incógnita a cada dato desconocido.

Datos desconocidos	Incógnitas
Dos números	x, un número y, el otro número
Precio de una silla y una mesa	x, precio de una silla y, precio de una mesa
Peso de Jaime y su perro	x, peso de Jaime y, peso del perro
Ancho y altura de un rectángulo	x, ancho y, altura

SEGUNDO. Se relacionan los datos conocidos y desconocidos mediante una igualdad.

a) La suma de dos números es 33 $\longrightarrow x + y = 33$
b) 4 sillas y 1 mesa cuestan 260 € $\longrightarrow 4x + y = 260$
c) Jaime pesa 22 kg más que su perro → $x + 22 = y$
d) El ancho es el doble que la altura → $x = 2y$

055 ●●

Expresa mediante una ecuación lineal con dos incógnitas estos enunciados, e indica qué representan las incógnitas.

a) La suma de dos números es 15.
b) La mitad de un número más el doble de otro es igual a 52.
c) La diferencia entre las edades de un padre y un hijo es 28 años.
d) He recorrido 20 km más que tú.
e) Tengo 16,50 € en monedas de 1 € y 50 céntimos.
f) El precio de 2 kg de naranjas y 3 kg de manzanas es 5,80 €.
g) Dos bocadillos y tres refrescos cuestan 14 €.
h) El perímetro de un rectángulo es 32 m.

¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? Da una solución para cada una.

a) Un número: x Otro número: y Ecuación: $x + y = 15$ Solución: $x = 7$, $y = 8$

b) Un número: x Otro número: y Ecuación: $\frac{x}{2} + 2y = 52$
Solución: $x = 4$, $y = 25$

c) Edad del padre: x Edad del hijo: y
Ecuación: $x - y = 28$ Solución: $x = 50$, $y = 22$

d) Kilómetros recorridos por uno: x Kilómetros recorridos por otro: y
Ecuación: $x - y = 20$ Solución: $x = 35$, $y = 15$

e) Monedas de 1 €: x Monedas de 50 céntimos: y
Ecuación: $x + y \cdot 0{,}50 = 16{,}50$ Solución: $x = 10$, $y = 13$

f) Precio de 1 kg de naranjas: x Precio de 1 kg de manzanas: y
Ecuación: $2x + 3y = 5{,}80$ Solución: $x = 2$, $y = 0{,}60$

g) Precio de un bocadillo: x Precio de un refresco: y
Ecuación: $2x + 3y = 14$ Solución: $x = 4$, $y = 2$

h) Altura: x Ancho: y Ecuación: $2x + 2y = 32$ Solución: $x = 11$, $y = 5$

Todas las ecuaciones tienen infinitas soluciones.

056 ●●

Asocia a cada ecuación de la actividad anterior otra ecuación que resulte del mismo apartado en esta actividad. Calcula la solución del sistema de ecuaciones lineales que forman.

a) Su diferencia es 1.
b) La cuarta parte del primer número más la tercera parte del segundo es 16.
c) La edad del padre es cinco veces la del hijo.
d) He recorrido el doble de distancia que tú.
e) El número de monedas es 23.
f) El kilo de naranjas vale 40 céntimos más que el de manzanas.
g) Los bocadillos cuestan el doble que los refrescos.
h) La altura es tres quintas partes de la base.

a) Un número: x Otro número: y

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 15 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 8,\ y = 7$$

b) Un número: x Otro número: y

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + 2y &= 52 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} &= 16 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 4y &= 104 \\ 3x + 4y &= 192 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 44,\ y = 15$$

c) Edad del padre: x Edad del hijo: y

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 28 \\ x &= 5y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 35,\ y = 7$$

d) Kilómetros recorridos por uno: x Kilómetros recorridos por otro: y

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 20 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 40,\ y = 20$$

e) Monedas de 1 €: x Monedas de 50 céntimos: y

$$\left.\begin{aligned} x + 0{,}50y &= 16{,}50 \\ x + y &= 23 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 10,\ y = 13$$

f) Precio de 1 kg de naranjas: x Precio de 1 kg de manzanas: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5{,}80 \\ x &= y + 0{,}40 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1{,}40;\ y = 1$$

g) Precio de un bocadillo: x Precio de un refresco: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 4,\ y = 2$$

h) Altura: x Ancho: y

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 32 \\ x &= \frac{3}{5}y \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 6,\ y = 10$$

057 ●●

Ana tiene 5 cromos más que Juan y entre los dos suman 59 cromos. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

Cromos de Ana: x Cromos de Juan: y

Suma: $x + y$ Diferencia: $x - y$

Sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 59 \\ x - y = 5 \end{array}\right\}$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 64 \rightarrow x = 32, y = 27$

Ana tiene 32 cromos y Juan tiene 27 cromos.

058 ●●

En la clase de Alicia hay 21 alumnos, siendo 7 chicos más que chicas. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en la clase?

Chicos: x Chicas: y

Suma: $x + y$ Diferencia: $x - y$

Sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 21 \\ x - y = 7 \end{array}\right\}$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 28 \rightarrow x = 14, y = 7$

Hay 14 alumnos y 7 alumnas.

059 ●●

Juan tiene un total de 13 bolígrafos y rotuladores, y hay 3 rotuladores más que bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos y rotuladores tiene?

Rotuladores: x Bolígrafos: y

Suma: $x + y$ Diferencia: $x - y$

Sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 16 \rightarrow x = 8, y = 5$

Juan tiene 8 rotuladores y 5 bolígrafos.

060 ●●

María lleva en el monedero varias monedas de 20 y 5 céntimos. Di cuántas monedas tiene de cada tipo si son 12 monedas y suman un total de 1,50 €.

Monedas de 20 céntimos: x

Monedas de 5 céntimos: y

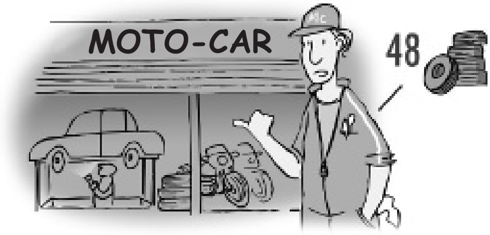
Sistema: $\left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ 0,20x + 0,05y = 1,5 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-0,05)} \left.\begin{array}{r} -0,05x - 0,05y = -0,6 \\ 0,2x + 0,05y = 1,5 \end{array}\right\}$

Sumando las dos ecuaciones: $0,15x = 0,9 \rightarrow x = 6, y = 6$

María tiene 6 monedas de cada tipo.

061 ●●

En un taller, el número de coches es igual al doble del número de motos más 2. Calcula el número de coches y motos si en total hay 48 ruedas.



Coches: x Motos: y

$$\left.\begin{array}{r} x = 2y + 2 \\ 4x + 2y = 48 \end{array}\right\}$$

$4x + 2y = 48 \xrightarrow{x = 2y + 2} 8y + 8 + 2y = 48 \rightarrow y = 4, x = 10$

Hay 10 coches y 4 motos.

062 ●●

Por un desierto avanza una caravana formada por camellos y dromedarios, con un total de 440 patas y 160 jorobas. ¿Cuántos camellos y dromedarios hay en la caravana?

Dromedarios: x Camellos: y

Total de patas: $4x + 4y = 440$

Total de jorobas: $x + 2y = 160$

Sistema: $\left.\begin{array}{r} 4x + 4y = 440 \\ x + 2y = 160 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r} 4x + 4y = 440 \\ -2x - 4y = -320 \end{array}\right\} \rightarrow 2x = 120$

$\rightarrow x = 60 \rightarrow 60 + 2y = 160 \rightarrow y = 50$

Hay 60 dromedarios y 50 camellos.

063 ●●

Ana recibe el doble de dinero que su hermana como paga semanal, y entre las dos suman 30 €. ¿Cuál es la paga de cada una?

Paga de Ana: x Paga de su hermana: y

$$\left.\begin{array}{r} x = 2y \\ x + y = 30 \end{array}\right\}$$

$x + y = 30 \xrightarrow{x = 2y} 3y = 30 \rightarrow y = 10, x = 20$

Ana recibe 20 € de paga y su hermana 10 €.

064 ●●

Una empresa de refrescos ha envasado 5 000 ℓ en 3 000 botellas de 1,5 ℓ y 2 ℓ. ¿Cuantas botellas ha empleado de cada clase?

Botellas de 1,5 ℓ: x Botellas de 2 ℓ: y

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5x + 2y = 5000 \\ x + y = 3000 \end{array}\right\} \rightarrow y = 3000 - x$$

$$1{,}5x + 2y = 5000 \xrightarrow{y\,=\,3000\,-\,x} 1{,}5x + 6000 - 2x = 5000$$

$$\rightarrow x = 2000,\ y = 1000$$

Ha empleado 2000 botellas de 1,5 ℓ y 1000 botellas de 2 ℓ.

065

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE PLANTEAN LOS PROBLEMAS DE EDADES MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES?

Plantea el siguiente problema:

«Calcula las edades de una madre y su hija, sabiendo que hace cuatro años la edad de la madre era el triple que la de la hija, y que dentro de ocho años será el doble».

PRIMERO. Se identifican las incógnitas.

Edad de la hija ⟶ x

Edad de la madre → y

SEGUNDO. Se indican los datos del problema.

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 8 años
Hija	$x - 4$	x	$x + 8$
Madre	$y - 4$	y	$y + 8$

TERCERO. Se escriben las ecuaciones.

Hace cuatro años la edad de la madre era el triple que la de la hija → $y - 4 = 3(x - 4)$

Dentro de ocho años será el doble ⟶ $y + 8 = 2(x + 8)$

066 ●●●

Halla las edades de dos personas si hace 10 años la primera tenía cuatro veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será el doble que la de la segunda.

Edades: x, y

Hace 10 años: $x - 10$, $y - 10$

Dentro de 20 años: $x + 20$, $y + 20$

$$\left.\begin{array}{r} x - 10 = 4(y - 10) \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 4y = -30 \\ x - 2y = 20 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-1)} \left.\begin{array}{r} x - 4y = -30 \\ -x + 2y = -20 \end{array}\right\}$$

Sumando: $-2y = -50 \rightarrow y = 25,\ x = 70$

Una persona tiene 70 años y la otra, 25 años.

067 ●●

Pablo tiene 8 años, y su hermana, 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Pablo será el doble que la de su hermana?

Tiempo que ha de pasar: x

La edad de Pablo es el doble que la de su hermana:

$8 + x = 2(2 + x) \rightarrow 8 + x = 4 + 2x \rightarrow x = 4$

Han de transcurrir 4 años.

068 ●●

Tomás es 5 años mayor que Elena y, dentro de 10 años, la edad de Tomás será $\frac{4}{3}$ de la edad de Elena. ¿Qué edad tiene Tomás?

Edad de Tomás: x Edad de Elena: y

$$\left.\begin{aligned} x &= y + 5 \\ x + 10 &= \frac{4(y+10)}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$x + 10 = \frac{4(y+10)}{3} \xrightarrow{x = y + 5} y + 5 + 10 = \frac{4(y+10)}{3}$$

$$\rightarrow 3y + 45 = 4y + 40 \rightarrow y = 5, x = 10$$

Tomás tiene 10 años y Elena tiene 5 años.

069 ●●

Cambiamos el valor de varias monedas de 1 céntimo de euro por monedas de 5 céntimos, obteniendo 60 monedas menos. ¿Cuántas monedas son de cada clase?

Monedas de 1 céntimo: x Monedas de 5 céntimos: y

$$\left.\begin{aligned} x &= 5y \\ x &= y + 60 \end{aligned}\right\}$$

$5y = y + 60 \rightarrow y = 15, x = 75$

Son 75 monedas de 1 céntimo o 15 monedas de 5 céntimos.

070 ●●●

Encuentra un número de tres cifras que cumpla las siguientes condiciones:

- **Que sea múltiplo de 9.**
- **Cuya cifra de las decenas sea 5.**
- **Que intercambiando la cifra de unidades y centenas, disminuya en 198.**

El número será de la forma $x5y$ o, lo que es lo mismo, $100x + 50 + y$.

Por ser múltiplo de 9, la suma: $x + 5 + y$ es múltiplo de 9

Y por la tercera condición:

$$100x + 50 + y = 100y + 50 + x + 198 \rightarrow 99x - 99y = 198$$

$$\rightarrow x - y = 2 \rightarrow x = 2 + y$$

Tenemos que $x + 5 + y = 2 + y + 5 + y = 2y + 7$ es múltiplo de 9, y como y debe estar entre 1 y 9, y además es un número natural, $y = 1$.
Así, el número buscado es 351.

071 **Realiza estos cálculos y contesta.**

1.° Piensa en un número de dos cifras.
2.° Multiplícalo por 5.
3.° Suma 25 a ese resultado.
4.° Divide entre 5.
5.° Réstale el número que habías pensado.

Prueba con otros números. ¿Obtienes siempre el mismo resultado? ¿Sabrías expresar algebraicamente lo que has hecho?

1.° Piensa en un número: x
2.° Multiplícalo por 5: $5x$
3.° Súmale 25: $5x + 25$
4.° Divide entre 5: $(5x + 25) : 5 = x + 5$
5.° Réstale el número: $x + 5 - x = 5$

Por tanto, el resultado es siempre 5.

072 **Un mes se puede expresar con una sola cifra, como junio, que sería el mes 6, o con dos, como octubre, noviembre o diciembre. Pero en cualquier caso se puede escribir como $10 \cdot a + b$. Así, por ejemplo, marzo se puede escribir como $10 \cdot a + b$, donde $a = 0$ y $b = 3$; y diciembre, como $10 \cdot a + b$, donde $a = 1$ y $b = 2$.**

Siguiendo estas indicaciones, explica por qué se puede adivinar la edad y el mes de nacimiento de cualquier persona siguiendo estos pasos:

1.° Multiplica por 2 tu mes de nacimiento.
2.° Súmale 5.
3.° Multiplícalo por 50.
4.° Súmale tu edad.
5.° Resta 250 al resultado y obtendrás
tu mes de nacimiento y tu edad.

1.° Multiplica por 2 el mes de nacimiento: $2(10a + b) = 20a + 2b$
2.° Súmale 5: $20a + 2b + 5$
3.° Multiplícalo por 50: $50(20a + 2b + 5) = 1000a + 100b + 250$
4.° Súmale tu edad $(10x + y)$: $1000a + 100b + 250 + 10x + y$
5.° Réstale 250:

$$1000a + 100b + 250 + 10x + y - 250 = 1000a + 100b + 10x + y$$

El resultado es *abxy*, siendo las dos primeras cifras el mes, y las otras, la edad.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

073 ●●● **Alfonso proyecta hacer un viaje para conocer a sus primos.**

Ha ido a la agencia de viajes para comprar los billetes de avión.

Según la información que aparece en el billete de ida, salen de Madrid el día 2 de mayo a las 10:00 h (hora de España) y llegan a Sidney a las 11:00 h (hora de Australia), pero del día 3 de mayo.

Y según el billete de vuelta, regresan desde Sidney el día 22 de mayo a las 11:00 h (hora de Australia) con destino a Madrid y llegan a las 16:00 h (hora de España) del mismo día.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Suponiendo que en los dos sitios fuese la misma hora, ¿cuánto tardarían en llegar a Sidney? ¿Y en volver?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si la duración del vuelo es la misma en ambos sentidos, ¿cuál es la diferencia horaria entre las dos ciudades?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si tienen que estar el día 3 de mayo en Sidney a las 18:00 h, ¿cuál es la hora límite para salir de Madrid y llegar a tiempo?

a) Ida:

Del 2 de mayo a las 10:00 h al 3 de mayo a las 00:00 h pasan 14 horas.
Del 3 de mayo a las 00:00 h al 3 de mayo a las 11:00 h pasan 11 horas.
En total, $11 + 14 = 25$ horas duraría el viaje si en ambas ciudades fuese la misma hora.

Vuelta:

Del 22 de mayo a las 11:00 h al 22 de mayo a las 16:00 h pasan 5 horas.
El viaje de regreso duraría 5 horas si en ambas ciudades fuese la misma hora.

b) Duración del vuelo: x
Diferencia horaria: y

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x - y = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 15,\ y = 10$$

La duración del vuelo es de 15 horas y la diferencia horaria es de 10 horas.

c) Las 18:00 h del día 3 de mayo en Sidney son las: $18 - 10 = 8$ horas del 3 de mayo en Madrid.
Como el vuelo dura 15 horas: $8 - 15 = -7$
Es decir, 7 horas menos que las 00:00 h del 2 de mayo. Por tanto, tienen que salir antes de las 17:00 h del 2 de mayo de Madrid.

074 ●●● **Cada vez que Mari Pili llama a sus amigas desde casa utilizando su teléfono móvil se produce la misma discusión.**

Para demostrar a su madre lo que dice, Mari Pili ha extraído un resumen de las dos últimas facturas de teléfono.

	Octubre	Diciembre
Minutos teléfono fijo	960	950
Minutos teléfono móvil	520	610
Total (€)	141,60 €	157,30 €

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si costara lo mismo hablar un minuto con el teléfono fijo y con el teléfono móvil, ¿cuánto valdría el minuto de conversación en octubre? ¿Y en diciembre?

b) Según el resultado obtenido, ¿crees que pueden costar lo mismo?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) Si al hablar con el teléfono fijo el minuto costara a 0,09 céntimos, ¿cuánto costaría el minuto de teléfono móvil cada mes?

d) ¿Crees que es posible que el precio por minuto de teléfono fijo sea 0,09 céntimos?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

e) ¿Es cierto lo que dice Mari Pili, o tiene razón su madre?

a) Minuto en octubre:

$141{,}6 : (960 + 520) = 0{,}0957$ €

Minuto en Diciembre:

$157{,}3 : (950 + 610) = 0{,}101$ €

b) No puede costar lo mismo el minuto en fijo y móvil porque si no saldría el mismo precio en los dos meses.

c) Mes de octubre:

$[141{,}6 - (0{,}09 \cdot 960)] \cdot 520 = 0{,}106$ €/min

Mes de diciembre:

$[157{,}3 - (0{,}09 \cdot 950)] \cdot 610 = 0{,}118$ €/min

d) Si el precio por minuto del teléfono fijo fuera 0,09 €, el precio por minuto de teléfono móvil variaría de un mes a otro. El precio por minuto del teléfono fijo no puede ser 0,09 €.

e) Precio del minuto en fijo: x

Precio del minuto en móvil: y

$$\left.\begin{array}{l} 960x + 520y = 141{,}60 \\ 950x + 610y = 157{,}30 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 96x + 52y = 14{,}16 \\ 95x + 61y = 15{,}73 \end{array}\right\}$$

Restando las dos ecuaciones: $x = 9y - 1{,}57$

$$950x + 610y = 157{,}30 \xrightarrow{x = 9y - 1{,}57} 950(9y - 1{,}57) + 610y = 157{,}30$$
$$\rightarrow 8\,550y - 1\,491{,}50 + 610y = 157{,}30$$
$$\rightarrow 9\,120y = 1\,648{,}80 \rightarrow y = 0{,}18$$

$$x = 9y - 1{,}57 \xrightarrow{y = 0{,}18} x = 0{,}06$$

El coste del minuto de teléfono fijo es 0,06 céntimos y el de móvil es 0,18 céntimos, por lo que Mari Pili no tiene razón.

8 Proporcionalidad numérica

Cuando el verde es rojo

El joven de 26 años, John Dalton, era consolado por su hermano mayor, Jonathan, mientras paseaban por la ciudad inglesa de Kendal.

–John, no te lo tomes tan a pecho. Seguro que mamá no quiso ofenderte.

John no parecía muy convencido y miraba incrédulo la prenda que había regalado a su madre, y que esta le había devuelto visiblemente enfadada.

–No entiendo por qué no le gusta, el dependiente me aseguró que el paño era de primera calidad.

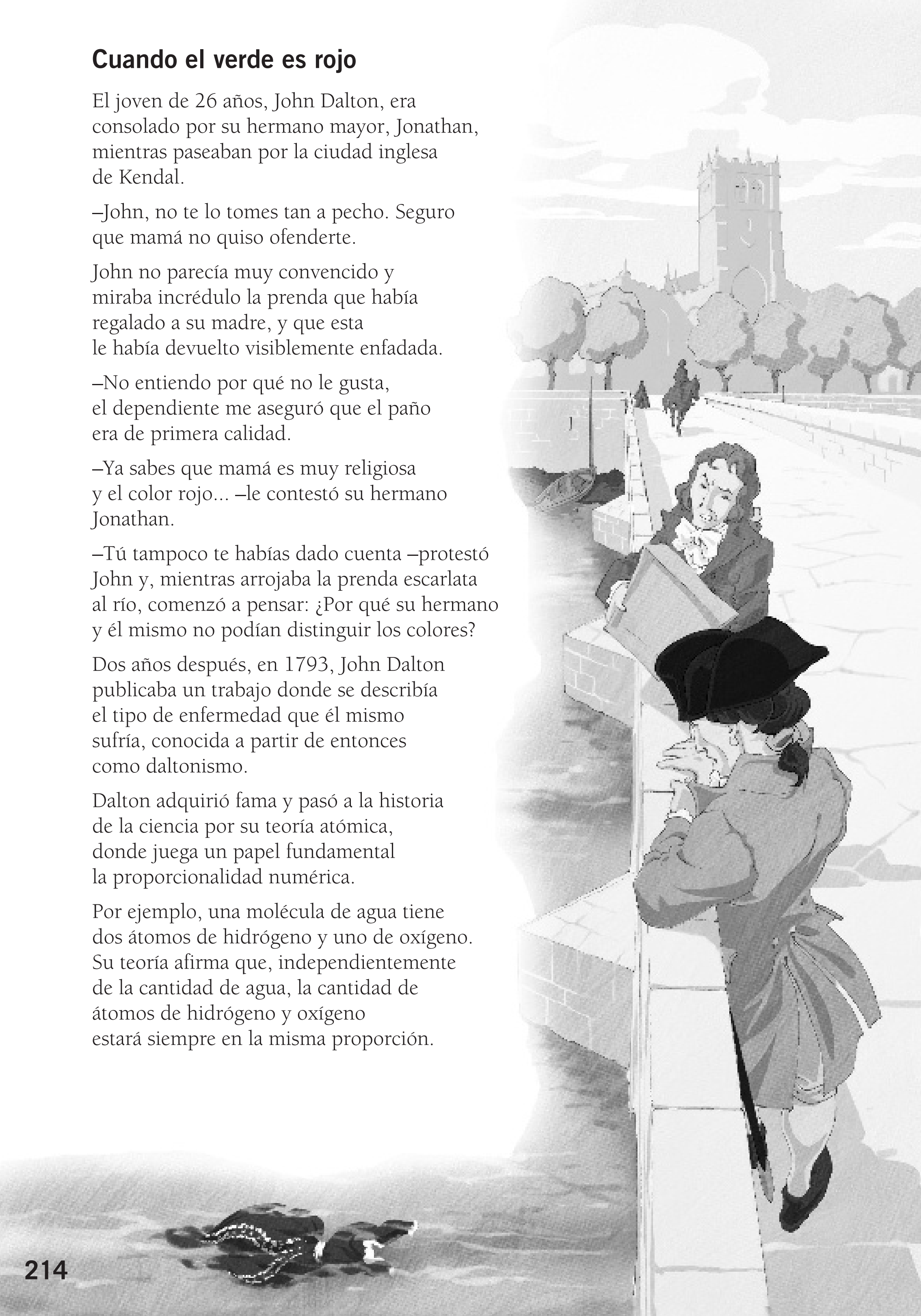
–Ya sabes que mamá es muy religiosa y el color rojo... –le contestó su hermano Jonathan.

–Tú tampoco te habías dado cuenta –protestó John y, mientras arrojaba la prenda escarlata al río, comenzó a pensar: ¿Por qué su hermano y él mismo no podían distinguir los colores?

Dos años después, en 1793, John Dalton publicaba un trabajo donde se describía el tipo de enfermedad que él mismo sufría, conocida a partir de entonces como daltonismo.

Dalton adquirió fama y pasó a la historia de la ciencia por su teoría atómica, donde juega un papel fundamental la proporcionalidad numérica.

Por ejemplo, una molécula de agua tiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno. Su teoría afirma que, independientemente de la cantidad de agua, la cantidad de átomos de hidrógeno y oxígeno estará siempre en la misma proporción.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **John Dalton y su hermano padecían una enfermedad en la vista que después fue conocida como daltonismo. Busca información sobre la vida de este químico inglés nacido en el siglo XVIII.**

Se puede encontrar información sobre la vida de John Dalton visitando la siguiente página web:
http://www.educared.net/aprende/anavegar5/podium/images/C/2026/biografies.htm#dalton

Para completar la información sobre la biografía de este matemático y la enfermedad que su hermano y él padecían se puede visitar la siguiente página web:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/dalton.htm

2 **Averigua cómo utilizó la proporcionalidad John Dalton en sus trabajos sobre teoría atómica.**

En esta página web se puede obtener información sobre cómo utilizó Dalton la proporcionalidad:
http://www.oya-es.net/reportajes/dalton.htm

Se puede completar la información sobre la teoría atómica desarrollada por Dalton visitando esta página web:
http://www.uch.ceu.es/principal/eponimos_cientificos/eponimos/Dalton.pdf

3 **Investiga sobre otras aportaciones a la ciencia realizadas por John Dalton.**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de John Dalton y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/publicaciones/publi_quepaso/john-dalton.htm

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Decide si estas fracciones son equivalentes.**

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ **b)** $\frac{7}{5}$ y $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{8}{20}$ y $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{7}{3}$ y $\frac{11}{9}$

a) $2 \cdot 12 = 3 \cdot 8$ → Son equivalentes.

b) $7 \cdot 2 \neq 5 \cdot 3$ → No son equivalentes.

c) $8 \cdot 5 = 20 \cdot 2$ → Son equivalentes.

d) $7 \cdot 9 \neq 3 \cdot 11$ → No son equivalentes.

2 **Indica cuáles de las siguientes características son magnitudes.**

a) La velocidad de un coche.

b) Los nombres de los jugadores de un equipo de baloncesto.

c) El tiempo que tarda un tren en realizar un recorrido.

d) La cantidad de fruta que come una familia en una semana.

Son magnitudes a), c) y d).

3 **Calcula.**

a) $\frac{2}{5}$ **de 60** **b)** $\frac{4}{3}$ **de 120** **c)** $\frac{6}{4}$ **de 80** **d)** $\frac{7}{4}$ **de 140**

a) $\frac{2 \cdot 60}{5} = 24$ b) $\frac{4 \cdot 120}{3} = 160$ c) $\frac{6 \cdot 80}{4} = 120$ d) $\frac{7 \cdot 140}{4} = 245$

EJERCICIOS

001 **Escribe las razones correspondientes a las siguientes situaciones.**

a) De las 350 páginas que tiene un libro he leído 95.
b) Hemos recorrido 260 km de un trayecto de 600 km.
c) Silvia tiene 28 de un total de 72 cromos.
d) De los 32 dientes que tenemos, al bebé le han salido 4.

a) $\frac{95}{350}$ b) $\frac{260}{600}$ c) $\frac{28}{72}$ d) $\frac{4}{32}$

002 **Escribe dos números cuya razón sea $\frac{5}{6}$ y que no sean 5 y 6.**

Serán válidas las parejas del tipo $5x$, $6x$, para cualquier valor de x, por ejemplo, 10 y 12, siendo $x = 2$.

003 **Calcula el número x, sabiendo que:**

a) x es a 4 como 20 es a 2. **c) 9 es a x como x es a 4.**
b) 3 es a 4 como x es a 8.

a) $\frac{x}{4} = \frac{20}{2} \rightarrow x = 40$

c) $\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \longrightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6$

b) $\frac{3}{4} = \frac{x}{8} \longrightarrow x = 6$

004 **Calcula el término que falta en estas proporciones.**

a) $\frac{8}{5} = \frac{12}{x}$ **c)** $\frac{4}{x} = \frac{32}{16}$ **e)** $\frac{x}{25} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{8}{12} = \frac{x}{6}$ **d)** $\frac{x}{15} = \frac{18}{5}$ **f)** $\frac{4}{8} = \frac{x}{16}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$

d) $\frac{x}{15} = \frac{18}{5} \rightarrow x = 54$

b) $\frac{8}{12} = \frac{x}{6} \rightarrow x = 4$

e) $\frac{x}{25} = \frac{4}{5} \longrightarrow x = 20$

c) $\frac{4}{x} = \frac{32}{16} \rightarrow x = 2$

f) $\frac{4}{8} = \frac{x}{16} \longrightarrow x = 8$

005 **Si $\frac{4}{x} = \frac{x}{100}$, ¿cuánto vale *x*?**

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{100} \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = \pm 20$$

006 **Halla el valor de *a* y *c*, sabiendo que $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$ y que $a + c = 30$.**

$$\frac{a}{2} = \frac{c}{3} \rightarrow 3a = 2c \rightarrow c = \frac{3a}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} c = \dfrac{3a}{2} \\ a + c = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a + \frac{3a}{2} = 30 \rightarrow a = 12,\ c = 18$$

007 **Una revista cuesta 4,20 €. ¿Son directamente proporcionales las magnitudes *N.º de revistas* y *Precio*?**

Sí, las magnitudes son directamente proporcionales ya que al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

008 **«Un sobre de cromos cuesta 1,50 €.» Indica las magnitudes que intervienen en este enunciado, y decide si son directamente proporcionales.**

Las magnitudes son *N.º de sobres de cromos* y *Precio*, y son directamente proporcionales.

009 **Copia en tu cuaderno y completa la tabla para que corresponda a los valores de dos magnitudes directamente proporcionales.**

¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso?

1	**2**	3	**4**	5	**6**	7
10	20	**30**	40	**50**	60	**70**

La constante de proporcionalidad es 10.

010 **Una máquina produce 800 tornillos en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará la máquina en fabricar 1 000 tornillos?**

Tornillos **Horas**

$$\left.\begin{array}{r} 800 \longrightarrow 5 \\ 1\,000 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{800}{1\,000} = \frac{5}{x} \rightarrow 800 \cdot x = 5 \cdot 1\,000$$

$$\rightarrow x = \frac{5\,000}{800} = 6{,}25 \text{ horas}$$

011 **Al traducir un libro cobro 6 € por página. Si me han pagado 2 532 €, ¿cuántas páginas he traducido?**

Páginas **Euros**

$$\left.\begin{array}{r} 1 \longrightarrow 6 \\ x \longrightarrow 2\,532 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{6}{2\,532} \rightarrow x = \frac{2\,532}{6} = 422 \text{ páginas}$$

012 **Una familia bebe 2,5 litros de leche diarios. ¿Cuántos litros consume a la semana?**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Leche}} & & \underline{\textbf{Días}} \\ 2{,}5 & \longrightarrow & 1 \\ x & \longrightarrow & 7 \end{array}\Bigg\} \rightarrow \frac{2{,}5}{x} = \frac{1}{7} \rightarrow 2{,}5 \cdot 7 = 1 \cdot x \rightarrow x = 17{,}5 \text{ litros}$$

013 **Completa en tu cuaderno: Si para llevar 15 panes necesito 3 cestas, con 1 cesta tengo para…**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Cestas}} & & \underline{\textbf{Panes}} \\ 3 & \longrightarrow & 15 \\ 1 & \longrightarrow & x \end{array}\Bigg\} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \text{ panes}$$

014 **Dieciocho obreros realizan un trabajo en 30 días. Copia y completa la tabla.**

N.º de obreros	**3**	**9**	**18**	**36**	**72**
N.º de días	180	60	**30**	15	7,5

015 **Copia y completa la siguiente tabla de valores inversamente proporcionales.**

Magnitud *A*	**1**	**2**	3	**4**	4	**6**
Magnitud *B*	**24**	12	**8**	6	**6**	4

016 **¿Son inversamente proporcionales?**

a) Velocidad y tiempo empleado.

b) Edad y estatura de una persona.

c) Consumo de electricidad y horas de luz solar.

a) Sí, son inversamente proporcionales.

b) No son inversamente proporcionales.

c) No son inversamente proporcionales, ya que el consumo no depende solo de la luz.

017 **Un ganadero tiene alpacas de paja para alimentar a 20 vacas durante 60 días. Si compra 10 vacas más, ¿para cuántos días tendrá alimento?**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{N.º de vacas}} & & \underline{\textbf{Días}} \\ 20 & \longrightarrow & 60 \\ 30 & \longrightarrow & x \end{array}\Bigg\} \rightarrow \text{Proporcionalidad inversa} \rightarrow \frac{20}{30} = \frac{x}{60}$$

$$\rightarrow 20 \cdot 60 = 30 \cdot x \rightarrow x = \frac{1\,200}{30} = 40 \text{ días}$$

018 **Un grifo que vierte 18 ℓ/min tarda 28 horas para llenar un depósito. Si su caudal fuera de 42 ℓ/min, averigua el tiempo que tardaría en llenarlo. Resuélvelo:**

a) Mediante una regla de tres.

b) Por el método de reducción a la unidad.

a) **Caudal** **Tiempo**

$$\left.\begin{array}{lcl} 18 & \longrightarrow & 28 \\ 42 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \to \text{Proporcionalidad inversa} \to \frac{18}{42} = \frac{x}{28}$$

$$\to 18 \cdot 28 = 42 \cdot x \to x = \frac{504}{42} = 12 \text{ horas}$$

b)

Caudal	18	1
Tiempo	28	x

$18 \cdot 28 = 1 \cdot x \to x = 504$

Con un caudal de 1 ℓ/min tardaría 504 minutos, luego con 42 ℓ/min tardará:

504 : 42 = 12 horas

019 **Un coche recorre un trayecto a 90 km/h en 8 horas. ¿A qué velocidad iría si tardase 9 horas?**

Velocidad **Tiempo**

$$\left.\begin{array}{lcl} 90 & \longrightarrow & 8 \\ x & \longrightarrow & 9 \end{array}\right\} \to \text{Proporcionalidad inversa} \to \frac{x}{90} = \frac{8}{9}$$

$$\to 90 \cdot 8 = 9 \cdot x \to x = \frac{720}{9} = 80 \text{ km/h}$$

020 **Copia y completa: Si a 70 km/h tardo 4 h, en 12 min recorro…**

Velocidad **Tiempo**

$$\left.\begin{array}{lcl} 70 & \longrightarrow & 4 \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{5} \end{array}\right\} \to \text{Proporcionalidad directa} \to \frac{70}{x} = \frac{4}{\frac{1}{5}}$$

$$\to \frac{70}{5} = 4x \to x = 3{,}5$$

En 12 min recorro 3,5 km.

021 **Calcula.**

a) 7 % de 420

b) 15 % de 4 000

c) 90 % de 1 900

d) 65 % de 40

a) $x = \dfrac{7 \cdot 420}{100} = 29{,}4$

b) $x = \dfrac{15 \cdot 4\,000}{100} = 600$

c) $x = \dfrac{90 \cdot 1\,900}{100} = 1\,710$

d) $x = \dfrac{65 \cdot 40}{100} = 26$

022 **Halla el valor de *x*, sabiendo que:**

a) 30 % de *x* es 20

b) 4,5 % de *x* es 152

c) 25 % de *x* es 289

d) 67 % de *x* es 725

a) $\frac{30 \cdot x}{100} = 20 \longrightarrow x = \frac{20 \cdot 100}{30} = 66{,}67$

b) $\frac{4{,}5 \cdot x}{100} = 152 \rightarrow x = \frac{152 \cdot 100}{4{,}5} = 3\,377{,}78$

c) $\frac{25 \cdot x}{100} = 289 \longrightarrow x = \frac{289 \cdot 100}{25} = 1\,156$

d) $\frac{67 \cdot x}{100} = 725 \longrightarrow x = \frac{725 \cdot 100}{67} = 1\,082{,}09$

023 **Un equipo ha perdido el 25 % de los 32 partidos que ha jugado esta temporada. ¿Cuántos partidos ha ganado?**

Ha ganado el 75 % de los partidos: $\frac{75 \cdot 32}{100} = 24$ partidos

024 **Contesta a las siguientes preguntas.**

a) ¿Qué tanto por ciento es 7 de 14?

b) ¿Qué tanto por ciento es 4 de 16?

c) ¿Y qué tanto por ciento es 90 de 125?

a) $\frac{x \cdot 14}{100} = 7 \longrightarrow x = \frac{7 \cdot 100}{14} = 50 \rightarrow$ Es el 50 %.

b) $\frac{x \cdot 16}{100} = 4 \longrightarrow x = \frac{4 \cdot 100}{16} = 25 \rightarrow$ Es el 25 %.

c) $\frac{x \cdot 125}{100} = 90 \rightarrow x = \frac{90 \cdot 100}{125} = 72 \rightarrow$ Es el 72 %.

025 **Carlos paga de impuestos un 22 % de su salario. Si este año sus ingresos ascienden a 25 500 €, ¿cuánto tendrá que pagar de impuestos? ¿Qué cantidad neta ha cobrado?**

Operando, tenemos que: $\frac{22 \cdot 25\,500}{100} = 5\,610$ €

Carlos tendrá que pagar 5 610 € de impuestos.

Por tanto, ha cobrado: 25 500 − 5 610 = 19 890 € netos

026 **En la carta de un restaurante los precios no incluyen el 8 % de IVA. Un cliente ha comido una ensalada que cuesta 3,16 €, un lenguado cuyo precio es 6,25 € y un postre de 4,78 €. ¿Cuánto pagará en total el cliente?**

El precio de la comida sin IVA es: $3{,}16 + 6{,}25 + 4{,}78 = 14{,}19$ €

Operando, tenemos que: $\frac{8 \cdot 14{,}19}{100} = 1{,}14$ €

El precio final es: $14{,}19 + 1{,}14 = 15{,}33$ €

027 **Carmen gasta el 26 % de su sueldo en comida y el 35 % en pagar el alquiler. Si gana 1 500 € al mes, ¿cuánto se gasta en cada concepto? ¿Qué porcentaje le queda para otros gastos?**

El 26 % de 1 500 € es: $\frac{26 \cdot 1\,500}{100} = 390$ € gasta en comida

El 35 % de 1 500 € es: $\frac{35 \cdot 1\,500}{100} = 525$ € gasta en alquiler

Para otros gastos le queda: $100 - (26 + 35) = 39$ % de su salario

028 **Una ciudad tiene en la actualidad 135 000 habitantes. Si ha perdido en los dos años el 8 % de su población, ¿cuántos habitantes tenía la ciudad hace dos años?**

El 8 % de 135 000 es: $\frac{8 \cdot 135\,000}{100} = 10\,800$ habitantes ha perdido

En la actualidad hay: $135\,000 - 10\,800 = 124\,200$ habitantes

029 **¿Cuál era el precio de un ordenador que está rebajado un 18 % si me ha costado 900 €?**

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow x \\ 82\,\% \longrightarrow 900\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90\,000}{82} = 1\,097{,}56\text{ €}$$

030 **¿Cuánto vale *x* si el 22 % de *x* es 44?**

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow x \\ 22\,\% \longrightarrow 44 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{4\,400}{22} = 200$$

031 **Ana trabaja desde hace 10 años en una empresa, y ha cobrado 235 € por antigüedad, que es el 15 % de su salario. ¿Cuál es el sueldo de Teo si gana un 5 % menos que Ana?**

El sueldo de Ana es:

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow x \\ 15\,\% \longrightarrow 235\text{ €} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{23\,500}{15} = 1\,566{,}67\text{ €}$$

El sueldo de Teo es:

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow 1\,566{,}67\text{ €} \\ 95\,\% \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1\,566{,}67 \cdot 95}{100} = 1\,488{,}33\text{ €}$$

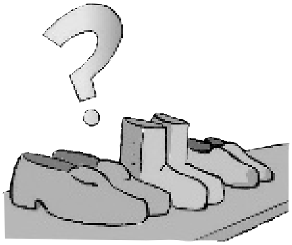
032 **La paga mensual de Sara es de 50 €. Si sus padres le han subido la paga un 10 %, ¿cuánto percibe ahora?**

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow 50 \\ 110\,\% \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 100 \cdot x = 110 \cdot 50 \rightarrow x = \frac{110 \cdot 50}{100} = 55 \text{ €}$$

033 **A Juan le han puesto una multa por exceso de velocidad de 90 €. Transcurrido el período voluntario de pago, ahora se le añade un 20 % de recargo. ¿Cuánto tendrá que pagar?**

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow 90 \\ 120\,\% \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 100 \cdot x = 120 \cdot 90 \rightarrow x = \frac{120 \cdot 90}{100} = 108 \text{ €}$$

034 **Un fabricante de calzado vende sus zapatos al 120 % del precio que le cuesta fabricarlos. Si el coste de fabricación de unos zapatos es de 14 €, ¿por cuánto los venderá?**



$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow 14 \text{ €} \\ 120\,\% \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 100 \cdot x = 120 \cdot 14 \rightarrow x = \frac{120 \cdot 14}{100} = 16{,}80 \text{ €}$$

035 **La Seguridad Social paga un 60 % del precio de algunas medicinas. Si he comprado un medicamento, que está cubierto por la Seguridad Social, cuyo precio de venta al público es de 19 €, ¿cuánto he tenido que pagar?**

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \longrightarrow 19 \text{ €} \\ 40\,\% \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 100 \cdot x = 40 \cdot 19 \rightarrow x = \frac{40 \cdot 19}{100} = 7{,}60 \text{ €}$$

ACTIVIDADES

036 **A una vasija con 4 ℓ de vino se le añaden 0,4 ℓ de agua. Averigua la razón entre vino y agua.**

La razón es: $\frac{4}{0,4} = 10$

Si la razón es 10, por cada 10 ℓ de vino hay 1 ℓ de agua.

037 **Por término medio dormimos 8 horas al día. ¿Cuál es la razón entre el tiempo que dormimos y el tiempo total? ¿Cuánto tiempo has dormido, de media, hasta la actualidad?**

La razón es: $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

El número de horas de sueño es la edad, en días, multiplicada por 8.

038 **Expresa la razón anterior para estos casos.**

a) Tiempo despierto y tiempo total.

b) Tiempo dormido y tiempo despierto.

c) Tiempo total y tiempo dormido.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{1}$

039 **De 500 habitantes de un pueblo, 300 son mujeres. Halla la razón entre hombres y mujeres.**

En el pueblo hay: 500 − 300 = 200 hombres

La razón entre hombres y mujeres es $\frac{2}{3}$.

040 **Averigua si son correctas estas proporciones.**

a) $\frac{10}{4} = \frac{16}{6,4}$ **b)** $\frac{5}{2} = \frac{8}{3,2}$

Para averiguarlo hay que comprobar si el producto de extremos es igual que el producto de medios.

a) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 6,4 = 64 \\ 4 \cdot 16 = 64 \end{array}\right\} \rightarrow$ Es correcta. b) $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 3,2 = 16 \\ 2 \cdot 8 = 16 \end{array}\right\} \rightarrow$ Es correcta.

041 ●

Forma proporciones a partir de las igualdades.

a) $5 \cdot 8 = 20 \cdot 2$

b) $7 \cdot 4 = 14 \cdot 2$

c) $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4$

d) $6 \cdot 5 = 15 \cdot 2$

a) $5 \cdot 8 = 20 \cdot 2 \rightarrow \frac{5}{20} = \frac{2}{8} \quad \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b) $7 \cdot 4 = 14 \cdot 2 \rightarrow \frac{7}{14} = \frac{2}{4} \quad \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

c) $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4 \rightarrow \frac{5}{10} = \frac{4}{8} \quad \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

d) $6 \cdot 5 = 15 \cdot 2 \rightarrow \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \frac{5}{15} = \frac{2}{6}$

042 ●●

Comprueba que $42^2 = 12 \cdot 147$ y deduce una proporción.

$42^2 = 1\,764 \qquad 12 \cdot 147 = 1\,764 \rightarrow 42^2 = 12 \cdot 147$

Una proporción sería: $\frac{42}{12} = \frac{147}{42}$, donde 42 y 42 son los extremos, y 12 y 147 son los medios.

043 ●●●

La razón entre las probabilidades de ganar de dos equipos *A* y *B* es $\frac{5}{3}$. ¿Qué significa esta razón?

¿Podrías calcular, en tanto por ciento, las posibilidades de victoria de *A*? ¿Y las de *B*?

Esta razón significa que, de cada 8 partidos, *A* gana 5 y *B* gana 3.

La posibilidad de *A* de ganar un partido es de 62,5 %, y la de *B* es de 37,5 %.

044 ●

Calcula *x* en las proporciones.

a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{1}$ **b) $\frac{4}{x} = \frac{5}{3}$** **c) $\frac{2{,}4}{1{,}5} = \frac{8}{x}$**

a) $x = \frac{4 \cdot 3}{1} = 12$ b) $x = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4$ c) $x = \frac{1{,}5 \cdot 8}{2{,}4} = 5$

045 ●●

Encuentra el valor de *a*, *b* y *c* en estas proporciones: $\frac{3}{5} = \frac{18}{a} = \frac{b}{25} = \frac{c}{12}$

Conocida una razón, formamos las proporciones:

$\frac{3}{5} = \frac{18}{a} \rightarrow a = \frac{5 \cdot 18}{3} = 30$ $\qquad \frac{3}{5} = \frac{c}{12} \rightarrow c = \frac{3 \cdot 12}{5} = 7{,}2$

$\frac{3}{5} = \frac{b}{25} \rightarrow b = \frac{3 \cdot 25}{5} = 15$

046 **Halla el término que falta para que los siguientes números formen una proporción.**

a) 24, 51 y 104 **b) 5, 6 y 40** **c) 3, 5 y 12**

a) $\frac{24}{51} = \frac{104}{x} \rightarrow x = \frac{51 \cdot 104}{24} = 221$

b) $\frac{5}{6} = \frac{40}{x} \longrightarrow x = \frac{6 \cdot 40}{5} = 48$

c) $\frac{3}{5} = \frac{12}{x} \longrightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LOS MEDIOS O LOS EXTREMOS DE UNA PROPORCIÓN CUANDO SON IGUALES?

Calcula x en la proporción: $\frac{16}{x} = \frac{x}{4}$

PRIMERO. Se aplica la propiedad fundamental.

$$\frac{16}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow 16 \cdot 4 = x \cdot x \rightarrow x^2 = 64$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$

Luego la proporción será: $\frac{16}{8} = \frac{8}{4}$

048 **Obtén dos números iguales que guarden proporción con los siguientes números.**

a) 4 y 49 **b) 1 y 0,64** **c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{27}{20}$**

a) $\frac{x}{4} = \frac{49}{x} \longrightarrow x^2 = 4 \cdot 49 \rightarrow x^2 = 196 \rightarrow x = 14$

b) $\frac{x}{1} = \frac{0{,}64}{x} \rightarrow x^2 = 1 \cdot 0{,}64 \rightarrow x = 0{,}8$

c) $\frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{27}{20}}{x} \rightarrow x^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{27}{20} \rightarrow x^2 = \frac{81}{100} \rightarrow x = \frac{9}{10}$

049 **Halla cuánto vale x en la proporción $\frac{3+x}{5+20} = \frac{15}{70}$.**

$$\frac{3+x}{5+20} = \frac{15}{70} \rightarrow (3+x) \cdot 70 = 25 \cdot 15 \rightarrow 210 + 70x = 375$$
$$\rightarrow 70x = 375 - 210 \rightarrow 70x = 165 \rightarrow x = \frac{165}{70} = 2{,}36$$

050 ●●

Calcula a y b, sabiendo que $\frac{a}{45} = \frac{16}{b}$ y $\frac{8}{9}$ es la constante de proporcionalidad.

$$\frac{a}{45} = \frac{8}{9} \rightarrow a = 40 \qquad \frac{16}{b} = \frac{8}{9} \rightarrow b = 18$$

051 ●●

Determina a y b, sabiendo que $a + b = 15$ y $\frac{7}{a} = \frac{28}{b}$.

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 15 \\ \frac{7}{a} = \frac{28}{b} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = 15 \\ b = 4a \end{array}\right\} \rightarrow a + 4a = 15 \rightarrow a = 3,\ b = 12$$

052 ●●●

Halla dos números cuya razón es 2,25 y su suma es 65.

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 65 \\ \frac{a}{b} = 2{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = 65 \\ a = 2{,}25b \end{array}\right\} \rightarrow 2{,}25b + b = 65 \rightarrow b = 20,\ a = 45$$

Los números son 45 y 20.

053 ●●

Señala si son o no directamente proporcionales los siguientes pares de magnitudes.

a) Tiempo de llenado de una botella y cantidad de agua en su interior.
b) Número de personas que participan en una excursión y dinero que pagan.
c) Número de horas trabajadas y dinero cobrado.
d) Edad y peso de una persona.
e) Lado de un cuadrado y área.
f) Lado de un cuadrado y perímetro.
g) Número de obreros y duración de una obra.
h) Velocidad y tiempo en un movimiento con velocidad constante.

Son directamente proporcionales c) y f).

054 ●●

Comprueba si estas tablas corresponden a magnitudes directamente proporcionales.

a)

3	9	6	30
5	15	10	50

c)

2	5	3	10
4	10	6	20

b)

1	2	4	5
3	3	6	9

d)

3	9	15	6
4	16	20	8

a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{30}{50}$

c) $\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$

b) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{9}{16}$

Son directamente proporcionales a) y c), y no lo son b) y d).

055 ●

Copia y completa la tabla, y halla la constante de proporcionalidad directa en cada caso.

a)

Tiempo de lectura	**5 min**	**10 min**	**15 min**	**20 min**
Páginas leídas	**2**	4	6	8

La constante de proporcionalidad es 2,5.

b)

Tiempo de fabricación	**18 min**	**36 min**	**54 min**	**72 min**
N.º de objetos fabricados	**4**	8	12	16

La constante de proporcionalidad es 4,5.

056 ●●

Copia y completa las siguientes tablas, sabiendo que *A* y *B* representan magnitudes directamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad directa en cada caso.

a)

A	**2**	**5**	**9**	**17**
B	**7**	17,5	31,5	59,5

La constante es: $\frac{2}{7} = 0{,}29$

b)

A	**5**	**7**	**9**	**16**
B	2,22	3,11	**4**	7,11

La constante es: $\frac{9}{4} = 2{,}25$

c)

A	**2**	**3**	**6**	**11**
B	0,91	1,36	2,73	**5**

La constante es: $\frac{11}{5} = 2{,}2$

d)

A	**3**	**4**	**10**	**13**
B	6,75	**9**	22,5	29,25

La constante es: $\frac{4}{9} = 0{,}44$

057 ●●

Estudia si la relación que existe entre estos pares de magnitudes es de proporcionalidad, y en caso de que lo sea, si es directa o inversa.

a) Velocidad y tiempo en un movimiento con velocidad constante.
b) Espacio y tiempo en un movimiento con velocidad constante.
c) Número de personas que se reparten una tarta y porción que le toca a cada uno.
d) Número de horas que un alumno ve la televisión y número de horas de estudio.
e) Cantidad de dinero que ahorra una familia y cantidad de dinero que dedica a gastos.
f) Cantidad de aprobados y cantidad de suspensos en una asignatura.
g) Número de albañiles y tiempo que tardan en construir una pared.
h) Número de personas que comen y cantidad de alimento.
i) Número de personas que participan en la compra de un regalo y dinero que aportan.
j) Número de jornaleros y tiempo que tardan en la recogida de aceituna.

Proporcionalidad directa: b) y h)

Proporcionalidad inversa: a), c), g), i) y j)

Sin proporcionalidad: d), e) y f)

058 ●

Copia y completa las siguientes tablas, sabiendo que *A* y *B* representan magnitudes inversamente proporcionales. Halla la constante de proporcionalidad en cada caso.

a)

A	**6**	**5**	**30**	10
B	**90**	108	18	**54**

La constante de proporcionalidad es 540.

b)

A	**2**	**6**	**15**	**4**
B	150	50	20	**75**

La constante de proporcionalidad es 300.

059 ●●

Crea una tabla de valores que relacione dos magnitudes inversamente proporcionales cuyas constantes de proporcionalidad sean:

a) 36 **b) 48** **c) 60** **d) 140**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)

A	2	3	4	6
B	18	12	9	6

b)

A	2	6	8	12
B	24	8	6	4

c)

A	3	4	5	6
B	20	15	12	10

d)

A	2	5	7	10
B	70	28	20	14

060 ●●

Copia y corrige estas tablas, si *A* y *B* son magnitudes inversamente proporcionales.

a)

A	**2**	**4**	**8**	**16**	1,6	**6,4**
B	**8**	**4**	**2**	1	**10**	**2,5**

b)

A	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**
B	**5**	3,33	**2,5**	**2**	1,67	1,43

061 ●

En una fábrica de coches se hacen 380 unidades cada 5 horas. ¿Cuántos coches se fabricarán en 12 horas, manteniendo el mismo ritmo?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Horas}} & & \underline{\textbf{Coches}} \\ 5 & \longrightarrow & 380 \\ 12 & \longrightarrow & x \end{array}\Bigg\} \rightarrow \frac{5}{12}=\frac{380}{x} \rightarrow x=\frac{4\,560}{5}=912 \text{ coches}$$

062 ●

Un pintor cobra 425 € por 5 días de trabajo. ¿Cuánto cobrará por 7 días?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\textbf{Días}} & & \underline{\textbf{Precio}} \\ 5 & \longrightarrow & 425 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array}\Bigg\} \rightarrow \frac{5}{7}=\frac{425}{x} \rightarrow x=\frac{2\,975}{5}=595 \text{ €}$$

063 ●

Cuatro tractores aran un campo en 6 horas. Calcula el tiempo que emplearían 6 tractores en ararlo.

Tractores **Horas**

$$\left.\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 6 \\ 6 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 4 \cdot 6 = 6 \cdot x \rightarrow x = 4 \text{ horas}$$

064 ●

Ocho personas recogen las naranjas de un huerto en 9 horas. ¿Cuánto tardarían en hacerlo 6 personas?

Personas **Horas**

$$\left.\begin{array}{l} 8 \longrightarrow 9 \\ 6 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 8 \cdot 9 = 6 \cdot x \rightarrow x = 12 \text{ horas}$$

065 ●

De un manantial hemos recogido 200 litros de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros obtendremos en 7 minutos?

Litros **Minutos**

$$\left.\begin{array}{r} 200 \longrightarrow 4 \\ x \longrightarrow 7 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{200}{x} = \frac{4}{7} \rightarrow x = \frac{1\,400}{4} = 350 \text{ litros}$$

066 ●

Tres caballos consumen una carga de heno en 10 días. ¿Cuánto les durará la misma cantidad de heno a 5 caballos?

Caballos **Días**

$$\left.\begin{array}{l} 3 \longrightarrow 10 \\ 5 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow 3 \cdot 10 = 5 \cdot x \rightarrow x = 6 \text{ días}$$

067 ●

Cuatro excavadoras han levantado las aceras de una calle en 14 días. Para hacerlo en 7 días, ¿cuántas excavadoras se necesitarían?

Excavadoras **Días**

$$\left.\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 14 \\ x \longrightarrow 7 \end{array}\right\} \rightarrow 4 \cdot 14 = 7 \cdot x \rightarrow x = 8 \text{ excavadoras}$$

068 ●●

Para hacer dos camisas se utilizan 4,5 m de tela.

a) ¿Cuánta tela se necesita para hacer 3 camisas?

b) ¿Y para hacer 7 camisas?

c) ¿Cuántas camisas se pueden hacer con 15 m de tela?

a) **Camisas** **Tela**

$$\left.\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4{,}5 \\ 3 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{13{,}5}{2} = 6{,}75 \text{ m}$$

b) **Camisas** **Tela**

$$\left.\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4{,}5 \\ 7 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{7} = \frac{4{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{31{,}5}{2} = 15{,}75 \text{ m}$$

c) **Camisas** **Tela**

$$\left.\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 4{,}5 \\ x \longrightarrow 15 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4{,}5}{15} \rightarrow x = \frac{30}{4{,}5} = 6{,}67 \approx 6 \text{ camisas}$$

069 ●●

Con una velocidad de 20 nudos, un barco realiza una travesía en 8 horas. Halla la velocidad de otro barco que hace la misma travesía en 6 horas y media.

Nudos **Horas**

$$\left.\begin{array}{l} 20 \longrightarrow 8 \\ x \longrightarrow 6{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow 20 \cdot 8 = x \cdot 6{,}5 \rightarrow x = 24{,}62 \text{ nudos}$$

070 ●●

Para hacer una paella se necesitan 2 vasos de agua por cada vaso de arroz. Si echamos 4 vasos y medio de agua, ¿cuántos vasos de arroz debemos añadir?

Agua **Arroz**

$$\left.\begin{array}{l} 2 \longrightarrow 1 \\ 4{,}5 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{4{,}5} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25 \text{ vasos de agua}$$

071 ●●

Mi pelo crece 1 cm cada 3 semanas. Exprésalo como una razón. Escribe la proporción del crecimiento de mi cabello al cabo de 7 semanas.

La razón es $\frac{1}{3}$, y en proporción $\frac{1}{3} = \frac{x}{7} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 7}{3} = 2{,}\widehat{3}$ cm

072 ●● **Alicia y Antonio reparten propaganda. Los 5 paquetes de Alicia pesan 6 kilos. ¿Cuánto pesarán los 7 paquetes de Antonio?**

Las magnitudes son directamente proporcionales:

$$\frac{6}{5} = \frac{x}{7} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8{,}4 \text{ kilos}$$

073 ●● **La dueña de una pensión dispone de comida para alimentar a sus 18 huéspedes durante 12 días. Si vienen 6 huéspedes nuevos, ¿para cuántos días tendrán comida?**

Huéspedes **Días**

$$\left.\begin{array}{rcl} 18 & \longrightarrow & 12 \\ 24 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow 18 \cdot 12 = 24 \cdot x \rightarrow x = 9 \text{ días}$$

074 ●● **María escribe dos páginas en media hora. ¿Cuántas páginas escribirá en 3 horas? ¿Y cuánto tiempo tardará en escribir 84 páginas?**

Páginas **Horas**

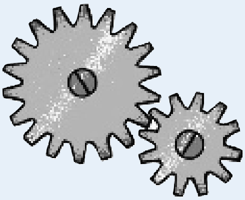
$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & \longrightarrow & 0{,}5 \\ x & \longrightarrow & 3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{0{,}5}{3} \rightarrow x = \frac{6}{0{,}5} = 12 \text{ páginas}$$

Páginas **Horas**

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & \longrightarrow & 0{,}5 \\ 84 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{84} = \frac{0{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{42}{2} = 21 \text{ horas}$$

075 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE ENGRANAJES MEDIANTE PROPORCIONALIDAD?



En un reloj antiguo, un engranaje tiene dos ruedas, de 18 y 12 dientes, respectivamente. Si la rueda mayor da 6 vueltas, averigua cuántas vueltas da la rueda menor.

PRIMERO. Se comprueba el tipo de proporcionalidad que guardan las magnitudes.

$$\text{Con 18 dientes} \xrightarrow{\text{da}} \text{6 vueltas}$$
$$\text{Con 36 dientes} \xrightarrow{\text{dará}} \text{3 vueltas}$$

La relación de proporcionalidad es inversa.

$$18 \cdot 6 = 36 \cdot 3$$

SEGUNDO. Se plantea una regla de tres.

Dientes **Vueltas**

$$\left.\begin{array}{rcl} 18 & \longrightarrow & 6 \\ 12 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{razón inversa}} x = \frac{18 \cdot 6}{12} = 9$$

La rueda de 12 dientes dará 9 vueltas.

076 ●●

Dos ruedas dentadas engranan mutuamente. La primera tiene 20 dientes, y la segunda, 50. Si la primera ha dado 5 000 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Dientes}} & & \underline{\text{Vueltas}} \\ 20 & \longrightarrow & 5\,000 \\ 50 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \to 20 \cdot 5\,000 = 50 \cdot x \to x = 2\,000 \text{ vueltas}$$

077 ●●

Las ruedas traseras y delanteras de un coche tienen 1,3 m y 1 m de diámetro, respectivamente. Si las traseras han dado 260 vueltas, ¿cuántas han dado las delanteras?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Metros}} & & \underline{\text{Vueltas}} \\ 1{,}3 & \longrightarrow & 260 \\ 1 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \to 1{,}3 \cdot 260 = x \to x = 338 \text{ vueltas}$$

078 ●●

He pagado 60 € por el abono de piscina de este verano, pero solo puedo asistir 45 días. Si la entrada normal cuesta 1,25 € al día, ¿me ahorraré dinero comprando el abono?

El precio sin abono es: $1{,}25 \cdot 45 = 56{,}25$ €. Por tanto, no ahorraré dinero.

079 ●●

En la tabla se muestra la oferta de unos grandes almacenes al adquirir un determinado número de litros de leche. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

Litros comprados	40	55	75	100
Litros obsequiados	1	2	3	5

$$\frac{40}{1} \neq \frac{55}{2} \to \text{No es directamente proporcional.}$$

080 ●●

En la siguiente tabla se muestra la oferta de una frutería al comprar un determinado número de kilos de patatas. ¿Es directamente proporcional el obsequio y la compra?

Kilos comprados	20	40	60	80
Kilos obsequiados	1,5	3	4,5	6

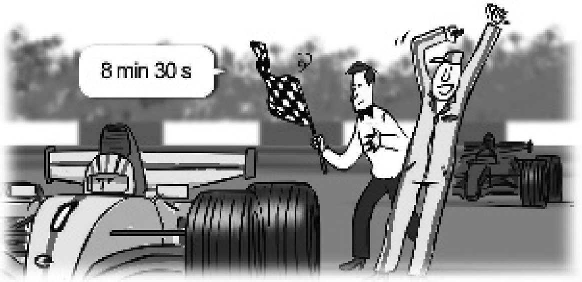
¿Qué cantidad de patatas hay que comprar para que nos regalen 10,5 kg?

$$\frac{20}{1{,}5} = \frac{40}{3} = \frac{60}{4{,}5} = \frac{80}{6} \to \text{Es directamente proporcional.}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Comprados}} & & \underline{\text{Obsequiados}} \\ 20 & \longrightarrow & 1{,}5 \\ x & \longrightarrow & 10{,}5 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \to \frac{20}{x} = \frac{1{,}5}{10{,}5} \to x = 140 \text{ kg}$$

081 ●●

Un coche de carreras ha dado 5 vueltas a un circuito en 8 minutos y 30 segundos. Si mantiene la misma velocidad, ¿cuánto tiempo tardará en dar las 3 próximas vueltas?



$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{Vueltas}} & & \underline{\text{Minutos}} \\ 5 & \longrightarrow & 8{,}5 \\ 3 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{8{,}5}{x} \rightarrow x = 5{,}1 \text{ minutos}$$

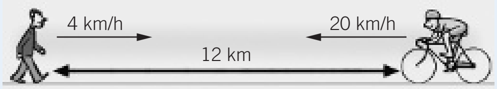
082

HAZLO ASÍ

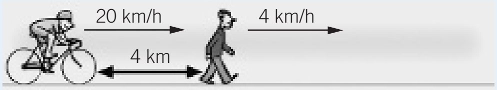
¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE MÓVILES MEDIANTE RAZONES?

Un caminante y un ciclista marchan por la misma vía. El caminante lleva una velocidad de 4 km/h, y el ciclista, de 20 km/h.

a) Si parten al mismo tiempo, desde puntos opuestos que distan entre sí 12 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?



b) Si parten del mismo punto y el caminante lleva una ventaja de 4 km, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarlo el ciclista?



PRIMERO. Se suman o restan las velocidades, según vayan en distinta o en igual dirección.

a) VELOCIDAD DE ENCUENTRO $= 20 + 4 = 24$ km/h

b) VELOCIDAD DE ALCANCE $= 20 - 4 = 16$ km/h

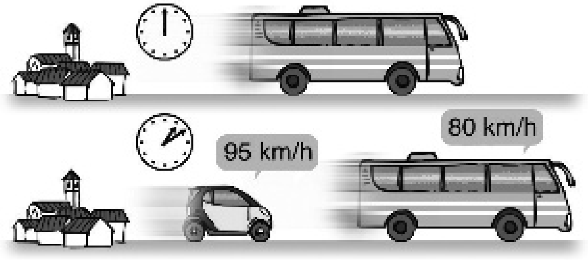
SEGUNDO. La razón entre la distancia que los separa y la velocidad a la que se aproximan es el tiempo, *t*.

a) $t = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{12}{24} = 0{,}5$ h en encontrarse

b) $t = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \dfrac{4}{16} = 0{,}25$ h en alcanzarlo

083 ●●

El autobús de Villa Arriba parte a las 12 de la mañana hacia Villa Abajo. Una hora y diez minutos más tarde sale de Villa Arriba un automóvil con la misma dirección. Si el autobús circula a 80 km/h y el automóvil va a 95 km/h:



a) ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar al autobús?

b) Si la distancia entre las dos ciudades es de 146 km, ¿alcanzará el coche al autobús antes de llegar a Villa Abajo?

Cuando sale el automóvil de Villa Arriba, el autobús ha recorrido:
1 h 10 min · 80 km/h = 93,33 km

La velocidad de alcance es: 95 − 80 = 15 km/h

a) $t = \dfrac{93{,}33}{15} = 6{,}22$ horas tardará en alcanzarlo

b) El tiempo que tarda el autobús en llegar a Villa Abajo es:
$t = \dfrac{146}{80} = 1{,}825$ horas, por lo que el autobús llega antes de que sea alcanzado por el automóvil.

084 ●●

Un grifo arroja un caudal de 25 ℓ/min y llena un depósito de agua en 1 hora y 20 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar ese mismo depósito otro grifo con un caudal de 20 ℓ/min?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Caudal}} & & \underline{\text{Tiempo}} \\ 25 & \longrightarrow & 80 \\ 20 & \longrightarrow & x \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \rightarrow 25 \cdot 80 = 20 \cdot x \rightarrow x = 100 \text{ minutos}$$

085 ●●

En una bañera, el agua alcanza 12 cm de altura con un grifo que mana 180 ml/s en 12 minutos. Si el grifo manase 90 ml/s, ¿qué altura alcanzaría en el mismo tiempo?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Caudal}} & & \underline{\text{Altura}} \\ 180 & \longrightarrow & 12 \\ 90 & \longrightarrow & x \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \rightarrow \frac{180}{12} = \frac{90}{x} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

086

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE LLENADO Y VACIADO MEDIANTE PROPORCIONALIDAD?

Un grifo *A* tarda 36 horas en llenar una piscina, y otro grifo *B* tarda 24 horas. Si abrimos los dos grifos a la vez, ¿cuánto tardará en llenarse la piscina?

PRIMERO. Se reduce a la unidad en cada grifo.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Grifo } A\text{, en 1 hora, llena: } \dfrac{1}{36} \text{ partes de piscina}\\[2ex] \text{Grifo } B\text{, en 1 hora, llena: } \dfrac{1}{24} \text{ partes de piscina}\end{array}\right\}$$

Grifo *A* y grifo *B*, en 1 hora, llenan:

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{24}=\frac{5}{72} \text{ partes de piscina}$$

SEGUNDO. Se reduce a la unidad en ambos grifos.

$$\frac{5}{72} \text{ partes de piscina en 1 h}$$

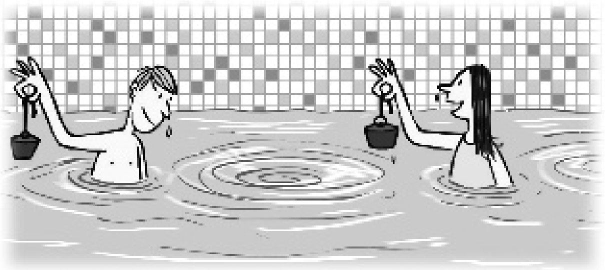
$$\frac{1}{72} \text{ partes de piscina en } \frac{1}{5} \text{ h}$$

$$\frac{72}{72} \text{ partes de piscina en } 72 \cdot \frac{1}{5} = 14 \text{ h } 24 \text{ min}$$

Los dos grifos tardarán en llenarla 14 h 24 min.

087 ●●●

Una piscina tiene dos desagües. El primero tarda en vaciar la piscina 8 horas. Y abriendo el segundo desagüe, la piscina tarda en vaciarse 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse si abrimos los dos desagües a la vez?



El primer desagüe, en 1 hora, vacía $\frac{1}{8}$ de la piscina.

El segundo desagüe, en 1 hora, vacía $\frac{1}{6}$ de la piscina.

Los dos desagües, en 1 hora, vacian: $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$ de la piscina

En vaciar la piscina tardarán: $1 : \frac{7}{24} = 3$ h 25 min 43 s

088 ●●●

Dos desagües iguales vacían una balsa de agua en 4 horas y cuarto. ¿En cuánto tiempo se vaciaría si abriésemos tres desagües?

Convertimos el tiempo en minutos:

$$4 \text{ horas y cuarto} = 4 \cdot 60 + 15 = 255 \text{ minutos}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{\textbf{Desagües}} & \underline{\textbf{Minutos}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2 & \longrightarrow & 255 \\ 3 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 255 = 3x \rightarrow x = 170 \text{ minutos}$$

089 ●●●

Un grifo llena un estanque en 8 horas. A consecuencia de una avería, el grifo arroja solo 2/3 de su caudal. Para llenar el estanque todavía faltan las 3/4 partes. ¿Cuánto tiempo empleará ahora el grifo en llenarlo?

$$\begin{array}{ll} \underline{\textbf{Horas}} & \underline{\textbf{Caudal}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcc} 8 & \longrightarrow & \dfrac{3}{3} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow 8 \cdot \frac{3}{3} = x \cdot \frac{2}{3} \rightarrow x = 12 \text{ horas}$$

$$\begin{array}{ll} \underline{\textbf{Horas}} & \underline{\textbf{Estanque}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcc} 12 & \longrightarrow & 1 \\ x & \longrightarrow & \dfrac{3}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{x} = \frac{4}{3} \rightarrow x = 9 \text{ horas}$$

090 ●●●

Un arquitecto planea terminar un edificio en un año y medio, con la ayuda de 36 obreros. Si le conceden una prórroga de medio año, ¿de cuántos obreros puede prescindir?

$$\begin{array}{ll} \underline{\textbf{Obreros}} & \underline{\textbf{Años}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 36 & \longrightarrow & 1{,}5 \\ x & \longrightarrow & 2 \end{array}\right\} \rightarrow 36 \cdot 1{,}5 = 2 \cdot x \rightarrow x = 27 \text{ obreros}$$

Por tanto, puede prescindir de 36 − 27 = 9 obreros.

091 ● **En un poblado africano hay 2 350 habitantes. Si el 68 % son niños, averigua el número de niños del poblado.**

68 % de 2 350 = 1 598 niños hay en el poblado

092 ● **En una clase de 30 alumnos han faltado 6. ¿Cuál ha sido el porcentaje de ausencias?**

Como 6 es el 20 % de 30, ha faltado el 20 % de los alumnos.

093 ● **De 475 personas, a 76 les gusta el fútbol. ¿A qué porcentaje de personas no les gusta el fútbol?**

No les gusta el fútbol a 399 personas, que son el 84 % del total.

094 ● **El 18 % de una cosecha de lechugas son 10 800 kg. ¿Cuántos kilos tiene la cosecha?**

La cosecha de lechugas tiene: $\frac{18 \cdot 10\,800}{100} = 1\,944$ kg

095 ● **Un traje cuesta 280 €. Si se aumenta su precio un 12 %, ¿cuánto costará?**

El traje costará: $\frac{280 \cdot 112}{100} = 313{,}60$ €

096 ● **Las reservas de agua de una comunidad autónoma eran de 350 hm^3. Si se han incrementado en un 12 %, ¿cuáles son las reservas actuales?**

Las reservas de agua actuales son: $\frac{350 \cdot 112}{100} = 392$ hm^3

097 ●●

De los 1 200 alumnos de un instituto, el 25 % practica atletismo; el 15 %, baloncesto, y el 40 %, fútbol. Calcula el número de alumnos que practican cada deporte y el porcentaje de los que no lo practican.

Atletismo: $\frac{25}{100} \cdot 1\,200 = 300$ alumnos

Baloncesto: $\frac{15}{100} \cdot 1\,200 = 180$ alumnos

Fútbol: $\frac{40}{100} \cdot 1\,200 = 480$ alumnos

Alumnos que no realizan deporte:
$1\,200 - (300 + 180 + 480) = 1\,200 - 960 = 240$ alumnos

$$\frac{x}{100} \cdot 1\,200 = 240 \rightarrow 1\,200x = 24\,000 \rightarrow x = \frac{24\,000}{1\,200} = 20\,\%$$

098 ●●

Tres montañeros se llevan alimento para su estancia en la montaña. Al llegar al refugio descubren que tienen un 15 % más de provisiones. Si disponen de 402,5 kg de comida, averigua cuánta tenían al principio.

$$\frac{115}{100} \cdot x = 402{,}5 \rightarrow x = \frac{402{,}5 \cdot 100}{115} = 350 \text{ kg}$$

099 ●●

Un establecimiento vendía café a 5 €/kg. Si ahora lo vende a 4,75 €/kg, encuentra el porcentaje de descuento que ha aplicado.

$$\left(\frac{100 - x}{100}\right) \cdot 5 = 4{,}75 \rightarrow 500 - 5x = 475 \rightarrow 500 - 475 = 5x$$
$$\rightarrow 25 = 5x \rightarrow x = 5\,\% \text{ de descuento}$$

100 ●●

Queremos hacer la fotocopia de una lámina, reduciendo 12,5 cm de altura a 6 cm. ¿Qué porcentaje de reducción aplicaremos?

$$\left(\frac{100 - x}{100}\right) \cdot 12{,}5 = 6$$
$$\rightarrow 1\,250 - 12{,}5x = 600$$
$$\rightarrow 1\,250 - 600 = 12{,}5x$$
$$\rightarrow 650 = 12{,}5x \rightarrow x = 52\,\%$$

Aplicaremos una reducción del 52 %.

101 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA CANTIDAD FINAL DE UNA INVERSIÓN?

Ingresamos 3 000 € en el banco a un rédito del 5 % anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos después de 10 años?

PRIMERO. Se calcula el beneficio anual.

$$\text{Beneficio anual} = 3\,000 \cdot \frac{5}{100} = 150\ €$$

SEGUNDO. Se multiplica el beneficio anual por el número de años que se mantiene la inversión.

$$\text{Beneficio} = 150 \cdot 10 = 1\,500\ €$$

TERCERO. Se suman los beneficios a la cantidad inicial.

$$\text{Cantidad final} = 3\,000 + 1\,500 = 4\,500\ €$$

Después de 10 años tendremos 4 500 €.

102 **Calcula el capital final que se retirará después de 6 años si se invierten:**

a) 10 000 €, al 3,5% anual.

b) 5 000 €, al 4% anual.

a) $\text{Beneficio anual} = 10\,000 \cdot \frac{3,5}{100} = 350\ €$

$\text{Beneficio} = 350 \cdot 6 = 2\,100\ €$

$\text{Capital final} = 10\,000 + 2\,100 = 12\,100\ €$

b) $\text{Beneficio anual} = 5\,000 \cdot \frac{4}{100} = 200\ €$

$\text{Beneficio} = 200 \cdot 6 = 1\,200\ €$

$\text{Capital final} = 5\,000 + 1\,200 = 6\,200\ €$

103 **¿A qué tanto por ciento se han invertido 12 000 € durante 3 años si se han obtenido 900 € de beneficio?**

El beneficio en 3 años es de 900 €.

Por otra parte, también lo podemos calcular como:

$$12\,000 \cdot \frac{x}{100} \cdot 3 = 360x$$

$$360x = 900 \rightarrow x = 2,5$$

El dinero se invirtió al 2,5 %.

104 ●●● **¿Durante cuántos años hemos invertido 15 000 € al 2,8 % si después obtenemos 17 100 €?**

Beneficio anual $= 15\,000 \cdot \dfrac{2{,}8}{100} = 420$ €

Beneficio $= 420x$

Capital final $= 15\,000 + 420x = 17\,100$ €

$x = \dfrac{17\,100 - 15\,000}{420} = 5$ años

Hemos tenido invertido el dinero durante 5 años.

105 ●●● **Esta situación es la que se planteó cuando Alfredo fue a comprar un televisor.**

¿Crees que Alfredo y la dependienta hablan del mismo precio?

Precio de Alfredo: $1\,600 \cdot \dfrac{122}{100} = 1\,952$ €

Precio de la dependienta: $1\,600 \cdot \dfrac{110}{100} \cdot \dfrac{118}{100} = 2\,076{,}80$ €

Por tanto, los precios no son iguales.

106 ●●● **Una fotocopiadora tarda una hora en hacer *m* fotocopias. Y otra, para hacer el mismo número de fotocopias, tarda una hora y media. ¿Cuántos minutos tardarán las dos fotocopiadoras en hacer a la vez ese número *m* de fotocopias?**

La fotocopiadora A, en 1 hora, hace: $\dfrac{1}{1}$ de las fotocopias

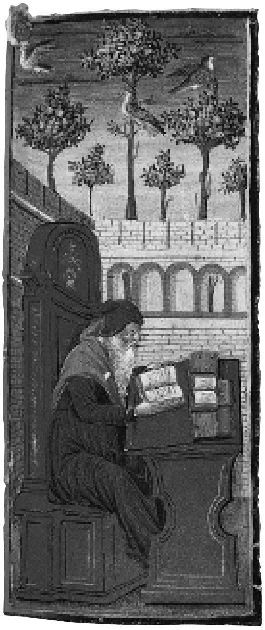
La fotocopiadora B, en 1 hora, hace: $\dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$ de las fotocopias

Las dos fotocopiadoras, en 1 hora, hacen: $1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$ de las fotocopias

Las dos fotocopiadoras juntas tardarán: $\dfrac{3}{5}$ de hora $= 36$ minutos en realizar las fotocopias

107 ●●● **En el siglo VIII, un monje benedictino inglés conocido con el nombre de Beda el Venerable planteó este curioso problema:**

Un testador a punto de morir deja dicho en su herencia: «Como mi mujer está próxima a dar a luz, otorgaré mi herencia en función del sexo de mi prole: si es niño le dejaré 2/3 de mi herencia, y a su madre 1/3; y si es niña le dejaré 1/3 de mi herencia y a mi mujer 2/3». El testador muere, y días más tarde su viuda da a luz a un par de mellizos de distinto sexo.



¿Cómo han de repartirse la herencia?

La razón entre las cantidades de varón y madre es:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

La razón entre las cantidades de mujer y madre es:

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Si la cantidad que recibe la madre es x, la del hijo es $2x$ y la de la hija es $\frac{x}{2}$, el total es de $3{,}5x$.

Por tanto, el reparto se hará del siguiente modo:

- A la madre le corresponde:

  $$\frac{x}{3{,}5x} = \frac{2}{7} \text{ del total}$$

- Al hijo le corresponde:

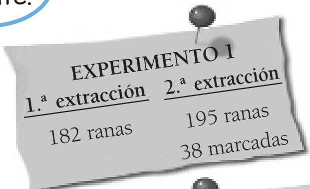
  $$\frac{2x}{3{,}5x} = \frac{4}{7} \text{ del total}$$

- A la hija le corresponde:

  $$\frac{0{,}5x}{3{,}5x} = \frac{1}{7} \text{ del total}$$

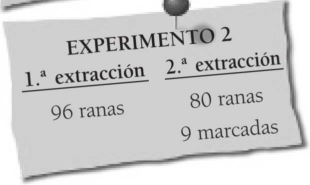
PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

108 ●●● **Se está investigando sobre la propagación de enfermedades en las ranas. Para ello, en un estanque en el que, a simple vista, hay un gran número de ellas han realizado este experimento para determinar el número de ranas que hay.**



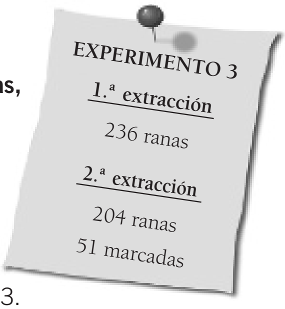
EXPERIMENTO 1

1.ª extracción	2.ª extracción
182 ranas	195 ranas 38 marcadas



EXPERIMENTO 2

1.ª extracción	2.ª extracción
96 ranas	80 ranas 9 marcadas



EXPERIMENTO 3

1.ª extracción

236 ranas

2.ª extracción

204 ranas

51 marcadas

Se ha realizado este proceso tres veces.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿En qué experimento se atrapan más ranas?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Según cada uno de los experimentos, ¿cuántas ranas, aproximadamente, puede haber en el estanque?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si se ha estimado que en el estanque hay 1 500 ranas, ¿crees que los cálculos serán correctos?

a) Hemos atrapado más ranas en el experimento 3.

Total **Coloreadas**

b) EXPERIMENTO 1 $$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow 182 \\ 195 \longrightarrow 38 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{195} = \frac{182}{38} \longrightarrow x \approx 933 \text{ ranas}$$

EXPERIMENTO 2 $$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow 96 \\ 80 \longrightarrow 9 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{x}{80} = \frac{96}{9} \longrightarrow x \approx 853 \text{ ranas}$$

EXPERIMENTO 3 $$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow 236 \\ 204 \longrightarrow 51 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{204} = \frac{236}{51} \rightarrow x = 944 \text{ ranas}$$

c) Como el número de ranas es distinto en los tres experimentos, calculamos la media: $\dfrac{933 + 853 + 944}{3} = 910$ ranas

Por tanto, según los experimentos que se han realizado, en el estanque habrá, aproximadamente, 910 ranas. Si consideramos que hay 1 500, los cálculos del estudio no serán correctos.

109 ●●●

Armando practica el atletismo, y ha participado en varias carreras de competición, pero hasta el año pasado no corrió su primer maratón.

A Armando le gustó tanto la experiencia que ha decidido entrenarse profesionalmente y ha buscado un entrenador.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si una persona corre a 15 km/h antes del plan de entrenamiento, ¿cuál será su velocidad después de seguir el plan?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si la velocidad antes de entrenar es *v*, ¿cuál será la velocidad después?

c) Si antes del entrenamiento tardaba un tiempo *t*, ¿cuánto tardará después de seguir el plan de entrenamiento?

d) ¿En qué porcentaje disminuirá el tiempo empleado en correr el maratón respecto al año anterior?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

e) El entrenador le ha dicho que va a tardar 11 minutos en recorrer 9 kilómetros. ¿Crees que podrá conseguirlo?

a) 25 % de 15 → $0,25 \cdot 15 = 3,75$

Como aumenta un 25 % su velocidad, correrá a: $15 + 3,75 = 18,75$ km/h

b) Velocidad antes de entrenar: v Velocidad después de entrenar: $1,25v$

c) Tiempo antes de entrenar: t Tiempo después de entrenar: r

Tan solo sabemos que $r < t$.

d) **Antes** **Después**

$$\left.\begin{array}{ccc} t & \longrightarrow & r \\ v & \longrightarrow & 1,25v \end{array}\right\} \rightarrow t \cdot v = r \cdot 1,25v \rightarrow r = \frac{tv}{1,25v} = \frac{t}{1,25} = 0,8t$$

Por tanto, r es el 80 % de t. Es decir, disminuye el tiempo en un 20 %.

e) Si recorriera 9 kilómetros en 11 minutos, en 1 hora recorrería:

Kilómetros **Minutos**

$$\left.\begin{array}{ccc} 9 & \longrightarrow & 11 \\ x & \longrightarrow & 60 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 9}{11} = 49,09 \text{ km}$$

Su velocidad sería de 49,09 km/h.

Es imposible que una persona mantenga una velocidad media de 49,09 km/h durante 9 km.

9 Proporcionalidad geométrica

La llave de la Ciudad Prohibida

El misionero jesuita Matteo Ricci atravesó la puerta de la Ciudad Prohibida al encuentro del emperador chino Wan-Li. Los presentes enviados habían surtido efecto y el emperador quería conocerlo.

El emperador, que esperaba curioseando el mapa del mundo incluido en los regalos, levantó la vista y le ordenó realizar una copia para él.

Tras la entrevista el padre Ricci regresó a su casa, y allí otro misionero, un tanto sorprendido, dijo:

–Todavía no entiendo por qué les llama tanto la atención el mapa.

–Es lógico –argumentó Ricci–. Llevan miles de años creyendo que el mundo es solo China, que fuera viven bárbaros incapaces de aportar nada a su cultura y, de repente, les demostramos que no somos bárbaros, sino que estamos más avanzados que ellos en ciencias como matemáticas, astronomía, geografía…

–Esa es la llave que me condujo al emperador de China –continuó el padre Ricci–. El mapa llamó su atención y cuando les expliqué la forma de tomar las medidas y la utilización de escalas para representarlas sobre el papel, entonces vieron que podíamos enseñarles muchas cosas.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **En mayo de 2010 se han cumplido 400 años del fallecimiento del misionero Matteo Ricci, que llegó a China en 1582. Busca información sobre su vida.**

Se puede encontrar información sobre la vida de Matteo Ricci en la página web: http://www.tendencias21.net/Matteo-Ricci-un-modelo-para-el-encuentro-de-la-civilizacion-europea-y-china_a3804.html

2 **Investiga sobre el mapa que presentó Matteo Ricci al emperador de China.**

Se puede obtener información sobre el mapa elaborado por Matteo Ricci en: http://noticias.latino.msn.com/curiosas/articulos.aspx?cp-documentid=23239510

3 **¿Qué otras aportaciones a la ciencia realizó Matteo Ricci a lo largo de su vida?**

En esta página web se puede completar la biografía de Matteo Ricci y encontrar datos sobre los trabajos que realizó: http://www.forumlibertas.com/frontend/forumlibertas/noticia.php?id_noticia=6456

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Decide si estas razones forman una proporción comprobando la propiedad fundamental.**

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{10}{6}$ **b)** $\frac{2}{15}$ y $\frac{4}{30}$ **c)** $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$ **d)** $\frac{11}{2}$ y $\frac{7}{3}$

a) $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$

b) $2 \cdot 30 = 15 \cdot 4$

c) $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$

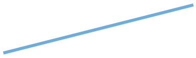
d) $11 \cdot 3 \neq 2 \cdot 7$

Forman proporción las razones de los apartados a), b) y c).

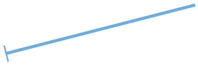
2 **Calcula el término que falta en las proporciones.** **a)** $\frac{5}{4} = \frac{x}{6}$ **b)** $\frac{7}{21} = \frac{4}{x}$

a) $x = 7{,}5$ b) $x = 12$

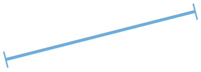
3 **Dibuja una recta, una semirrecta y un segmento.**



recta



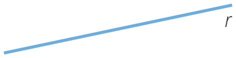
semirecta



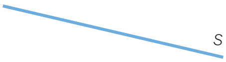
segmento

4 **Dibuja una recta secante a *r* y otra paralela a *s*.**

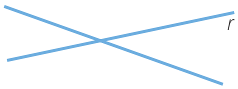
a)



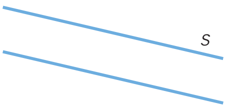
b)



a)



b)



EJERCICIOS

001 **Determina las razones de los segmentos, e indica si son proporcionales.**

a) $\overline{AB} = 18$ **cm,** $\overline{CD} = 30$ **mm,** $\overline{EF} = 30$ **mm y** $\overline{GH} = 5$ **mm**

b) $\overline{AB} = 2{,}5$ **cm;** $\overline{CD} = 5$ **cm;** $\overline{EF} = 4{,}5$ **cm y** $\overline{GH} = 8$ **cm**

a) $\frac{180}{30} = \frac{30}{5} \rightarrow$ Son proporcionales.

b) $\frac{2{,}5}{5} \neq \frac{4{,}5}{8} \rightarrow$ No son proporcionales.

002 **Halla la longitud del segmento desconocido.**

a) $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12}$ **b)** $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60}$ **c)** $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}}$

a) $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \overline{AB} = 2$

c) $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 45$

b) $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60} \rightarrow \overline{AB} = 25$

003 **Dados dos segmentos** $\overline{AB} = 3$ **cm y** $\overline{CD} = 9$ **cm:**

a) Calcula la razón de los segmentos *AB* y *CD*.

b) Escribe dos segmentos que sean proporcionales a ellos.

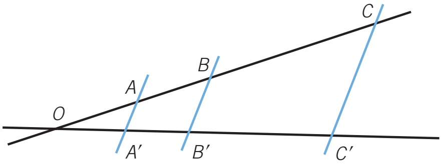
a) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\overline{EF} = 6$ cm, $\overline{GH} = 18$ cm

004 **Si la razón entre los segmentos *AB* y *CD* es *a*, y la razón entre *EF* y *GH* es *b*, ¿qué condición se tiene que dar cumplir para que *AB* y *CD* sean proporcionales a *EF* y *GH*?**

Las razones deben ser iguales, por lo que $a = b$.

005 **Calcula la longitud de *OA′* y *BC*.**



$\overline{OA} = 3$ **cm**
$\overline{AB} = 2{,}25$ **cm**
$\overline{A'B'} = 1{,}5$ **cm**
$\overline{B'C'} = 5$ **cm**

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{3}{\overline{OA'}} = \frac{2{,}25}{1{,}5} \rightarrow \overline{OA'} = 2$ cm

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{BC}}{5} \rightarrow \overline{BC} = 7{,}5$ cm

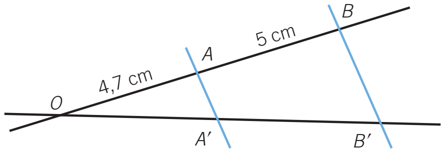
006 **Determina la longitud del segmento *OC* en la figura del ejercicio anterior.**

$$\overline{OC'} = 2 + 1{,}5 + 5 = 8{,}5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{OC}}{8{,}5} \rightarrow \overline{OC} = 12{,}75 \text{ cm}$$

Se puede hallar también sumando los tres segmentos que lo forman.

007 **En esta figura sabemos que $\overline{OA} = 4{,}7$ cm, $\overline{AB} = 5$ cm y la razón $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1{,}6$.**



Calcula $\overline{A'B'}$, $\overline{OA'}$ y $\overline{OB'}$.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 1{,}6 = \frac{5}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3{,}125 \text{ cm}$$

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}}{1{,}6} \rightarrow \overline{OA'} = \frac{4{,}7}{1{,}6} = 2{,}9375 \text{ cm}$$

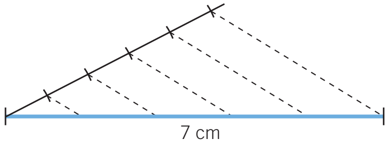
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow 1{,}6 = \frac{9{,}7}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6{,}0625 \text{ cm}$$

008 **Divide gráficamente un segmento de 7 cm en:**

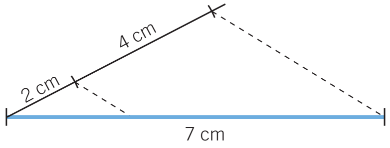
a) 5 partes iguales.

b) 2 partes, siendo una la mitad que la otra.

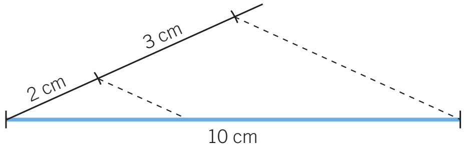
a)



b)

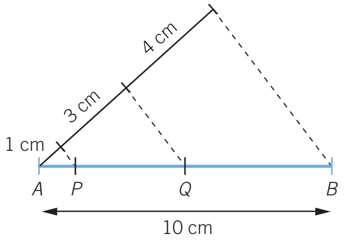


009 **Divide un segmento de 10 cm en partes proporcionales a dos segmentos de 2 cm y 3 cm. ¿Cuánto miden los segmentos resultantes?**



Los segmentos miden 4 cm y 6 cm.

010 **Observa la siguiente figura: ¿Cuánto miden los segmentos *AP*, *PQ* y *QB*?**

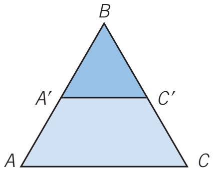


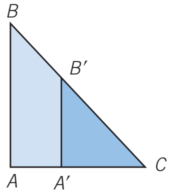
Aplicando el teorema de Tales: $\frac{10}{8} = \frac{\overline{AP}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{3} = \frac{\overline{QB}}{4}$

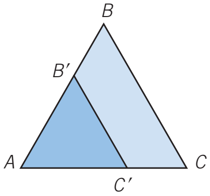
$\overline{AP} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ cm $\qquad \overline{PQ} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ cm $\qquad \overline{QB} = 5$ cm

011 **Dibuja tres pares de triángulos en posición de Tales. Indica cómo lo haces.**

Dibujamos un triángulo y luego trazamos la paralela a uno de sus lados que corte a los otros dos.

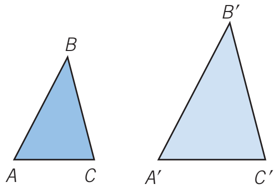


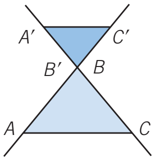


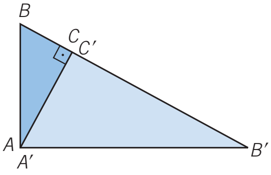


012 **Dibuja tres pares de triángulos semejantes que no estén en posición de Tales. Indica cómo lo haces.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:







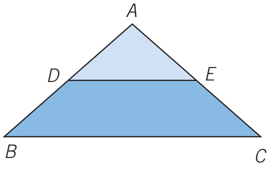
013 **¿Están los dos triángulos en posición de Tales? Calcula $\overline{EC}$ y $\overline{CB}$ si:**

$\overline{AB} = 8$ **cm**

$\overline{ED} = 5$ **cm**

$\overline{AC} = 6$ **cm**

$\overline{DB} = 4$ **cm**



Los triángulos están en posición de Tales, ya que tienen en común el ángulo $\hat{A}$, y los lados *DE* y *BC* son paralelos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{\overline{EC}} \rightarrow \overline{EC} = \frac{24}{8} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

014 **Los lados de un triángulo miden 5, 4 y 8 cm, y los lados de otro, 5, 6 y 8 cm, respectivamente. Decide si son semejantes.**

Sus lados no son proporcionales: $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6} \neq \frac{8}{8}$, por tanto, los triángulos no son semejantes.

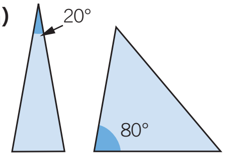
015 **Comprueba que un triángulo rectángulo de catetos de 8 y 6 cm es semejante a otro de catetos de 4 cm y 3 cm.**

La hipotenusa del primer triángulo es 10 cm y la del segundo es 5 cm.

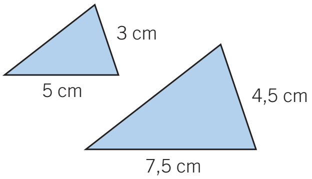
Sus lados son proporcionales: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, por tanto, los triángulos son semejantes.

016 **Comprueba si estos triángulos isósceles son semejantes, e indica el criterio aplicado.**

a)



b)

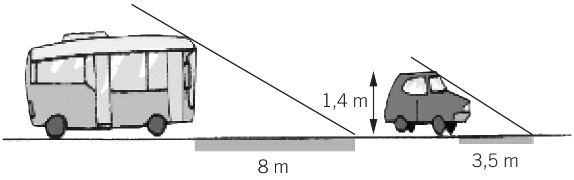


a) Los ángulos del primer triángulo miden 20°, 80° y 80°, y los ángulos del segundo triángulo miden 80°, 50° y 50°. Tienen un ángulo igual pero los lados que lo forman no son proporcionales, por lo que no cumplen el tercer criterio, y por tanto, no son semejantes.

b) Los lados del primer triángulo miden 5 cm, 5 cm y 3 cm, y los lados del segundo miden 7,5 cm; 7,5 cm y 4,5 cm.

Como $\frac{5}{7{,}5} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{3}{4{,}5}$, los triángulos son semejantes por tener sus lados proporcionales. Por tanto, cumplen el primer criterio.

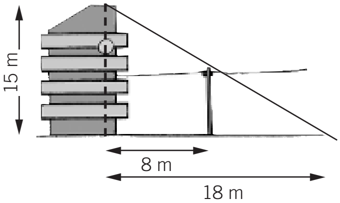
017 **La sombra de un autobús a cierta hora mide 8 m. A la misma hora, la sombra de un coche, que mide 1,4 m, es de 3,5 m. ¿Qué altura tiene el autobús?**



Se forman dos triángulos semejantes, ya que sus ángulos son iguales:

$\frac{x}{8} = \frac{1{,}4}{3{,}5} \rightarrow x = 3{,}2$ m

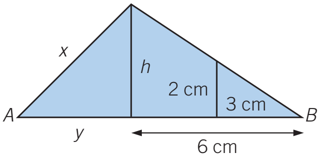
018 **¿Qué altura tiene el poste?**



Por formarse triángulos semejantes:

$$\frac{15}{18} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 8{,}33 \text{ m}$$

019 **Calcula el valor de *x*, si $\overline{AB} = 10$ cm.**

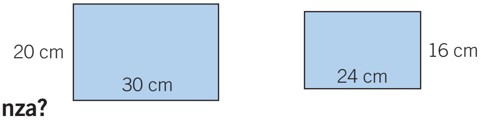


$$\frac{h}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$y = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

020 **Dados estos rectángulos, resuelve.**



a) ¿Son semejantes?

b) ¿Cuál es su razón de semejanza?

c) Determina las medidas de otro rectángulo que sea semejante a ellos.

a) $\frac{30}{24} = \frac{20}{16} \rightarrow$ Son semejantes.

b) La razón de semejanza es 1,25.

c) Cualquier rectángulo cuyos lados formen una razón de semejanza de 1,25; por ejemplo, 10 cm y 8 cm.

021 **¿Cuál es la razón entre las áreas del ejercicio anterior? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?**

$$A_{\text{R. Grande}} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{R. Pequeño}} = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2$$

La razón es: $\frac{600}{384} = 1{,}5625 = 1{,}25^2$

La razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

022 **Calcula el perímetro de los rectángulos del ejercicio anterior. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?**

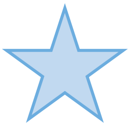
$$P_{\text{R. Grande}} = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 60 + 40 = 100 \text{ cm}$$

$$P_{\text{R. Pequeño}} = 24 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 48 + 32 = 80 \text{ cm}$$

La razón es: $\frac{100}{80} = 1{,}25$

La razón entre sus perímetros coincide con la razón de semejanza.

023 **Observa la figura y razona si son semejantes a ellas las figuras de cada apartado. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.**



a)

b)

a) Esta figura es semejante porque:

- Los ángulos que se forman son iguales a la figura original, es decir, conserva la forma.
- Sus dimensiones son el doble que las de la figura original, por lo tanto, son proporcionales.

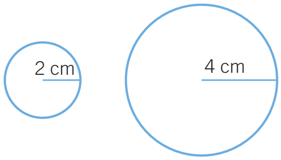
La razón de semejanza es 2.

b) Esta figura no es semejante porque los ángulos que se forman no son iguales a la figura original, es decir, no conserva la forma.

024 **Dibuja dos círculos de radio 2 cm y 4 cm, respectivamente.**

a) ¿Son semejantes? **b) Calcula la razón de semejanza.**

a)



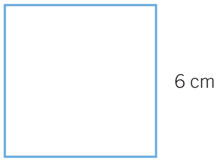
Sí, son semejantes.

b) La razón de semejanza es 2.

025 **Dibuja un cuadrado de lado 3 cm.**

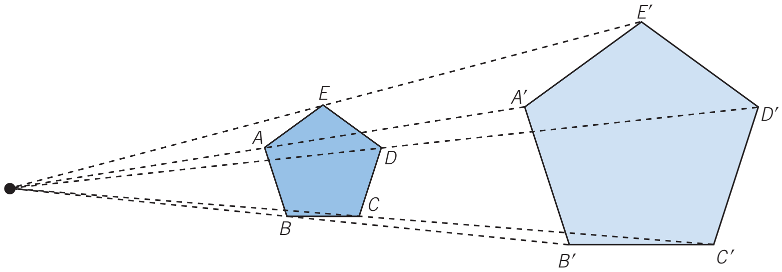
a) Dibuja otro cuadrado semejante a él con razón de semejanza 2.
b) Dibuja otro cuadrado que no sea semejante a ellos.

a)

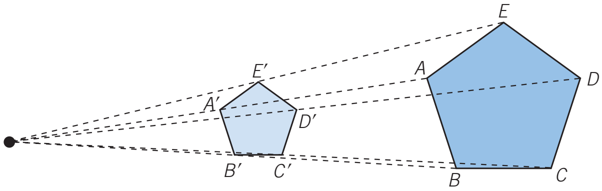


b) No es posible ya que todos los cuadrados son semejantes.

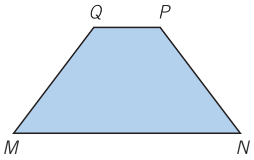
026 **Observa el pentágono *ABCDE* de la figura.**
Construye un pentágono semejante, sabiendo que la razón de semejanza es 2.

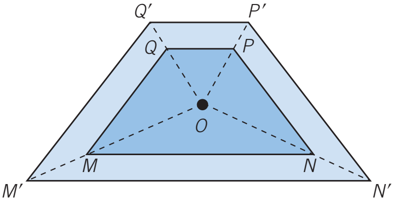


027 **Dibuja un pentágono semejante al anterior cuya razón de semejanza sea 0,5.**



028 **Construye un polígono semejante, con razón de semejanza 1,5, tomando como punto *O* un punto interior del polígono.**





029 **¿Qué figura obtienes como resultado al construir un polígono semejante a otro con razón de semejanza 1?**

Se obtiene un polígono idéntico al original.

030 **Explica qué significa cada escala.**

a) 1 : 300 **b) 1 : 60 000** **c) 1 : 12**

a) Una escala de 1 : 300 significa que la distancia original es 300 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 3 m en el original.

b) Una escala de 1 : 60 000 significa que la distancia original es 60 000 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 600 m en el original.

c) Una escala de 1 : 12 significa que la distancia original es 12 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 12 cm en el original.

031 **¿Qué escala se ha utilizado al dibujar un objeto si 3 cm del dibujo equivalen a 3 dm reales?**

$\frac{3\text{ cm}}{3\text{ dm}} = \frac{3\text{ cm}}{30\text{ cm}} = \frac{1}{10}$. La escala es 1 : 10.

032 **Realizamos el plano de una casa a escala 1 : 75.**

a) ¿Qué razón de semejanza se aplica?

b) ¿Qué medida real tiene una línea del plano de 5 cm de longitud?

c) ¿Cuánto mide en el plano una longitud de 4,5 cm?

a) La razón de semejanza es $\frac{1}{75}$.

c) En el plano mide: $\frac{4{,}5}{75} = 0{,}06$ cm

b) $5 \cdot 75 = 375$ cm

ACTIVIDADES

033 ● **Calcula la razón de estos segmentos.**

a) $\overline{AB} = 6$ **cm** $\overline{CD} = 8$ **cm**

b) $\overline{AB} = 64$ **cm** $\overline{CD} = 1$ **m**

c) $\overline{AB} = 15$ **dm** $\overline{CD} = 9$ **m**

d) $\overline{AB} = 20$ **m** $\overline{CD} = 4$ **m**

a) 0,75 b) 0,64 c) 0,167 d) 5

034 ● **Si la razón de los segmentos *AB* y *CD* es $\frac{1}{4}$, calcula:**

a) $\overline{AB}$**, siendo** $\overline{CD} = 76$ **cm**

b) $\overline{CD}$**, siendo** $\overline{AB} = 3$ **cm**

a) $\overline{AB} = 19$ cm b) $\overline{CD} = 12$ cm

035 ● **Si la razón de los segmentos *AB* y *CD* es 1,6; calcula:**

a) $\overline{AB}$**, siendo** $\overline{CD} = 9$ **dm**

b) $\overline{CD}$**, siendo** $\overline{AB} = 13{,}6$ **cm**

a) $\overline{AB} = 14{,}4$ dm b) $\overline{CD} = 8{,}5$ cm

036 ●● **Razona si son proporcionales los segmentos *AB*, *CD*, *EF* y *GH* en cada caso.**

a) $\overline{AB} = 2$ **cm** $\overline{CD} = 5$ **cm** $\overline{EF} = 6$ **cm** $\overline{GH} = 16$ **cm**

b) $\overline{AB} = 2$ **dm** $\overline{CD} = 1$ **m** $\overline{EF} = 5$ **cm** $\overline{GH} = 25$ **cm**

c) $\overline{AB} = 6$ **cm** $\overline{CD} = 8$ **cm** $\overline{EF} = 4$ **m** $\overline{GH} = 3$ **m**

d) $\overline{AB} = 3$ **m** $\overline{CD} = 4$ **m** $\overline{EF} = 12$ **dm** $\overline{GH} = 16$ **dm**

a) $\frac{2}{5} \neq \frac{6}{16}$ → No son proporcionales.

c) $\frac{6}{8} \neq \frac{4}{3}$ → No son proporcionales.

b) $\frac{20}{100} = \frac{5}{25}$ → Son proporcionales.

d) $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ → Son proporcionales.

037 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN SEGMENTO PROPORCIONAL A OTROS TRES SEGMENTOS?

Dados tres segmentos: $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm y $\overline{EF} = 2$ cm, calcula la longitud de un cuarto segmento, $\overline{GH}$, que sea proporcional a ellos.

PRIMERO. Se aplica la definición de segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación.

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}} \rightarrow 4 \cdot \overline{GH} = 3 \cdot 2 \rightarrow \overline{GH} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \text{ cm}$$

TERCERO. Se comprueba la solución.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{1{,}5} \rightarrow 4 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot 2 \rightarrow 6 = 6$$

038 ●

Calcula la longitud que debe tener el cuarto segmento proporcional a los segmentos *AB*, *CD* y *EF*.

a) $\overline{AB} = 3$ cm $\quad \overline{CD} = 6$ cm $\quad \overline{EF} = 9$ cm

b) $\overline{AB} = 2$ m $\quad \overline{CD} = 7$ m $\quad \overline{EF} = 8{,}2$ m

c) $\overline{AB} = 3$ dm $\quad \overline{CD} = 5$ dm $\quad \overline{EF} = 21$ dm

d) $\overline{AB} = 10$ cm $\quad \overline{CD} = 15$ cm $\quad \overline{EF} = 25$ cm

a) $\frac{3}{6} = \frac{9}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 18$ cm

c) $\frac{3}{5} = \frac{21}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 35$ dm

b) $\frac{2}{7} = \frac{8{,}2}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 28{,}7$ m

d) $\frac{10}{15} = \frac{25}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 37{,}5$ cm

039 ●●

La razón de dos segmentos es $\frac{3}{5}$ y la suma de sus longitudes es 8 cm.

Halla la longitud de cada segmento.

$a + b = 8 \qquad r = \frac{3}{5}$

Despejando *a* en la primera ecuación:
$a = 8 - b$

La razón de proporcionalidad es:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{8-b}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow 5 \cdot (8 - b) = 3 \cdot b$$

$$\rightarrow 40 - 5 \cdot b = 3 \cdot b \rightarrow 40 = 8b \rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

$b = 5$ cm $\rightarrow a = 8 - 5 = 3$ cm

040 ●●

La razón de dos segmentos es 4 y la diferencia de sus longitudes es 7 cm. Determina la longitud de cada segmento.

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{a}{b}=4\\ a-b=7\end{array}\right\}\rightarrow a=4b$$

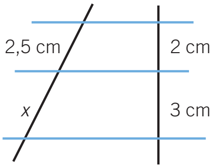
$$4b-b=7\rightarrow b=\frac{7}{3}=2{,}33\text{ cm}$$

$$a=\frac{28}{3}=9{,}33\text{ cm}$$

041 ●●

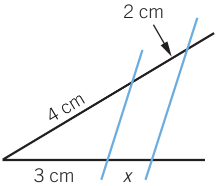
Calcula las longitudes desconocidas.

a)



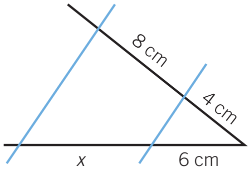
$$\frac{x}{3}=\frac{2{,}5}{2}\rightarrow x=3{,}75\text{ cm}$$

b)



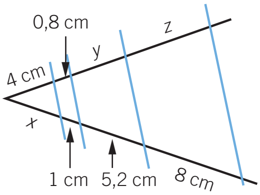
$$\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\rightarrow=1{,}5\text{ cm}$$

c)



$$\frac{x}{8}=\frac{6}{4}\rightarrow x=12\text{ cm}$$

d)

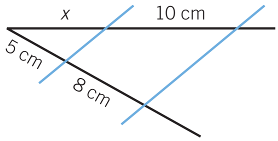


$$\frac{4}{x}=\frac{0{,}8}{1}\longrightarrow x=5\text{ cm}$$

$$\frac{y}{5{,}2}=\frac{0{,}8}{1}\rightarrow y=4{,}16\text{ cm}$$

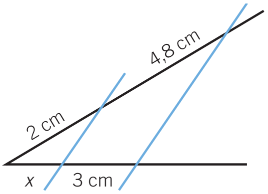
$$\frac{z}{8}=\frac{0{,}8}{1}\longrightarrow z=6{,}4\text{ cm}$$

e)



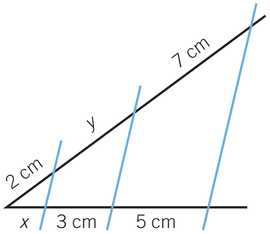
$$\frac{x}{5}=\frac{10}{8}\rightarrow=6{,}25\text{ cm}$$

f)



$$\frac{x}{2}=\frac{3}{4{,}8}\rightarrow x=1{,}25\text{ cm}$$

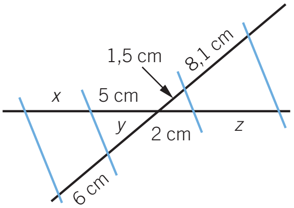
g)



$$\frac{x}{2} = \frac{5}{7} \rightarrow x = 1{,}43 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{5}{7} \rightarrow y = 4{,}2 \text{ cm}$$

h)

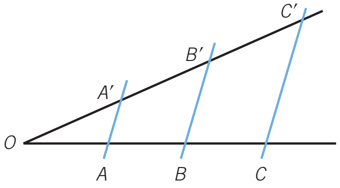


$$\frac{x}{6} = \frac{2}{1{,}5} \longrightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{y} = \frac{2}{1{,}5} \longrightarrow y = 3{,}75 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{8{,}1} = \frac{2}{1{,}5} \rightarrow z = 10{,}8 \text{ cm}$$

042 ● **Considera esta figura:**



a) Si $\overline{OA} = 2$ **cm** $\overline{OB} = 5$ **cm**

$\overline{OA'} = 2{,}6$ **cm** $\overline{OC'} = 11{,}7$ **cm**

calcula: $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{OB'}$ **y** $\overline{BC}$**.**

b) Si $\overline{OA'} = 4$ **cm** $\overline{OB} = 9$ **cm**

$\overline{OB'} = 12$ **cm** $\overline{OC'} = 18$ **cm**

calcula: $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{OC}$ **y** $\overline{BC}$**.**

c) Si $\overline{OA} = 5$ **cm** $\overline{OC} = 22{,}5$ **cm**

$\overline{OC'} = 36$ **cm** $\overline{OB'} = 24$ **cm**

calcula: $\overline{OA'}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$ **y** $\overline{B'C'}$**.**

a) $\overline{AB} = 3$ cm

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{2}{2{,}6} = \frac{3}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3{,}9 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{2}{2{,}6} = \frac{5}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6{,}5 \text{ cm}$$

$$\overline{B'C'} = \overline{OC'} - \overline{OB'} = 11{,}7 - 6{,}5 = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{2}{2{,}6} = \frac{\overline{BC}}{5{,}2} \rightarrow \overline{BC} = 4 \text{ cm}$$

b) $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = 12 - 4 = 8$ cm

$\overline{B'C'} = \overline{OC'} - \overline{OB'} = 18 - 12 = 6$ cm

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OA} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{8} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{AB} = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{18} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OC} = 13{,}5 \text{ cm}$$

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = 13{,}5 - 9 = 4{,}5$ cm

c) $$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{5}{\overline{OA'}} = \frac{22{,}5}{36} \rightarrow \overline{OA'} = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{\overline{OB}}{24} \rightarrow \overline{OB} = 15 \text{ cm}$$

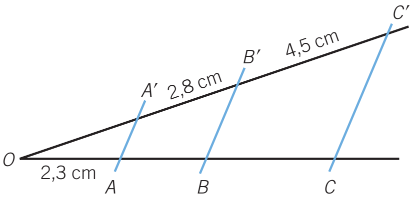
$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 15 - 5 = 10$ cm

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = 22{,}5 - 10 = 12{,}5$ cm

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{10}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 16 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{12{,}5}{\overline{B'C'}} \rightarrow \overline{B'C'} = 20 \text{ cm}$$

043 ●● **En la siguiente figura, la razón $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8$.**



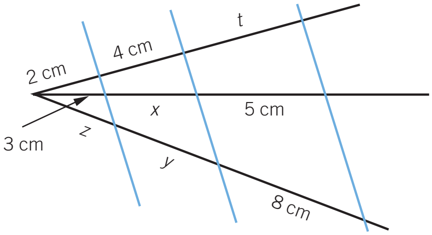
Calcula $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \longrightarrow 0{,}8 = \frac{2{,}3}{\overline{OA'}} \rightarrow \overline{OA'} = 2{,}875 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 0{,}8 = \frac{\overline{AB}}{2{,}8} \longrightarrow \overline{AB} = 2{,}24 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow 0{,}8 = \frac{\overline{BC}}{4{,}5} \longrightarrow \overline{BC} = 3{,}6 \text{ cm}$$

044 ●● **Determina las longitudes desconocidas.**



$$\frac{5}{8} = \frac{3}{z} \rightarrow z = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

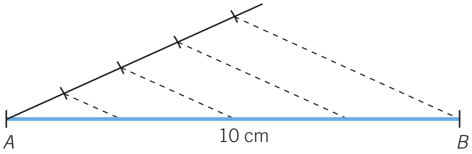
$$\frac{5}{8} = \frac{6}{y} \rightarrow y = 9{,}6 \text{ cm}$$

045 ● **Divide gráficamente un segmento *AB*, con $\overline{AB} = 10$ cm, en:**

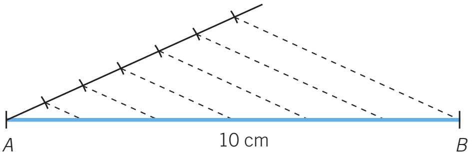
a) 4 partes iguales.

b) 6 partes iguales.

a)



b)



046 ●● **Divide gráficamente un segmento *AB*, con $\overline{AB} = 18$ cm, en partes proporcionales a tres segmentos de medida:**

a) 3 cm, 5 cm y 6 cm

b) 2 cm, 4 cm y 6 cm

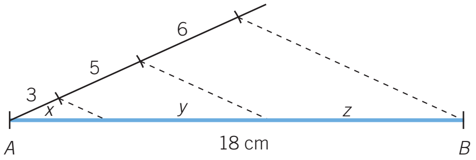
c) 3 cm, 4 cm y 5 cm

d) 2 cm, 6 cm y 9 cm

Calcula las longitudes de los segmentos, y compara el resultado con la solución gráfica.

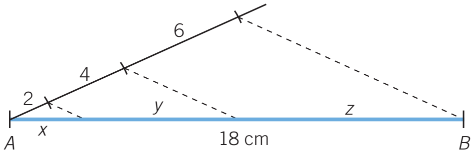
a) $\frac{18}{3+5+6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$

$x = 3{,}86$ cm $y = 6{,}43$ cm $z = 7{,}71$ cm



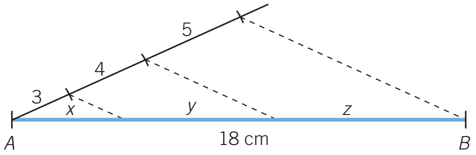
b) $\frac{18}{2+4+6} = \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$

$x = 3$ cm $y = 6$ cm $z = 9$ cm



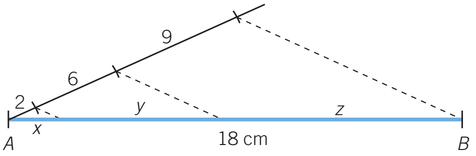
c) $\frac{18}{3+4+5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$

$x = 4{,}5$ cm $y = 6$ cm $z = 7{,}5$ cm



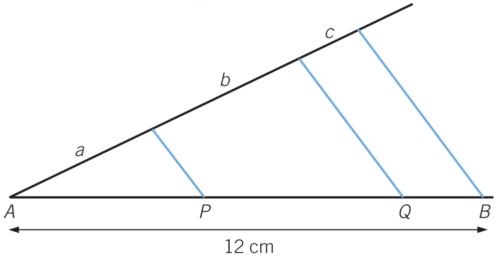
d) $\frac{18}{2+6+9} = \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9}$

$x = 2{,}11$ cm $y = 6{,}35$ cm $z = 9{,}53$ cm



047 ●●

Observa la siguiente figura en la que se divide el segmento *AB*, de 12 cm de longitud, en partes proporcionales a los segmentos *a*, *b* y *c*. Calcula $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QB}$, teniendo en cuenta que:



a) $a = 6$ **cm,** $b = 8$ **cm y** $c = 4$ **cm**

b) $a = 5$ **cm,** $b = 10$ **cm y** $c = 3$ **cm**

c) $a = 8$ **cm,** $b = 10$ **cm y** $c = 4$ **cm**

d) $a = 2$ **cm,** $b = 5$ **cm y** $c = 1$ **cm**

a) $$\frac{12}{6+8+4} = \frac{\overline{AP}}{6} = \frac{\overline{PQ}}{8} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

$\overline{AP} = 4$ cm $\quad \overline{PQ} = 5{,}33$ cm $\quad \overline{QB} = 2{,}67$ cm

b) $$\frac{12}{5+10+3} = \frac{\overline{AP}}{5} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{3}$$

$\overline{AP} = 3{,}33$ cm $\quad \overline{PQ} = 6{,}67$ cm $\quad \overline{QB} = 2$ cm

c) $$\frac{12}{8+10+4} = \frac{\overline{AP}}{8} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

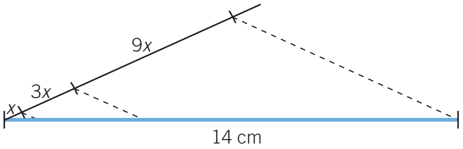
$\overline{AP} = 4{,}36$ cm $\quad \overline{PQ} = 5{,}45$ cm $\quad \overline{QB} = 2{,}18$ cm

d) $$\frac{12}{2+5+1} = \frac{\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{PQ}}{5} = \frac{\overline{QB}}{1}$$

$\overline{AP} = 3$ cm $\quad \overline{PQ} = 7{,}5$ cm $\quad \overline{QB} = 1{,}5$ cm

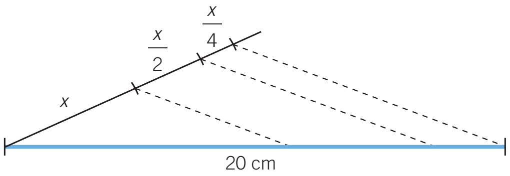
048 ●●

Divide un segmento de 14 cm en tres partes, cada una el triple que la anterior.



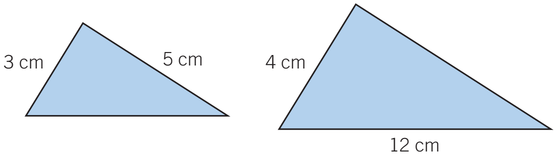
049 ●●

Divide un segmento de 20 cm en tres partes, cada una la mitad que la anterior.

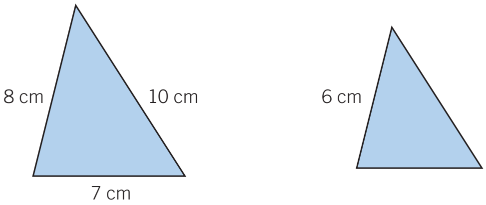


050 **Calcula la longitud de los lados desconocidos en los siguientes pares de triángulos semejantes.**

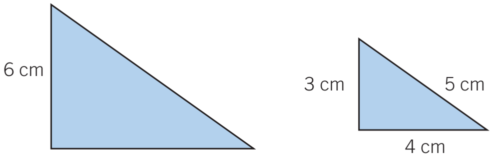
a)



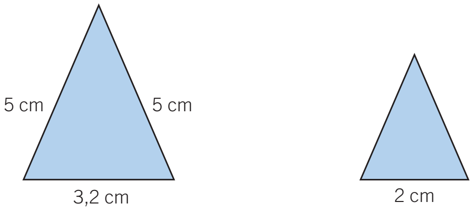
b)



c)



d)



a) $\frac{3}{4} = \frac{5}{x} = \frac{y}{12}$

$x = 6{,}67$ cm $\qquad y = 9$ cm

Los lados miden 9 cm y 6,67 cm.

b) $\frac{8}{6} = \frac{10}{x} = \frac{7}{y}$

$x = 7{,}5$ cm $\qquad y = 5{,}25$ cm

Los lados miden 5,25 cm y 7,5 cm.

c) $\frac{6}{3} = \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$

$x = 10$ cm $\qquad y = 8$ cm

Los lados miden 8 cm y 10 cm.

d) $\frac{5}{x} = \frac{5}{y} = \frac{3{,}2}{2}$

$x = 3{,}125$ cm $\qquad y = 3{,}125$ cm

Los dos lados miden 3,125 cm.

051 **Dos triángulos, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, son semejantes. Los lados de $\widehat{ABC}$ son:**

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm} \qquad \overline{BC} = 5 \text{ cm} \qquad \overline{CA} = 6 \text{ cm}$$

Calcula los lados de $\widehat{A'B'C'}$ y la razón de semejanza, si $\overline{A'B'} = 7{,}2$ cm.

La razón de semejanza es: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{4}{7{,}2} = 0{,}\widehat{5}$

$$\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{0{,}\widehat{5}} = 9 \text{ cm} \qquad \overline{C'A'} = \frac{\overline{CA}}{0{,}\widehat{5}} = 10{,}8 \text{ cm}$$

052 **La razón de semejanza de dos triángulos, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$, es $r = \dfrac{1}{4}$.**

Obtén los lados desconocidos de los dos triángulos, sabiendo que:

a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm y $\overline{CA} = 10$ cm

b) $\overline{A'B'} = 20$ cm, $\overline{B'C'} = 24$ cm y $\overline{C'A'} = 26$ cm

c) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm y $\overline{C'A'} = 16$ cm

a) $\overline{A'B'} = 4 \cdot 5 = 20$ cm $\quad \overline{B'C'} = 4 \cdot 8 = 32$ cm $\quad \overline{C'A'} = 4 \cdot 10 = 40$ cm

b) $\overline{AB} = \dfrac{1}{4} \cdot 20 = 5$ cm $\quad \overline{BC} = \dfrac{1}{4} \cdot 24 = 6$ cm $\quad \overline{CA} = \dfrac{1}{4} \cdot 26 = 6{,}5$ cm

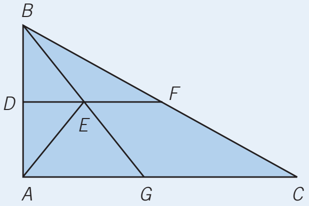
c) $\overline{A'B'} = 4 \cdot 4 = 16$ cm $\quad \overline{B'C'} = 4 \cdot 5 = 20$ cm $\quad \overline{CA} = \dfrac{1}{4} \cdot 16 = 4$ cm

053

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RECONOCEN LOS TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES?

Indica qué triángulos de la siguiente figura están en posición de Tales.



PRIMERO. Se identifican todos los triángulos posibles.

$\widehat{ABC}$ $\quad \widehat{ABE}$ $\quad \widehat{ABG}$ $\quad \widehat{ADE}$ $\quad \widehat{AEG}$ $\quad \widehat{EBF}$ $\quad \widehat{GBC}$ $\quad \widehat{DBE}$ $\quad \widehat{DBF}$

SEGUNDO. Se toman los que tienen un ángulo común.

$\widehat{ABC}$ y $\widehat{DBF}$ tienen el ángulo $\widehat{B}$ en común.

$\widehat{ABE}$, $\widehat{ABG}$ y $\widehat{DBE}$ tienen el ángulo $\widehat{B}$ en común.

$\widehat{EBF}$ y $\widehat{GBC}$ tienen el ángulo $\widehat{B}$ en común.

TERCERO. De cada grupo de triángulos con un ángulo en común se consideran los que tienen paralelos los lados opuestos a ese ángulo.

$\widehat{ABC}$ y $\widehat{DBF}$ tienen AC y DF paralelos.

$\widehat{ABG}$ y $\widehat{DBE}$ tienen AG y DE paralelos.

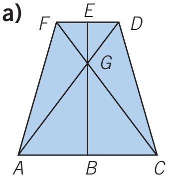
$\widehat{EBF}$ y $\widehat{GBC}$ tienen EF y GC paralelos.

Estos pares de triángulos están en posición de Tales.

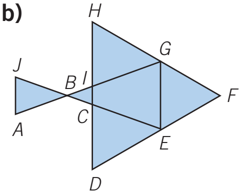
054 ●●

Identifica en las siguientes figuras todos los triángulos que estén en posición de Tales.

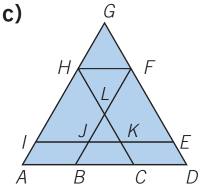
a)



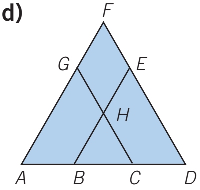
b)



c)



d)



a) Ninguno de los triángulos están en posición de Tales.

b) Los triángulos que están en posición de Tales son:
$\widehat{DFH}$ y $\widehat{EFG}$.

c) Los triángulos que están en posición de Tales son:
$\widehat{ADG}$ y $\widehat{ACH}$, $\widehat{ADG}$ y $\widehat{HFG}$, $\widehat{ADG}$ e $\widehat{IEG}$, $\widehat{ADG}$ y $\widehat{BDF}$, $\widehat{LJK}$ y $\widehat{LBC}$.

d) Los triángulos que están en posición de Tales son:
$\widehat{ADF}$ y $\widehat{ACG}$, $\widehat{ADF}$ y $\widehat{BDE}$.

055 ●

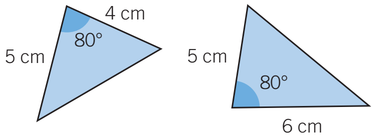
Los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$ miden $\overline{AB} = 12$ mm, $\overline{BC} = 15$ mm y $\overline{CA} = 21$ mm, y los del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ miden $\overline{A'B'} = 35$ mm, $\overline{B'C'} = 25$ mm y $\overline{C'A'} = 20$ mm. ¿Son semejantes los dos triángulos?

Los lados son proporcionales: $\frac{21}{35} = \frac{15}{25} = \frac{12}{20}$, y son semejantes.

056 ●●

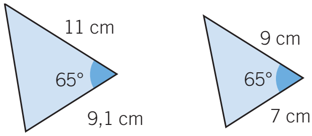
Determina si estos pares de triángulos son semejantes y explica qué criterio aplicas en cada caso.

a)



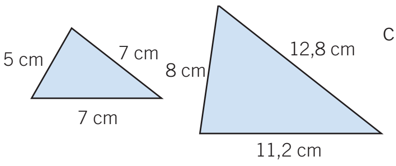
a) Como $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

b)



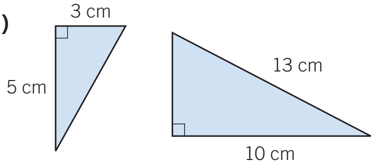
b) Como $\frac{9}{11} \neq \frac{7}{9{,}1}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

c)



c) Como $\frac{5}{8} = \frac{7}{11{,}2} \neq \frac{7}{12{,}8}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

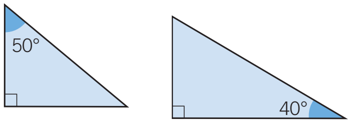
d)



d) La hipotenusa del triángulo menor es $\sqrt{34}$ y el cateto del triángulo mayor es $\sqrt{69}$.

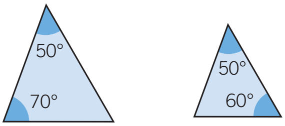
Como $\frac{5}{10} \neq \frac{3}{\sqrt{69}}$, no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.

e)



e) Son semejantes, ya que sus ángulos son iguales (90°, 50° y 40°).

f)



f) Son semejantes, pues sus ángulos son iguales (70°, 50° y 60°).

057 ●●

Los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$ miden $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm y $\overline{CA} = 6$ cm. Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante $\widehat{A'B'C'}$, sabiendo que:

a) La razón de semejanza es $r = 2{,}5$.

b) El perímetro de $\widehat{A'B'C'}$ es 30 cm.

a) $\overline{A'B'} = 2{,}5 \cdot 4 = 10$ cm

$\overline{B'C'} = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$ cm

$\overline{C'A'} = 2{,}5 \cdot 6 = 15$ cm

b) $\frac{4+5+6}{30} = \frac{4}{\overline{A'B'}} = \frac{5}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{\overline{C'A'}}$

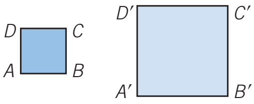
$\overline{A'B'} = 8$ cm $\overline{B'C'} = 10$ cm $\overline{C'A'} = 12$ cm

058 ●

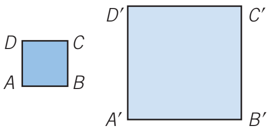
Dibuja dos cuadrados semejantes que tengan las siguientes razones de semejanza.

a) $r = 2$ **b)** $r = \frac{1}{2}$ **c)** $r = 2{,}5$ **d)** $r = \frac{1}{3}$

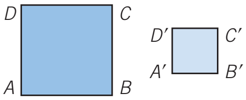
a)



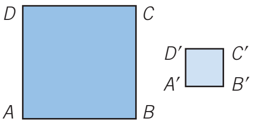
c)



b)

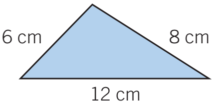


d)



059 ●

Dibuja triángulos semejantes que tengan estas razones de semejanza respecto del dibujado.



a) $r = \frac{1}{2}$

b) $r = \frac{1}{4}$

c) $r = 3$

d) $r = \frac{5}{4}$

a) Los lados del triángulo semejante medirán: 6 cm, 4 cm y 3 cm

b) Los lados del triángulo semejante medirán: 3 cm, 2 cm y 1,5 cm

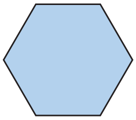
c) Los lados del triángulo semejante medirán: 36 cm, 24 cm y 18 cm

d) Los lados del triángulo semejante medirán: 15 cm, 10 cm y 7,5 cm

060 ●

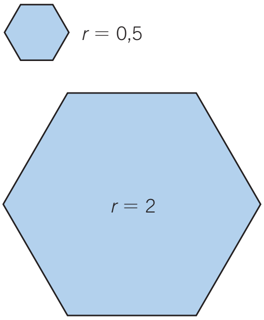
Dibuja figuras semejantes a la siguiente que tengan como razón de semejanza $r = 2$ y $r = 0,5$.

a)

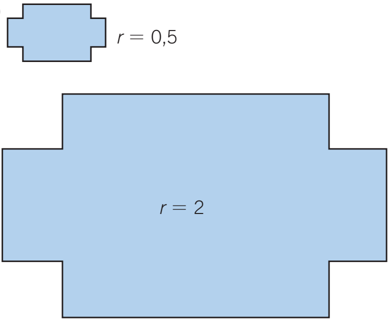


b)

a)



b)



061 ●●

Dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{1}{4}$. Las medidas de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ son $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm y $\overline{AC} = 14$ cm. Halla las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{1}{4} \cdot 14 = 3,5 \text{ cm}$$

062 ●●

Dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes y su razón de semejanza es 3. Las medidas de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ son $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\overline{AC} = 3,5$ cm. Obtén las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = 3 \cdot 3,5 = 10,5 \text{ cm}$$

063 ●●

Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) Todos los cuadrados son semejantes.
b) Todos los rectángulos son semejantes.
c) Todos los pentágonos son semejantes.
d) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
e) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

a) y e) Verdadera: Sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.

b), c) y d) Falsa: Sus lados no tienen por qué ser proporcionales.

064 ●●●

Halla el perímetro de un rectángulo que es semejante a otro rectángulo de lados 8 cm y 5 cm, con estas razones de semejanza.

a) $r = 2$ **b)** $r = 0{,}5$ **c)** $r = \frac{3}{4}$ **d)** $r = \frac{5}{2}$

¿Qué relación existe entre los perímetros del rectángulo original y el de los triángulos semejantes?

a) Los lados serán 16 cm y 10 cm, por lo que su perímetro es 52 cm.
b) Los lados serán 4 cm y 2,5 cm, por lo que su perímetro es 13 cm.
c) Los lados serán 6 cm y 3,75 cm, por lo que su perímetro es 19,5 cm.
d) Los lados serán 20 cm y 12,5 cm, por lo que su perímetro es 65 cm.

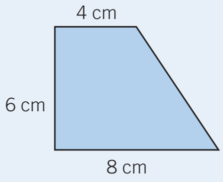
La razón de los perímetros es la misma que la de los rectángulos.

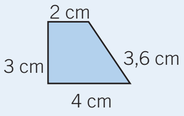
065

HAZLO ASÍ

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE ENTRE EL PERÍMETRO Y EL ÁREA DE DOS FIGURAS SEMEJANTES?

Calcula el perímetro y el área de estos trapecios semejantes.





Si dos polígonos son semejantes, se cumple que:

- Sus perímetros son proporcionales con razón r.
- Sus áreas son proporcionales con razón r^2.

PRIMERO. Se calcula la razón de semejanza del primer polígono respecto del segundo.

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2 \leftarrow \text{Razón de semejanza}$$

SEGUNDO. Se obtiene el perímetro y el área del segundo polígono.

$$P = 3 + 4 + 2 + 3{,}6 = 12{,}6 \text{ cm} \quad A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Multiplicando estos resultados por la razón y el cuadrado de la razón, se obtienen el perímetro y el área del primer polígono, respectivamente.

$$P = 12{,}6 \cdot r = 12{,}6 \cdot 2 = 25{,}2 \text{ cm} \quad A = 9 \cdot r^2 = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ cm}^2$$

066 **Halla el perímetro y el área de estos polígonos semejantes.**

a) Triángulo semejante a un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm y razón 3.

b) Cuadrado semejante a un cuadrado de lado 3 cm y razón 4.

c) Rectángulo semejante a un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm y razón 2.

a) $P = 12 \cdot 3 = 36$ cm

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

b) $P = 12 \cdot 4 = 48$ cm

$A = 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 144 \text{ cm}^2$

c) $P = 20 \cdot 2 = 40$ cm

$A = 4 \cdot 6 \cdot 2^2 = 96 \text{ cm}^2$

067 **Expresa, mediante una escala numérica.**

a) 25 cm de un plano representan 25 km reales.

b) 0,8 dm de un plano representan 160 km reales.

a) $\left.\begin{array}{l} 25 \text{ km} = 2500000 \text{ cm} \\ 25 \text{ cm} \end{array}\right\}$

$$\frac{2500000}{25} = 100000 \rightarrow 1:100\,000$$

b) $\left.\begin{array}{l} 160 \text{ km} = 1\,600\,000 \text{ dm} \\ 0{,}8 \text{ dm} \end{array}\right\}$

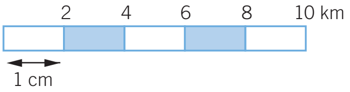
$$\frac{1\,600\,000}{0{,}8} = 2000000 \rightarrow 1:2\,000\,000$$

068 **Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.**

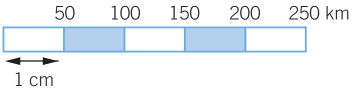
a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.

b) 1 cm en el plano equivale a 50 km en la realidad.

a)



b)



069 ● **Calcula la altura real de los objetos.**

Objeto	Escala
	1 : 20
	1 : 10
	1 : 25

El armario en el gráfico mide 2 cm, y en la realidad mide:

$2 \cdot 20 = 40$ cm

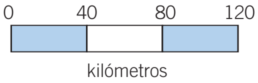
La furgoneta en el gráfico mide 1,5 cm, y en la realidad mide:

$1{,}5 \cdot 10 = 15$ cm

La casa en el gráfico mide 2,3 cm, y en la realidad mide:

$2{,}3 \cdot 25 = 57{,}5$ cm

070 ● **Halla la distancia real entre dos pueblos separados 4 cm en un mapa con esta escala:**



40 km = 4 000 000 cm

Como la escala gráfica es 1 : 4 000 000, en el plano 4 cm equivalen a:

$4 \cdot 4\,000\,000 = 16\,000\,000$ cm = 160 km reales

071 ● **La distancia real entre dos ciudades es de 450 km. Halla la distancia que las separa en un mapa realizado a escala 1 : 1 500 000.**

La escala 1 : 1 500 000 significa que 1 500 000 cm de la realidad se representan en el plano con 1 cm. Como 1 500 000 cm = 15 km:

$$\left.\begin{array}{r} 15 \text{ km} \longrightarrow 1 \text{ cm} \\ 450 \text{ km} \longrightarrow x \phantom{\text{ cm}} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{450}{15} = 30 \text{ cm}$$

072 ●● **Al representar la carretera que une dos pueblos en un mapa de escala 1 : 500 000, su longitud mide 6 cm. ¿Cuál sería la longitud de la carretera si la representamos en un plano de escala 1 : 60 000?**

En la escala 1 : 500 000, la longitud de 6 cm en el mapa es:

$6 \cdot 500\,000 = 3\,000\,000$ cm = 30 km reales

En la escala 1 : 60 000, la longitud real de 30 km es:

$3\,000\,000 : 60\,000 = 50$ cm en el plano

073 ●●

El plano de una vivienda está realizado a escala 1 : 60.

a) ¿Qué dimensiones reales tiene la cocina si en el plano mide 4 cm de ancho y 7 cm de largo?

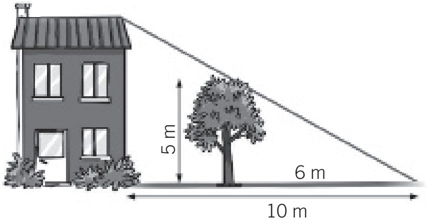
b) El pasillo mide 7,5 m en la realidad. ¿Cuánto mide de largo en el plano?

a) Ancho: $4 \cdot 60 = 240$ cm $= 2,4$ m Largo: $7 \cdot 60 = 420$ cm $= 4,2$ m

b) Largo: $\frac{750}{60} = 12,5$ cm

074 ●●

Un árbol mide 5 m de altura y, a una determinada hora del día, proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio de la figura si a la misma hora proyecta una sombra de 10 m?



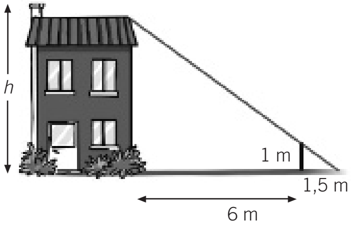
Como se forman dos triángulos semejantes:

$$\frac{6}{10} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 8,33 \text{ m}$$

El edificio tiene 8,33 m de altura.

075 ●●

Si un palo mide 1 m, y la sombra que proyecta a una determinada hora del día es de 1,5 m, ¿cuánto mide un edificio que proyecta una sombra de 6 m a la misma hora?

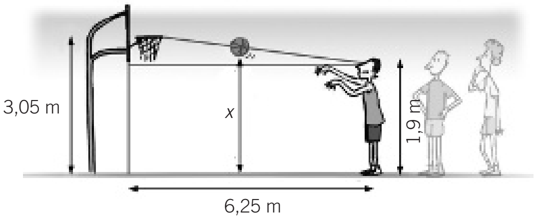


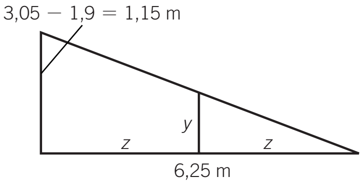
Como se forman dos triángulos rectángulos semejantes:

$$\frac{h}{1} = \frac{6}{1,5} \rightarrow h = 4 \text{ m}$$

076 ●●

Un jugador de baloncesto de 1,9 m, que está situado a 6,25 m de la canasta, lanza el balón hacia la misma. Calcula la altura a la que está el balón cuando va por la mitad del recorrido.





Ambos triángulos son semejantes, y como *z* es la mitad de 6,25 m, *y* será la mitad de 1,15 m: $y = 0,575$ m

La altura a la que está el balón será: $x = 1,9 + 0,575 = 2,475$ m

077 ●●

La sombra que proyecta un padre que mide 1,8 m de estatura, a las 3 de la tarde, es de 2,1 m. ¿Qué estatura tendrá su hijo si la sombra que proyecta es de 1,5 m?

Como se forman triángulos semejantes:

$$\frac{1{,}8}{2{,}1} = \frac{x}{1{,}5} \rightarrow x = 1{,}29 \text{ m}$$

078 ●●

La sombra que proyecta Julia, que mide 1,34 m, a la 1 de la tarde, es de 1,2 m. ¿Cuánto mide su madre si en ese momento proyecta una sombra de 1,4 m?

Como se forman triángulos semejantes:

$$\frac{1{,}34}{1{,}2} = \frac{x}{1{,}4} \rightarrow x = 1{,}56 \text{ m}$$

079 ●●

Al lado de un semáforo, la sombra de Juan mide 1,5 m y la sombra del semáforo mide 60 cm más que la de Juan. ¿Cuál es la longitud del semáforo si Juan mide 1,75 m?

Como se forman triángulos semejantes:

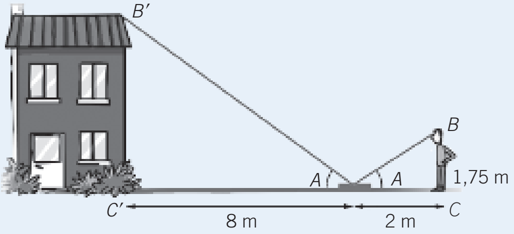
$$\frac{1{,}75}{1{,}5} = \frac{x}{1{,}5 + 0{,}6} \rightarrow x = 2{,}45 \text{ m}$$

080

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA MEDIANTE EL REFLEJO EN UN CRISTAL?

Para determinar la altura de un objeto inaccesible, colocamos un espejo en el suelo y nos alejamos la distancia necesaria para observar el punto más alto del objeto. ¿Qué altura tiene el edificio?



PRIMERO. Se comprueba que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes. En este caso son semejantes por ser triángulos rectángulos y por ser iguales los ángulos de refracción, $\widehat{A}$.

SEGUNDO. Se aplica la proporcionalidad entre sus lados.

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{B'C'}}{1{,}75} = \frac{8}{2} \rightarrow \overline{B'C'} = 1{,}75 \cdot 4 = 7 \text{ m}$$

La altura del edificio es de 7 m.

081 ●●●

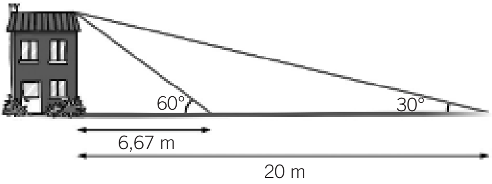
Ana está situada a 5 m de la orilla de un río y ve reflejada una montaña en el agua. Si Ana mide 1,70 m y el río está a 3 km de la montaña, ¿qué altura tiene la montaña?

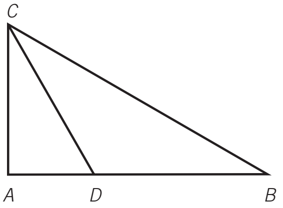
$$\frac{x}{3\,000} = \frac{1{,}70}{5} \rightarrow x = 1\,020 \text{ m}$$

082 ●●●

Se mide la sombra de un edificio en dos momentos del día.

Calcula la altura del edificio.





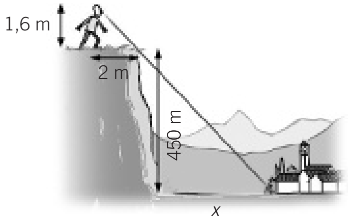
Como los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ACD}$ son semejantes:

$$\frac{6{,}67}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{20} \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{133{,}4} = 11{,}55 \text{ m}$$

La altura del edificio es 11,55 m.

083 ●●●

Pedro está a 2 m de un precipicio y ve alineado un pueblo con el borde del precipicio. ¿A qué distancia está el pueblo del precipicio?

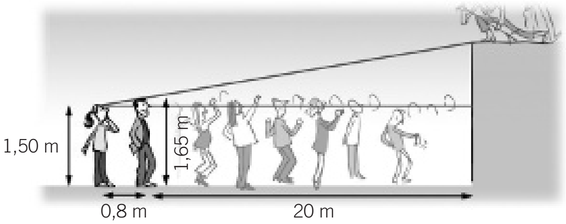


$$\frac{1{,}6}{450} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 562{,}5 \text{ m}$$

La distancia del pueblo al precipicio es 562,5 m.

084 ●●

María, que mide 1,50 m, acude a un concierto de rock, y 80 cm por delante de ella, se sitúa Luis, que mide 1,65 m. Calcula la altura del escenario si María ve el borde del mismo justo por encima de Luis y Luis se encuentra a 20 m del escenario.



$$\frac{0{,}8}{0{,}8 + 20} = \frac{1{,}65 - 1{,}50}{x} \rightarrow x = 3{,}9 \text{ m es la altura sobre María}$$

La altura del escenario es: 1,5 + 3,9 = 5,4 m

085 ●●● **Razona las siguientes cuestiones.**

a) Dos polígonos con todos sus ángulos iguales, ¿son semejantes? ¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?

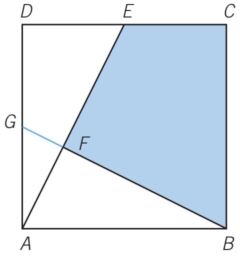
b) Dos polígonos con todos sus lados proporcionales, ¿son semejantes? ¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?

a) No es cierto en general, ya que la igualdad de los ángulos no supone que los lados sean proporcionales, por ejemplo, en los rectángulos. Solo es cierto en el caso de los triángulos equiláteras y los polígonos regulares.

b) No es cierto en general, ya que la proporcionalidad de los lados no implica la igualdad de los ángulos. Solo es cierto en el caso de los triángulos.

086 ●●● **Halla el área de la zona sombreada, sabiendo que:**

- **El cuadrado mide 2 cm de lado.**
- **El punto *E* es el punto medio del lado *DC*.**
- **El ángulo $\hat{F}$ es recto.**



Como $\widehat{ABG}$ es igual a $\widehat{AED}$, el área buscada es igual al área del cuadrado menos el área de los dos triángulos más el área de la intersección (el triángulo $\widehat{AFG}$, que es semejante a $\widehat{ADE}$).

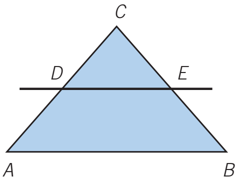
$$\overline{AE} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{FG}}{1} = \frac{\overline{AF}}{2} \rightarrow \begin{cases} \overline{FG} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}45 \text{ cm} \\ \overline{AF} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}89 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Área de } \widehat{AFG} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}89}{2} = 0{,}2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 4 - 1 - 1 + 0{,}2 = 2{,}2 \text{ cm}^2$$

087 ●●● **El triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles, de área 8 cm². Si *D* y *E* son los puntos medios de los lados iguales, calcula el área del trapecio *ABDE*.**



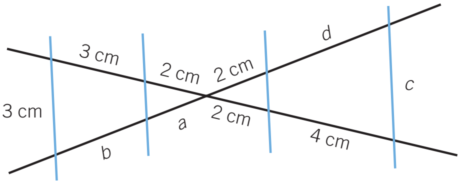
El área del trapecio es el área de $\widehat{ABC}$ menos el área de $\widehat{DEC}$.

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes, de razón $\frac{1}{2}$. Su área tiene como razón: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Por tanto, el área de $\widehat{DEC}$ es:
$8 : 4 = 2 \text{ cm}^2$

El área del trapecio es: $8 - 2 = 6 \text{ cm}^2$

088 **Halla los datos que faltan.**



Por ser triángulos semejantes:

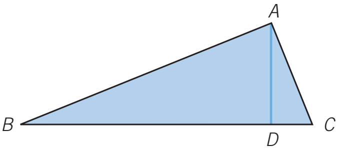
$\frac{2}{2} = \frac{d}{4} \rightarrow d = 4$ cm

$\frac{2}{2} = \frac{3}{b} \longrightarrow b = 3$ cm

$\frac{2}{2} = \frac{2}{a} \rightarrow a = 2$ cm

$\frac{2+d}{c} = \frac{2+3}{3} \rightarrow c = \frac{18}{5} = 3{,}6$ cm

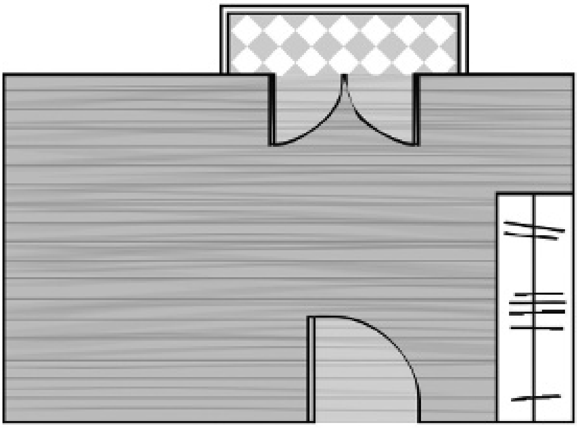
089 **Demuestra que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo genera otros dos triángulos semejantes.**



Por ser $\widehat{ABC}$ un triángulo rectángulo:
$\hat{B} = 90° - \hat{C}$
Por ser $\widehat{DAC}$ un triángulo rectángulo:
$\hat{A} = 90° - \hat{C}$
Por tanto, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DAC}$ tienen los tres ángulos iguales, luego son semejantes.
El razonamiento para $\widehat{DBA}$ es semejante.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

090 **Arturo se va a mudar a un piso nuevo. Según el plano esta será su habitación.**



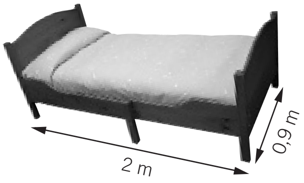
El plano está dibujado a escala y su nueva habitación en realidad mide 4,56 m de largo.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) **¿A qué escala está dibujado el plano?**

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) En esta habitación tendrá que distribuir sus muebles. Para hacerse una idea de cómo los colocará, los ha medido todos.



Después, los dibujará a escala y los colocará sobre el plano para decidir su colocación. Copia el plano y determina cómo se pueden distribuir los muebles.

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) ¿Podrá montar en la habitación una maqueta de su tren eléctrico que mide 2,5 × 1,5 m?

a) El largo de la habitación mide 4,56 m y está representado por 7,6 cm.

Como $\frac{456}{7,6} = 60$, la escala del plano es 1 : 60.

b) El ancho de la habitación medirá: $4,6 \cdot 60 = 276$ cm $= 2,76$ m

Las dimensiones de los muebles en el plano son:

Cama: Largo $= \frac{200}{60} = 3,33$ cm Ancho $= \frac{90}{60} = 1,5$ cm

Escritorio: Largo $= \frac{150}{60} = 2,5$ cm Ancho $= \frac{60}{60} = 1$ cm

Cajonero: Largo $= \frac{80}{60} = 1,33$ cm Ancho $= \frac{30}{60} = 0,5$ cm

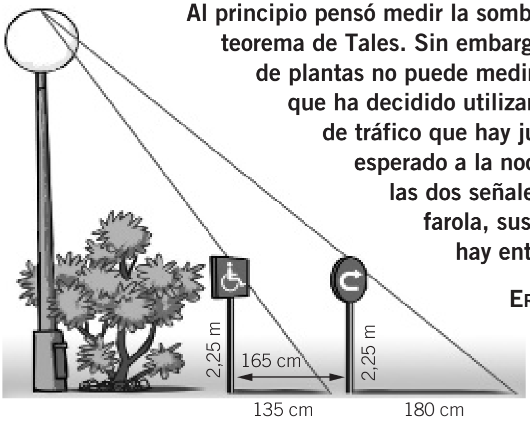
Como los tres muebles no caben sobre la misma pared, la mejor manera de aprovechar el espacio es colocando el mueble cajonero en la esquina que hace el armario empotrado. A la izquierda de la puerta se pueden colocar la cama y el escritorio, sobre la misma pared o paredes distintas.

c) Las dimensiones de la maqueta del tren a escala son:

Largo $= \frac{250}{60} = 4,17$ cm Ancho $= \frac{150}{60} = 2,5$ cm

Considerando los muebles y el espacio para poder abrir la puerta, la maqueta no cabe en la habitación.

091 ●●● **En la mediana de la calle donde vive Ricardo han colocado una farola muy alta. Ricardo cree que la altura de la farola incumple la normativa sobre contaminación lumínica, y para comprobarlo quiere averiguar cuánto mide la farola exactamente.**



Al principio pensó medir la sombra de la farola y aplicar el teorema de Tales. Sin embargo, como la farola está rodeada de plantas no puede medir su sombra con exactitud. Así que ha decidido utilizar las medidas de dos señales de tráfico que hay junto a la farola. Para ello ha esperado a la noche y ha medido la altura de las dos señales, que están alineadas con la farola, sus sombras y la separación que hay entre ellas.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Dibuja un gráfico que represente los triángulos que se forman y sus medidas.

b) ¿Qué medidas necesita calcular para determinar la altura de la farola?

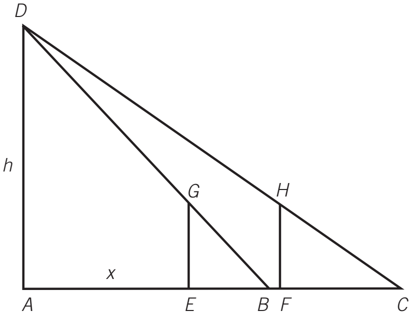
ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) ¿Cuál es la altura de la farola?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) La normativa municipal establece que la altura máxima de las farolas no puede ser superior a la altura correspondiente al segundo piso de ninguno de los edificios ubicados a su alrededor. ¿Crees que la farola que han instalado en la calle de Ricardo cumple dicha normativa?

a) Si h es la altura de la farola y x, la distancia de la farola a la primera señal, tenemos que:



b) Necesita estas medidas: $\overline{AB}$, $\overline{EB}$, $\overline{EG}$, $\overline{AC}$, $\overline{FC}$ y $\overline{FH}$.

c) Como son semejantes: $\widehat{ABD}$ con $\widehat{EBG}$ y $\widehat{ACD}$ con $\widehat{FCH}$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+135}{135}=\dfrac{h}{225}\\[2ex] \dfrac{x+165+180}{180}=\dfrac{h}{225}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x+135}{135}=\frac{x+165+180}{180}$$

$$180x+24\,300=135x+46\,575 \rightarrow 45x=22\,275 \rightarrow x=495 \text{ cm}$$

$$\frac{495+135}{135}=\frac{h}{225} \rightarrow h=1\,050 \text{ cm}=10{,}5 \text{ m}$$

La altura de la farola es 10,5 m.

d) La altura de una planta en un edificio suele estar entre 3 m y 3,5 m. A veces, las plantas bajas que están ocupadas por locales comerciales llegan a medir hasta 5 m. En cualquier caso, lo normal es que exista un edificio alrededor cuya altura, entre la planta baja y la primera planta no supere los 9 m, y por tanto la farola no cumpliría la normativa.

10 Figuras planas. Áreas

El regalo

Mientras se sacudía el polvo que el empinado camino había depositado en sus ropas y sus sandalias, Apolonio de Perga miraba con admiración el templo de Artemisa, una de las Siete Maravillas construidas en el mundo.

Tras el parco aseo, volvió su vista hacia los árboles y bajo una higuera encontró descansando a Eudemo, el amigo con quien había quedado.

–La subida es cansada pero merece la pena, el templo es lo más parecido al Olimpo de los dioses que se puede ver en la Tierra –dijo Apolonio sentándose a su lado.

–No lo discuto, Apolonio –contestó Eudemo–. Sin embargo, deberías hacer ofrendas en honor a Atenea, que es la diosa de la sabiduría, y no a Artemisa, diosa de la caza.

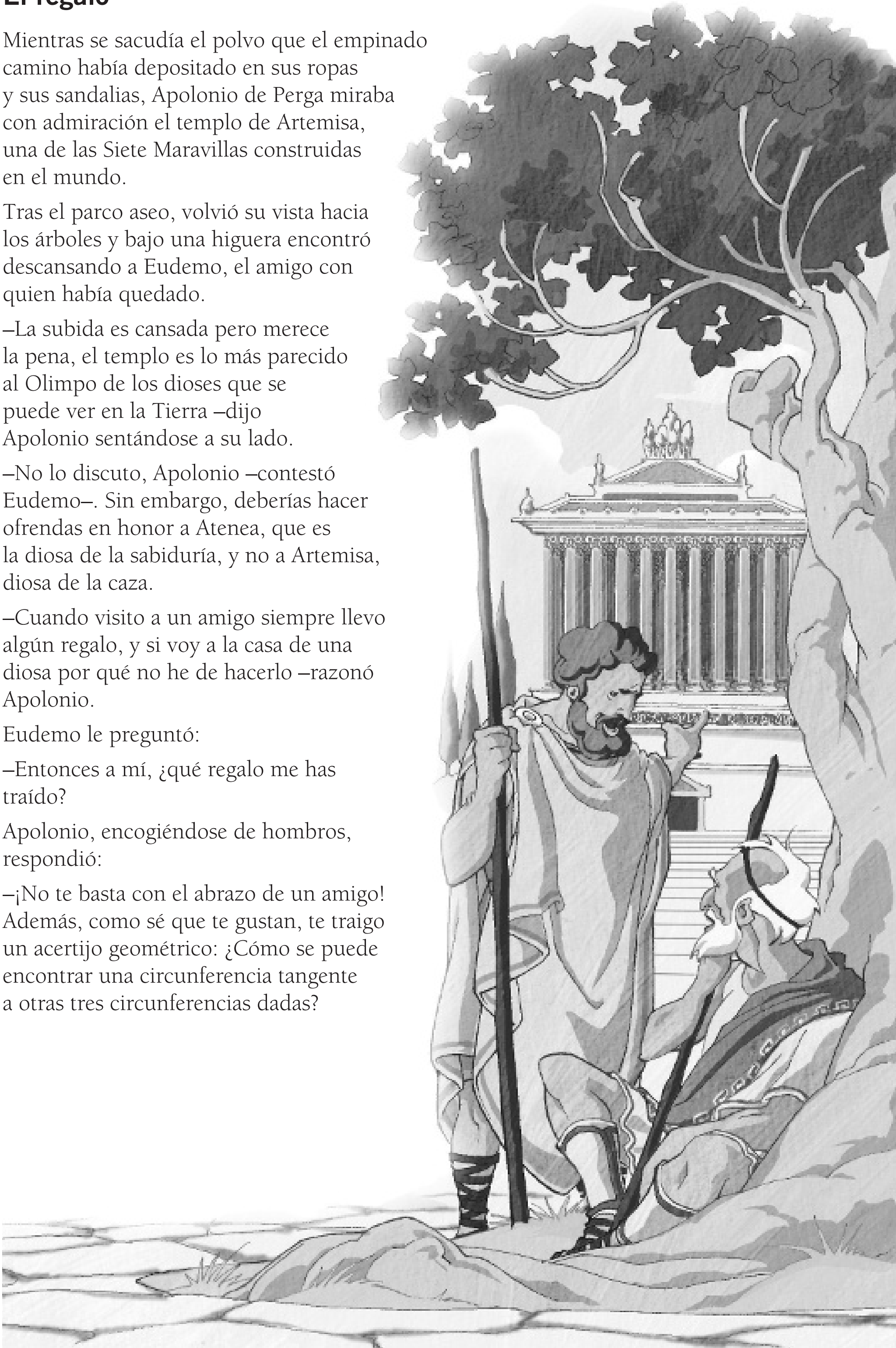
–Cuando visito a un amigo siempre llevo algún regalo, y si voy a la casa de una diosa por qué no he de hacerlo –razonó Apolonio.

Eudemo le preguntó:

–Entonces a mí, ¿qué regalo me has traído?

Apolonio, encogiéndose de hombros, respondió:

–¡No te basta con el abrazo de un amigo! Además, como sé que te gustan, te traigo un acertijo geométrico: ¿Cómo se puede encontrar una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas?



DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **Sabemos muy poco de la vida de Apolonio de Perga. Busca información sobre este matemático y la época en que vivió.**

Se puede encontrar información sobre la vida de Apolonio de Perga en la página web:
http://www.uantof.cl/estudiomat/historia/griegos/Apolonio/apolonio.html

En la siguiente página se puede completar la información sobre la biografía de Apolonio:
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/HistoriaMatematica/apolonio/pag1.htm

2 **Investiga sobre el acertijo que plantea Apolonio a Eudemo en el texto.**

En esta página web se puede obtener información sobre la construcción de una circunferencia tangente a otras tres circunferencias dadas:
http://publab03.coseac.unam.mx/ludoteca/Avanzada/circtang.jsp;jsessionid=AEB36556ABA589C44141C09EC4896E45

3 **¿Qué otras aportaciones a las matemáticas realizó Apolonio y cuál es su influencia histórica?**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Apolonio y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Apolonio.asp

EVALUACIÓN INICIAL

1 **¿Existe un triángulo acutángulo con un ángulo recto? ¿Y uno obtusángulo con dos ángulos obtusos?**

No existe un triángulo acutángulo con un ángulo recto ya que en este tipo de triángulos sus tres ángulos deben ser agudos. Tampoco existe un triángulo obtusángulo con dos ángulos obtusos ya que la suma de los tres ángulos sería mayor que 180°.

2 **¿Se puede dibujar un triángulo con dos ángulos rectos? ¿Y uno obtusángulo con un ángulo recto?**

No se puede dibujar un triángulo con dos ángulos rectos y tampoco uno obtusángulo con un ángulo recto, en cualquiera de los dos casos la suma de los tres ángulos sería mayor que 180°.

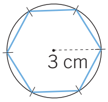
3 **¿Cuánto mide el diámetro de una circunferencia, sabiendo que la longitud de su radio es de 10 cm?**

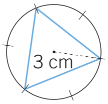
El diámetro de la circunferencia mide 20 cm.

4 **Si el diámetro de un círculo mide 16 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia correspondiente?**

El radio de la circunferencia mide 8 cm.

5 **Dibuja una circunferencia de radio 3 cm y, a partir de ella, construye un hexágono regular y un triángulo equilátero.**





Figuras planas. Áreas

EJERCICIOS

001 **Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son:**

a) 15 cm y 8 cm **b) 12 cm y 35 cm**

a) $h = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ cm b) $h = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$ cm

002 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 cm y 12 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?**

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm

003 **Calcula la diagonal de un rectángulo de 16 m de longitud y 12 m de ancho.**

$d = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$ m

004 **¿Se cumple el teorema de Pitágoras en un triángulo que no sea rectángulo?**

No, solo se cumple en triángulos rectángulos.

005 **Indica si los triángulos con estas medidas son rectángulos, acutángulos u obtusángulos.**

a) 10 cm, 11 cm y 20 cm
b) 4 cm, 5 cm y 6 cm
c) 48 cm, 55 cm y 73 cm

a) $20^2 > 10^2 + 11^2$ → Obtusángulo
b) $6^2 < 4^2 + 5^5$ → Acutángulo
c) $73^2 = 55^2 + 48^2$ → Rectángulo

006 **Sobre un campo rectangular, cuya longitud es de 16 m y su ancho es de 12 m, se traza una diagonal. Calcula su longitud.**

$d = \sqrt{256 + 144} = 20$ m

007 **Determina el largo de un rectángulo de 3 cm de ancho y 22 cm de diagonal.**

$l = \sqrt{488 - 9} = 21{,}79$ cm

008 **Halla la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 12 y 18 cm, respectivamente.**

$l = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10{,}82$ cm

009 **Calcula el lado de un cuadrado si su diagonal mide 18 cm.**

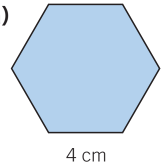
$18^2 = a^2 + a^2$ → $a = 12{,}73$ cm

010 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 7 cm.**

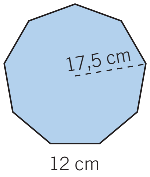
$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6{,}06 \text{ cm}$$

011 **Halla la apotema.**

a)



b)



a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm b) $a = \sqrt{17{,}5^2 - 6^2} = 16{,}44$ cm

012 **Determina la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y su base 6 cm.**

$$h = \sqrt{8^2 - 3^2} = 7{,}42 \text{ cm}$$

013 **Halla la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 12 cm.**

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 144 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 13{,}86 \text{ cm}$$

014 **Calcula el lado de un hexágono regular de apotema 10 cm.**

$$a^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = 11{,}55 \text{ cm}$$

015 **Determina el área de estos polígonos.**

a) Rectángulo cuya altura mide 5,4 cm y su base 9 cm.

b) Cuadrado de lado 6 dm.

c) Romboide cuya base mide 150 mm y su altura, 65 mm.

a) $A = 5{,}4 \cdot 9 = 48{,}6 \text{ cm}^2$

b) $A = 6 \cdot 6 = 36 \text{ dm}^2$

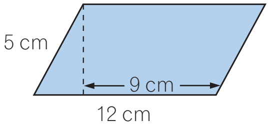
c) $A = 150 \cdot 65 = 9\,750 \text{ mm}^2$

016 **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal mide 0,06 m.**

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow 36 = 2l^2 \rightarrow l^2 = 18 \text{ cm}^2$ $A = l^2 = 18 \text{ cm}^2$

Figuras planas. Áreas

017 **Halla el área de este romboide:**

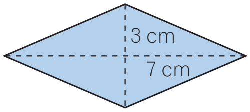


$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

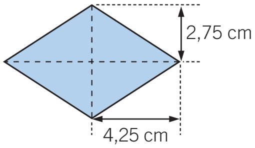
$$A = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$$

018 **Calcula el área de estos polígonos.**

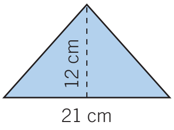
a)



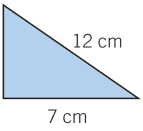
c)



b)



d)



a) $A = \dfrac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5 \text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{21 \cdot 12}{2} = 126 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{8{,}5 \cdot 5{,}5}{2} = 23{,}375 \text{ cm}^2$

d) $c = \sqrt{144 - 49} = 9{,}75 \text{ cm} \rightarrow A = \dfrac{7 \cdot 9{,}75}{2} = 34{,}11 \text{ cm}^2$

019 **Determina el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 14 cm y su base, 22 cm.**

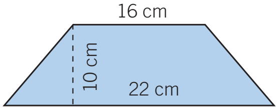
$$h = \sqrt{14^2 - 11^2} = 8{,}66 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{22 \cdot 8{,}66}{2} = 95{,}26 \text{ cm}^2$$

020 **Halla el área de un rombo, sabiendo que su diagonal mayor mide 16 cm y su perímetro, 40 cm.**

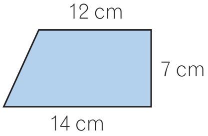
$$\frac{d}{2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm} \rightarrow d = 12 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$$

021 **Calcula el área de estos polígonos.**

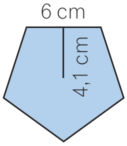
a)



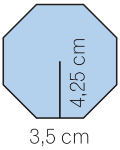
c)



b)



d)



$$\text{a) } A = \frac{16 + 22}{2} \cdot 10 = 190 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } A = \frac{30 \cdot 4{,}1}{2} = 61{,}5 \text{ cm}^2$$

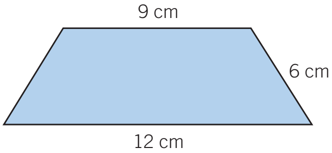
$$\text{c) } A = \frac{(14 + 12) \cdot 7}{2} = 91 \text{ cm}^2$$

$$\text{d) } A = \frac{28 \cdot 4{,}25}{2} = 59{,}5 \text{ cm}^2$$

022 **Determina el lado de un hexágono regular cuya área mide 374,04 cm² y su apotema, 10,39 cm.**

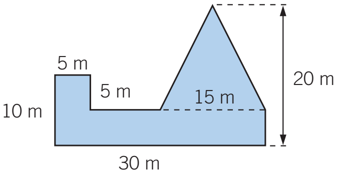
$$374{,}04 = \frac{6 \cdot l \cdot 10{,}39}{2} \rightarrow 748{,}08 = l \cdot 62{,}34 \rightarrow l = 12 \text{ cm}$$

023 **Halla el área de este trapecio:**



$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{12 - 9}{2}\right)^2} = 5{,}81 \text{ cm} \rightarrow A = \frac{(9 + 12) \cdot 5{,}81}{2} = 61 \text{ cm}^2$$

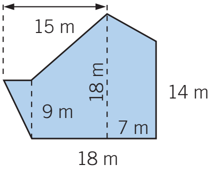
024 **Halla el área de esta figura:**



El área es la suma de las áreas de un cuadrado de lado 5 m, un rectángulo de base 30 m y altura 5 m, y un triángulo de base 15 m y altura 15 m.

$$A = 5^2 + 5 \cdot 30 + \frac{15 \cdot 15}{2} = 25 + 150 + 112{,}5 = 287{,}5 \text{ m}^2$$

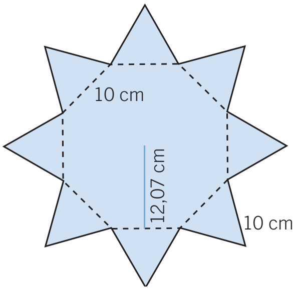
025 **Calcula el área de la figura.**



El área es la suma de las áreas de un triángulo de base 4 m y altura 9 m, y dos trapecios, uno de bases 9 m y 18 m y altura 11 m, y el otro de bases 18 m y 14 m y altura 7 m.

$$A = \frac{9 \cdot 4}{2} + \frac{(9 + 18) \cdot 11}{2} + \frac{(18 + 14) \cdot 7}{2} = 18 + 148{,}5 + 112 = 278{,}5 \text{ m}^2$$

026 **Esta estrella de 8 puntas ha sido construida añadiendo a un octógono regular, de lado 10 cm, 8 triángulos equiláteros cuyos lados son iguales que los del octógono. Sabiendo que la apotema del octógono es de 12,07 cm, halla el área de la estrella.**



El área es la suma del área del octógono más el área de los 8 triángulos:

$$h = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8 \cdot 12{,}07}{2} + 8 \cdot \frac{8{,}66 \cdot 10}{2} =$$

$$= 482{,}8 + 346{,}4 = 829{,}2 \text{ cm}^2$$

027 **Halla la longitud de una circunferencia con:**

a) Radio de 2,3 cm. **b) Diámetro de 16 cm.**

a) $L = 2\pi \cdot 2{,}3 = 14{,}44$ cm

b) $L = \pi \cdot 16 = 50{,}24$ cm

028 **La longitud de una circunferencia es de 49 cm. Calcula su radio.**

$$r = \frac{49}{2\pi} = 7{,}8 \text{ cm}$$

029 **¿Qué longitud de arco tiene un ángulo de 50° en una circunferencia de 78 cm de longitud?**

$$\frac{50}{360} = \frac{x}{78} \rightarrow x = 10{,}83 \text{ cm}$$

La longitud del arco es 10,83 cm.

030 **En una circunferencia, a un ángulo de 30° le corresponde un arco de 2 cm. Determina el radio y la longitud de la circunferencia.**

$$\frac{30}{360} = \frac{2}{L} \rightarrow L = 24 \text{ cm}$$

$$r = \frac{24}{2\pi} = 3{,}82 \text{ cm}$$

031 **Determina el área de un círculo de radio 18 cm.**

$$A = \pi \cdot 18^2 = 1\,017{,}36 \text{ cm}^2$$

032 **Halla el área de un círculo de diámetro 25 cm.**

$$A = \pi \cdot 12{,}5^2 = 490{,}625 \text{ cm}^2$$

033 **Obtén el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias de radio 100 mm y 7 cm.**

$$A = \pi \cdot (10^2 - 7^2) = 160{,}14 \text{ cm}^2$$

034 **Se ha dividido una tarta de 14 cm de radio en 4 partes iguales. Calcula el área de cada parte.**

$$A = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153{,}86 \text{ cm}^2$$

035 **Halla el área de un círculo inscrito en un cuadrado con diagonal de $\sqrt{50}$ cm.**

El diámetro del círculo coincide con el lado del cuadrado, que aplicando el teorema de Pitágoras es: $l = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5$ cm

Por tanto, el área es: $A = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63 \text{ cm}^2$

036 **Calcula la suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero, un cuadrado y un pentágono regular.**

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo equilátero es 180°.
- La suma de los ángulos interiores de un cuadrado es: $180 \cdot (4 - 2) = 360°$
- La suma de los ángulos interiores de un pentágono regular es: $180 \cdot (5 - 2) = 540°$

037 **Halla, en un eneágono regular:**

a) La suma de sus ángulos interiores.

b) La medida de uno de ellos.

a) La suma de los ángulos interiores es: $180 \cdot (9 - 2) = 1\,260°$

b) La medida de un ángulo interior es: $\frac{1\,260}{9} = 140°$

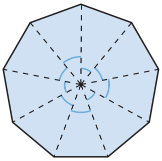
038 **Si la suma de los ángulos interiores de un polígono regular es 1800°, ¿cuántos lados tiene?**

$180 \cdot (n - 2) = 1800 \rightarrow n = 12$ El polígono tiene 12 lados.

039 **¿Por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para hallar el ángulo interior?**

No se puede aplicar porque no tiene todos los ángulos iguales.

040 **Dibuja los ángulos centrales de un eneágono regular, y halla la amplitud de uno de ellos.**



Amplitud de uno de los ángulos centrales:

$$\frac{360}{9} = 40°$$

041 **Calcula la amplitud de un ángulo central de:**

a) Un octógono regular. **b) Un dodecágono regular.**

a) $\frac{360}{8} = 45°$ b) $\frac{360}{3} = 120°$

042 **Si la amplitud de un ángulo central de un polígono regular es 36°, ¿cuántos lados tiene?**

$$\frac{360}{n} = 36° \rightarrow n = \frac{360}{36} = 10$$

043 **¿Por qué en un polígono irregular no se puede aplicar la fórmula para hallar el ángulo central?**

En un polígono irregular lo normal es que no tenga un centro.

044 **Halla el ángulo inscrito en una circunferencia que abarca un arco de:**

a) 40° **b) 104°** **c) 82°** **d) 148°**

a) $\frac{40}{2} = 20°$ b) $\frac{104}{2} = 52°$ c) $\frac{82}{2} = 41°$ d) $\frac{148}{2} = 74°$

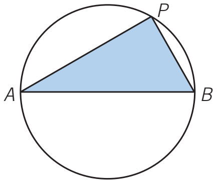
045 **Calcula el ángulo interior de una circunferencia que abarca dos arcos de:**

a) 90° y 30° **b) 48° y 72°** **c) 60° y 120°** **d) 110° y 30°**

a) $\frac{90 + 30}{2} = 60°$ c) $\frac{60 + 120}{2} = 90°$

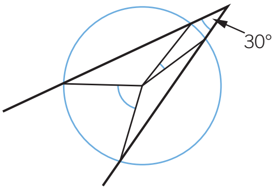
b) $\frac{48 + 72}{2} = 60°$ d) $\frac{110 + 30}{2} = 70°$

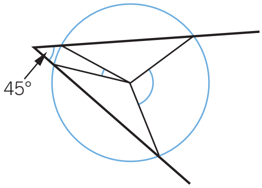
046 **Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y marca un diámetro *AB*. Señala un punto *P* de la circunferencia y calcula $\widehat{APB}$.**



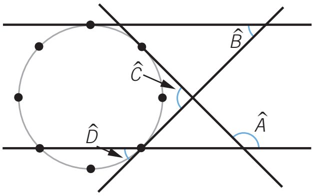
Se forma un ángulo inscrito que abarca un arco de 180°, por lo que el ángulo formado es de 90°.

047 **Traza una circunferencia de radio 3 cm y dibuja dos ángulos exteriores. Determina su medida con la ayuda del transportador.**





048 **Calcula los ángulos señalados.**



$$\hat{A} = 180 - \frac{180 - 90}{2} = 135° \quad \hat{C} = \frac{270 - 90}{2} = 90°$$

$$\hat{B} = \frac{225 - 135}{2} = 45° \qquad \hat{D} = \frac{90}{2} = 45°$$

ACTIVIDADES

049 ● **Calcula la hipotenusa de los triángulos rectángulos con estos catetos.**

a) 10 cm y 8 cm

b) 7,2 cm y 11,6 cm

c) 4 cm y 9 cm

d) $\sqrt{5}$ cm y $\sqrt{8}$ cm

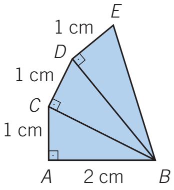
a) $h = 12{,}81$ cm

b) $h = 13{,}65$ cm

c) $h = 9{,}85$ cm

d) $h = \sqrt{13} = 3{,}61$ cm

050 ● **Halla la longitud de $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$.**



$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7} \text{ cm}$$

051 ●● **Contesta a estas cuestiones y, en el caso de que sean ciertas, pon un ejemplo.**

a) ¿Puede existir un triángulo rectángulo equilátero?

b) ¿Y un triángulo rectángulo isosceles?

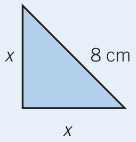
a) No es posible, pues los ángulos de los triángulos equiláteros miden 60°.

b) Sí es posible, por ejemplo un triángulo que tenga los catetos de 1 cm y la hipotenusa de $\sqrt{2}$ cm.

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA MEDIDA DE LOS CATETOS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES?

Calcula la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 8 cm.



PRIMERO. Se aplica el teorema de Pitágoras, considerando que la medida de los catetos es la misma, *x*.

$$8^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 8^2 = 2x^2$$

SEGUNDO. Se halla el valor de *x*.

$$8^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{8^2}{2} = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

Los catetos miden 5,66 cm.

053 ● **Halla la medida de los catetos en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 9 cm.**

$$81 = c^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{\frac{81}{2}} = 6{,}36 \text{ cm}$$

054 ●● **Los lados del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ son $\overline{AB} = 8$ cm y $\overline{AC} = 13$ cm. Calcula $\overline{BC}$ si:**

a) El ángulo recto está en el vértice *A*.

b) El ángulo recto está en el vértice *B*.

c) El ángulo recto está en el vértice *C*.

a) *BC* es la hipotenusa: $\overline{BC} = \sqrt{169 + 64} = 15{,}26$ cm

b) *BC* es un cateto: $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10{,}25$ cm

c) *BC* es un cateto: $\overline{BC} = \sqrt{169 - 64} = 10{,}25$ cm

055 ● **Determina si los triángulos son rectángulos. En caso afirmativo, indica la medida de su hipotenusa y de sus catetos.**

a) Triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.

b) Triángulo de lados 6 cm, 8 cm y 12 cm.

c) Triángulo de lados 5 cm, 6 cm y $\sqrt{61}$ cm.

d) Triángulo de lados 7 cm, 24 cm y 25 cm.

a) $13^2 = 12^2 + 5^2$

Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 13 cm y los catetos miden 5 cm y 12 cm.

b) $12^2 \neq 8^2 + 6^2$

No es un triángulo rectángulo.

c) $61 = 5^2 + 6^2$

Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $\sqrt{61}$ cm y los catetos miden 5 cm y 6 cm.

d) $25^2 = 24^2 + 7^2$

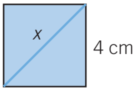
Es un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 25 cm y los catetos miden 24 cm y 7 cm.

056 ● **Clasifica en acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

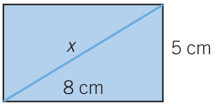
$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 < \overline{CA}^2$	**Tipo**
4	**8**	**6**	$64 > 16 + 36$	Obtusángulo
3	**8**	**7**	$64 > 9 + 49$	Obtusángulo
5	**10**	**8**	$100 > 25 + 64$	Obtusángulo
5	**10**	**9**	$100 < 25 + 81$	Acutángulo

057 ● **Calcula la longitud de *x* en estas figuras.**

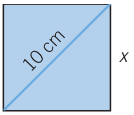
a)



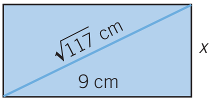
c)



b)



d)



a) $x = \sqrt{2 \cdot 16} = 5{,}66$ cm

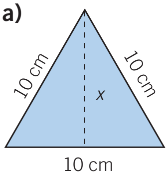
c) $x = \sqrt{25 + 64} = 9{,}43$ cm

b) $x = \sqrt{\dfrac{100}{2}} = 7{,}07$ cm

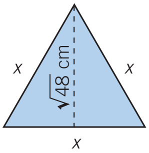
d) $x = \sqrt{117 - 81} = 6$ cm

058 **Determina la longitud de *x* en estos triángulos.**

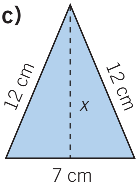
a)



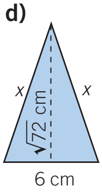
b)



c)



d)



a) $x = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66$ cm

c) $x = \sqrt{144 - 12{,}25} = 11{,}48$ cm

b) $x = \sqrt{\dfrac{4}{3} \cdot 48} = 8$ cm

d) $x = \sqrt{72 + 9} = 9$ cm

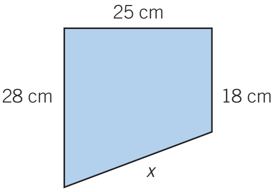
059 **Halla la altura de un triángulo equilátero de perímetro 48 cm.**

El lado del triángulo mide 16 cm.

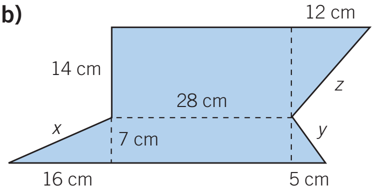
La altura mide: $h = \sqrt{\dfrac{3}{4} \cdot 256} = 13{,}86$ cm

060 **Calcula el perímetro de las siguientes figuras.**

a)



b)



a) $x = \sqrt{(28 - 18)^2 + 25^2} = \sqrt{725} = 26{,}93$ cm

$P = 25 + 28 + 18 + 26{,}93 = 97{,}93$ cm

b) $x = \sqrt{256 + 49} = 17{,}46$ cm

$y = \sqrt{25 + 49} = 8{,}6$ cm

$z = \sqrt{144 + 196} = 18{,}44$ cm

$P = 16 + 28 + 5 + 8{,}6 + 18{,}44 + 12 + 28 + 14 + 17{,}46 = 147{,}5$ cm

061 **Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide:**

a) 10 cm **b) 16 cm** **c) 7 cm**

a) $a = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66$ cm

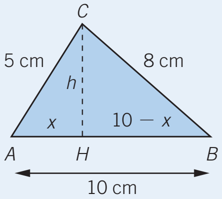
b) $a = \sqrt{256 - 64} = 13{,}86$ cm

c) $a = \sqrt{49 - 12{,}25} = 6{,}06$ cm

062 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA CONOCIENDO SUS LADOS?

Calcula la altura de un triángulo de lados 5 cm, 8 cm y 10 cm.



PRIMERO. Se dibuja el triángulo y se nombra cada uno de sus elementos.

La altura divide a la base del triángulo en dos partes:

AH, cuya longitud llamamos *x*.
HB, cuya longitud será 10 − *x*.

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos resultantes.

En $\widehat{AHC}$:

$$5^2 = x^2 + h^2 \to h^2 = 5^2 - x^2$$

En $\widehat{HBC}$:

$$8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \to h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

TERCERO. Se igualan ambas expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \to 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$\begin{aligned} 25 - x^2 &= 64 - (100 + x^2 - 20x) \\ 25 - x^2 &= 64 - 100 - x^2 + 20x \\ 20x &= 61 \to x = 3{,}05 \text{ cm} \end{aligned}$$

CUARTO. Se halla el valor de *h*.

$$h^2 = 5^2 - x^2 \to h = \sqrt{5^2 - 3{,}05^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

063 ●●

Calcula la altura de un triángulo con lados:

a) $\overline{AB} = 4$ **cm,** $\overline{BC} = 7$ **cm y** $\overline{CA} = 9$ **cm**
b) $\overline{AB} = 6$ **cm,** $\overline{BC} = 10$ **cm y** $\overline{CA} = 14$ **cm**
c) $\overline{AB} = 5$ **cm,** $\overline{BC} = 11$ **cm y** $\overline{CA} = 15$ **cm**

Consideraremos la base como el lado mayor:

a) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 4^2 - x^2 = 7^2 - (9 - x)^2 \\ \to 16 - 49 + 81 = 18x \to x = 2{,}67 \end{array}$$

$$h^2 = 4^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,2{,}67} h^2 = 16 - 7{,}11 \to h = 2{,}98 \text{ cm}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 4^2 - x^2 \\ h^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 6^2 - x^2 = 10^2 - (14 - x)^2 \\ \to 36 - 100 + 196 = 28x \to x = 4{,}71 \end{array}$$

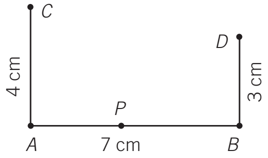
$$h^2 = 6^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,4{,}71} h^2 = 36 - 22{,}18 \to h = 3{,}72 \text{ cm}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to 5^2 - x^2 = 11^2 - (15 - x)^2 \\ \to 25 - 121 + 225 = 30x \to x = 4{,}3 \end{array}$$

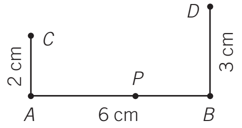
$$h^2 = 5^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,4{,}3} h^2 = 25 - 18{,}49 \to h = 2{,}55 \text{ cm}$$

064 ●●● **Halla la distancia del punto *P* al punto *A*, para que se verifique que $\overline{CP} = \overline{DP}$.**

a)



b)



$$\text{a) } \left.\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= 16 + \overline{AP}^2\\ \overline{CP}^2 &= 9 + (7 - \overline{AP})^2\end{aligned}\right\} \rightarrow 16 + \overline{AP}^2 = 9 + (7 - \overline{AP})^2 \rightarrow 14\overline{AP} = 42 \rightarrow \overline{AP} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \left.\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= 4 + \overline{AP}^2\\ \overline{CP}^2 &= 9 + (6 - \overline{AP})^2\end{aligned}\right\} \rightarrow 4 + \overline{AP}^2 = 9 + (6 - \overline{AP})^2 \rightarrow 12\overline{AP} = 41 \rightarrow \overline{AP} = 3{,}42 \text{ cm}$$

065 ● **Calcula el área de un rectángulo cuya base mide 10 cm y la diagonal $\sqrt{116}$ cm.**

La altura del rectángulo es: $h = \sqrt{116 - 100} = 4$ cm
El área es: $A = 10 \cdot 4 = 40$ cm^2

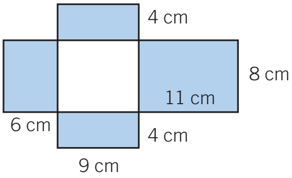
066 ● **Determina el área de un rectángulo de base 7 cm y perímetro 24 cm.**

La altura mide: $h = \dfrac{24 - 14}{2} = 5$ cm. El área es: $A = 7 \cdot 5 = 35$ cm^2

067 ● **Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro mide 22,4 cm.**

El lado del cuadrado mide: $l = \dfrac{22{,}4}{4} = 5{,}6$ cm. El área es 31,36 cm^2.

068 ●● **Calcula el área de la zona coloreada.**

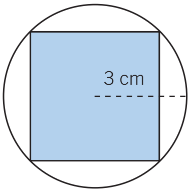


$$A = 6 \cdot 8 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = \\ = 48 + 36 + 88 + 36 = 208 \text{ cm}^2$$

069 ●● **Obtén el lado de un cuadrado sabiendo que su área es de 84,64 cm^2.**

$l = \sqrt{84{,}64} = 9{,}2$ cm

070 ●● **Determina el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.**



La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro, por lo que mide 6 cm.

El lado es: $l = \sqrt{\dfrac{36}{2}} = 4{,}24$ cm

El área mide 18 cm^2.

071 ●●

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo *a* el lado de un cuadrado. Razona la respuesta.

a) La diagonal mide $\sqrt{2}\,a^2$.

b) El perímetro es $4a^2$.

c) El área es a^4.

d) El cuadrado de su diagonal es $2a^2$.

a) Falsa: La diagonal es $d = \sqrt{2a^2}$.

b) Falsa: El perímetro es $P = 4a$.

c) Falsa: El área es $A = a^2$.

d) Verdadera

072 ●●

Halla la medida de la diagonal de un cuadrado cuya área es de 12,25 cm^2.

$$l = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5 \text{ cm} \rightarrow d = \sqrt{2 \cdot 12{,}25} = 4{,}95 \text{ cm}$$

073 ●●●

Encuentra un rectángulo que tenga igual área que un cuadrado de lado 4 cm. Razona cuántos rectángulos cumplen esa condición.

La condición la cumplen todos los rectángulos en los que el producto de sus lados es 16, es decir, $a \cdot b = 16$. Por tanto, las soluciones son infinitas, por ejemplo $a = 2$ cm, $b = 8$ cm.

074 ●

Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden:

a) 4 cm y 12 cm

b) 3 cm y 9 cm

a) $A = \dfrac{4 \cdot 12}{2} = 24 \text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13{,}5 \text{ cm}^2$

075 ●●

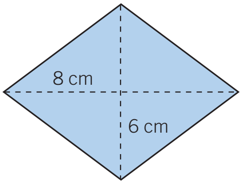
Calcula la medida de una de las diagonales de un rombo de área 30,1 cm^2, sabiendo que la otra diagonal mide 7 cm.

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \rightarrow D = \frac{2 \cdot A}{d} \rightarrow D = \frac{60{,}2}{7} = 8{,}6 \text{ cm}$$

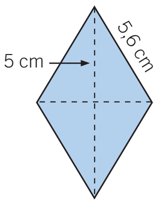
076 ●●

Halla el perímetro y el área de estos rombos.

a)



b)



a) $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$ $\quad A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$ $\quad P = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$

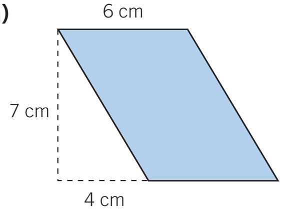
b) $D = 10 \text{ cm}$ $\quad d = 2 \cdot \sqrt{5{,}6^2 - 5^2} = 5{,}04 \text{ cm}$

$A = \dfrac{10 \cdot 5{,}04}{2} = 25{,}2 \text{ cm}^2$ $\quad P = 5{,}6 \cdot 4 = 22{,}4 \text{ cm}$

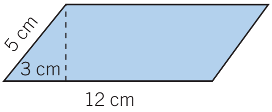
077 ●●

Calcula el área y el perímetro de estas figuras.

a)



b)



a) $l = \sqrt{7^2 + 4^2} = 8{,}06$ cm

$A = 7 \cdot 6 = 42$ cm^2

$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8{,}06 = 28{,}12$ cm

b) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

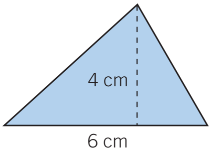
$A = 12 \cdot 4 = 48$ cm^2

$P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 34$ cm

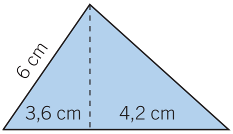
078 ●

Halla el área de los siguientes triángulos.

a)



b)



a) $A = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$ cm^2

b) $h = \sqrt{6^2 - 3{,}6^2} = 4{,}8$ cm

$A = \dfrac{4{,}8 \cdot (3{,}6 + 4{,}2)}{2} = 18{,}72$ cm^2

079 ●

Determina el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide:

a) 36 cm **b) 6 dm** **c) 0,153 m**

a) $l = 12$ cm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4}l^2} = 10{,}39$ cm $\quad A = \dfrac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 62{,}34$ cm^2

b) $l = 2$ dm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4}l^2} = 1{,}73$ dm $\quad A = \dfrac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73$ dm^2

c) $l = 51$ cm $\quad h = \sqrt{\dfrac{3}{4}l^2} = 44{,}17$ cm $\quad A = \dfrac{51 \cdot 44{,}17}{2} = 1126{,}34$ cm^2

080 ● **Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su lado desigual 9 cm.**

$$h = \sqrt{7^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 5{,}36 \text{ cm}$$

$$A = \frac{9 \cdot 5{,}36}{2} = 24{,}12 \text{ cm}^2$$

081 ●● **Obtén el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm, y su lado desigual mide cuatro unidades más que los lados iguales.**

$$h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = 7{,}14 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14 \cdot 7{,}14}{2} = 50 \text{ cm}^2$$

082 ●● **Calcula la altura y la base de un triángulo rectángulo isósceles, si su área mide:**

a) 200 cm² **c) 450 dm²**

b) 120,125 m² **d) 317,52 mm²**

Consideramos un cateto como base y el otro cateto como altura:

a) $200 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 20 \text{ cm}$

Hipotenusa $= \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 28{,}28 \text{ cm}$

Altura $= \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$

b) $120{,}125 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 15{,}5 \text{ m}$

Hipotenusa $= \sqrt{240{,}25 + 240{,}25} = \sqrt{480{,}5} = 21{,}92 \text{ m}$

Altura $= \sqrt{240{,}25 - 120{,}125} = \sqrt{120{,}125} = 10{,}96 \text{ m}$

c) $450 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 30 \text{ dm}$

Hipotenusa $= \sqrt{900 + 900} = \sqrt{1800} = 42{,}43 \text{ dm}$

Altura $= \sqrt{900 - 450} = \sqrt{450} = 21{,}21 \text{ dm}$

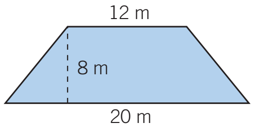
d) $317{,}52 = \frac{c \cdot c}{2} \rightarrow c = 25{,}2 \text{ mm}$

Hipotenusa $= \sqrt{635{,}04 + 635{,}04} = \sqrt{1\,270{,}08} = 35{,}64 \text{ mm}$

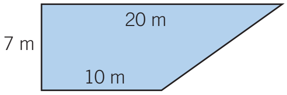
Altura $= \sqrt{635{,}04 - 317{,}52} = \sqrt{317{,}52} = 17{,}82 \text{ mm}$

083 ●●● **Halla el área de los siguientes trapecios.**

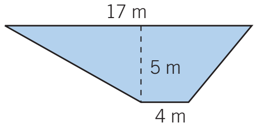
a)



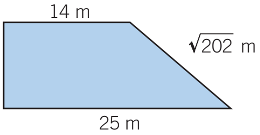
b)



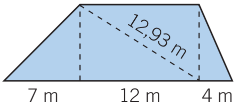
c)



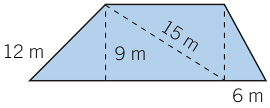
d)



e)



f)



a) $$A = \frac{20 + 12}{2} \cdot 8 = 128 \text{ m}^2$$

b) $$A = \frac{20 + 10}{2} \cdot 7 = 105 \text{ m}^2$$

c) $$A = \frac{17 + 4}{2} \cdot 5 = 52{,}5 \text{ m}^2$$

d) $$h = \sqrt{202 - 121} = 9 \text{ m}$$

$$A = \frac{14 + 25}{2} \cdot 9 = 175{,}5 \text{ m}^2$$

e) $$h = \sqrt{12{,}93^2 - 12^2} = 4{,}82 \text{ m}$$

$$A = \frac{23 + 12}{2} \cdot 4{,}82 = 84{,}35 \text{ m}^2$$

f) $$b = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ m}$$

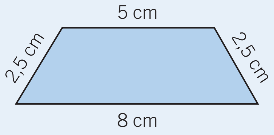
$$B = 6 + 12 + \sqrt{12^2 - 9^2} = 25{,}94 \text{ m}$$

$$A = \frac{12 + 25{,}94}{2} \cdot 9 = 170{,}73 \text{ m}^2$$

084 **HAZLO ASÍ**

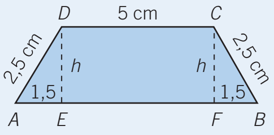
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES SI SE DESCONOCE LA ALTURA?

Calcula el área de este trapecio isósceles:



PRIMERO. Se calcula la base del triángulo rectángulo que determina la altura.

Por ser el trapecio isósceles, las alturas determinan dos triángulos rectángulos iguales cuyas bases miden la mitad de la diferencia de las bases del trapecio.



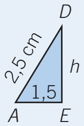
$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8 - 5}{2} = 1{,}5 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que determina la altura.

$$1{,}5^2 + h^2 = 2{,}5^2$$

$$h^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$$

$$h = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$



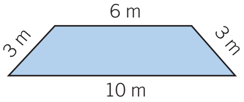
TERCERO. Se calcula el área del trapecio.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 5) \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

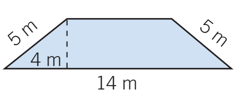
085 ●●

Halla el área de estos trapecios isósceles.

a)



b)



a) $h = \sqrt{3^2 - 2^2} = 2{,}24$ m

$$A = \frac{10 + 6}{2} \cdot 2{,}24 = 17{,}92 \text{ m}^2$$

b) $d = 14 - 4 - 4 = 6$ m

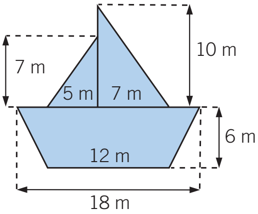
$h = \sqrt{25 - 16} = 3$ m

$$A = \frac{14 + 6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ m}^2$$

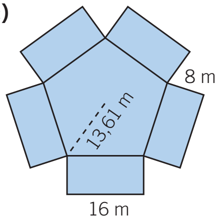
086 ●●

Calcula el área de las siguientes figuras.

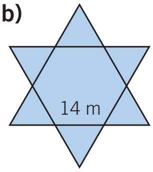
a)



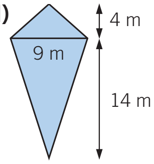
c)



b)



d)



a) $$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{5 \cdot 7}{2} + \frac{7 \cdot 10}{2} + \frac{18 + 12}{2} \cdot 6 =$$

$$= 17{,}5 + 35 + 84 = 126{,}5 \text{ m}^2$$

b) $$\text{Apotema} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 14^2} = 12{,}12 \text{ m}$$

$$A_h = \frac{84 \cdot 12{,}12}{2} = 509{,}04 \text{ m}^2$$

$$A_t = \frac{12{,}12 \cdot 14}{2} = 84{,}84 \text{ m}^2$$

$$A = A_h + 6 \cdot A_t = 509{,}04 + 509{,}04 = 1018{,}08 \text{ m}^2$$

c) $\text{Apotema} = \sqrt{13{,}61^2 - 8^2} = 11{,}01$ m

$$A_p = \frac{80 \cdot 11{,}01}{2} = 440{,}4 \text{ m}^2$$

$$A_r = 16 \cdot 8 = 128 \text{ m}^2$$

$$A = A_p + 5 \cdot A_r = 440{,}4 + 640 = 1080{,}4 \text{ m}^2$$

d) $$A = \frac{(14 + 4) \cdot 9}{2} = 81 \text{ m}^2$$

087 ●

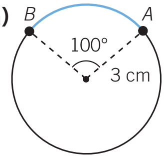
Copia y completa la siguiente tabla con los datos que faltan.

Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
2 cm	4 cm	12,56 cm
3,5 cm	**7 cm**	21,98 cm
4,7 cm	9,4 cm	**29,516 cm**
5 cm	**10 cm**	31,4 cm
6,3 cm	12,6 cm	39,56 cm
7,8 cm	15,6 cm	**48,984 cm**

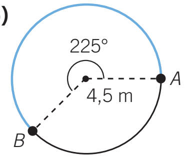
088 ●

Calcula la longitud del arco marcado en rojo.

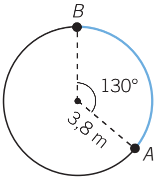
a)



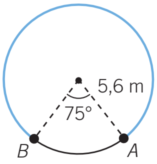
b)



c)



d)



a) $L = \dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 100}{360} = 5{,}23$ cm

c) $L = \dfrac{2\pi \cdot 3{,}8 \cdot 130}{360} = 8{,}62$ cm

b) $L = \dfrac{2\pi \cdot 4{,}5 \cdot 225}{360} = 17{,}66$ cm

d) $L = \dfrac{2\pi \cdot 5{,}6 \cdot 75}{360} = 7{,}33$ cm

089 ●●

¿Cuál es el diámetro de una circunferencia de longitud 50,24 cm?

$$d = \frac{50{,}24}{\pi} = 16 \text{ cm}$$

090 ●●

Halla el diámetro de una circunferencia, sabiendo que la longitud de un arco de 50° es de 5,23 cm.

$$5{,}23 = \frac{d \cdot \pi \cdot 50}{360} \rightarrow d = 12 \text{ cm}$$

091 ●●

¿Cuál es la longitud de una circunferencia cuya longitud de un arco de 110° es de 57,57 cm?

$$L = \frac{57{,}57 \cdot 360}{110} = 188{,}41 \text{ cm}$$

092 ●●

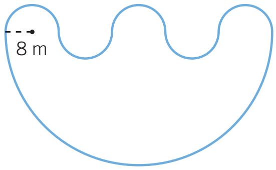
Copia y completa la tabla.

Longitud de arco de 60°	Longitud de arco de 85°	Longitud de arco de 190°	Longitud de la circunferencia
9,42 cm	13,35 cm	29,83 cm	56,52 cm
12,56 cm	**17,79 cm**	39,77 cm	75,36 cm
4,19 cm	5,93 cm	**13,26 cm**	25,12 cm

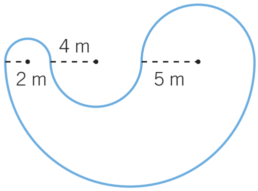
093 ●●

Determina el perímetro de estas figuras.

a)



b)



a) $r = 8$ m $\qquad R = 8 \cdot 5 = 40$ m $\qquad L = 40\pi + 5 \cdot 8\pi = 251{,}2$ m

b) $R = \dfrac{4 + 8 + 10}{2} = 11$ m $\qquad L = 11\pi + 2\pi + 4\pi + 5\pi = 69{,}08$ m

094 ●

Calcula el área de un círculo con:

a) Radio de 6 cm. **b) Diámetro de 6 cm.** **c) Radio de 7,2 cm.**

a) $A = 36\pi = 113{,}04$ cm^2

b) $A = 9\pi = 28{,}26$ cm^2

c) $A = 51{,}84\pi = 162{,}78$ cm^2

095 ●

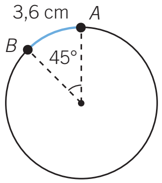
Halla el área de un círculo delimitado por una circunferencia de 321,4 cm.

$r = \dfrac{321{,}4}{2\pi} = 51{,}18$ cm $\qquad A = \pi \cdot 51{,}18^2 = 8\,224{,}89$ cm^2

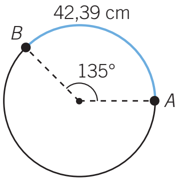
096 ●●

Calcula el área de los círculos con estas longitudes de arco.

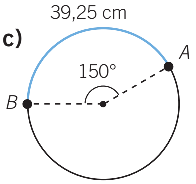
a)



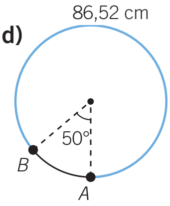
b)



c)



d)



a) $3{,}6 = \dfrac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 4{,}59$ cm

$A = \pi \cdot 21{,}07 = 66{,}16$ cm^2

b) $42{,}39 = \dfrac{2\pi r \cdot 135}{360} \rightarrow r = 18$ cm

$A = \pi \cdot 324 = 1\,017{,}36$ cm^2

c) $39{,}25 = \dfrac{2\pi r \cdot 150}{360} \rightarrow r = 15$ cm

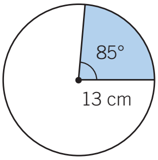
$A = \pi \cdot 225 = 706{,}5$ cm^2

d) $86{,}52 = \dfrac{2\pi r \cdot 310}{360} \rightarrow r = 16$ cm

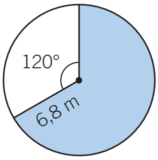
$A = \pi \cdot 256 = 803{,}84$ cm^2

097 **Halla el área de estos sectores circulares.**

a)



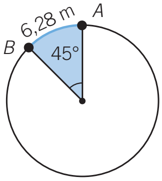
b)



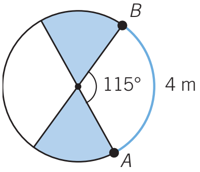
a) $A = \dfrac{\pi \cdot 13^2 \cdot 85}{360} = 125{,}29\ \text{cm}^2$ b) $A = \dfrac{\pi \cdot 6{,}8^2 \cdot 240}{360} = 96{,}8\ \text{m}^2$

098 **Determina el área de los sectores coloreados.**

a)



b)



a) $6{,}28 = \dfrac{2\pi r \cdot 45}{360} \rightarrow r = 8\ \text{m}$

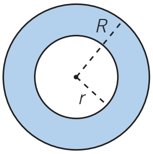
$A = \dfrac{\pi \cdot 64 \cdot 45}{360} = 25{,}12\ \text{m}^2$

b) $4 = \dfrac{2\pi r \cdot 115}{360} \rightarrow r = 2\ \text{m}$

$A = \dfrac{\pi \cdot 4 \cdot 130}{360} = 4{,}54\ \text{m}^2$

099 **Halla el área de la zona sombreada si:**

a) $R = 10$ m y $r = 6$ m
b) $R = 12{,}6$ cm y $r = 5$ cm
c) $R = 3r$ y $r = 2{,}4$ cm
d) $R + r = 31$ m y $R - r = 5$ m



a) $A = \pi \cdot (100 - 36) = 200{,}96\ \text{m}^2$

b) $A = \pi \cdot (158{,}76 - 25) = 420\ \text{cm}^2$

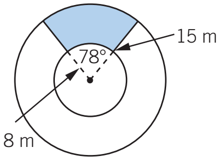
c) $A = \pi \cdot (51{,}84 - 5{,}76) = 164{,}69\ \text{cm}^2$

d) $\left.\begin{array}{l} R + r = 31\ \text{m} \\ R - r = 5\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow R = 18\ \text{m} \rightarrow r = 13\ \text{m}$

$A = \pi \cdot (324 - 169) = 486{,}7\ \text{m}^2$

100 **Calcula el área coloreada de estas figuras.**

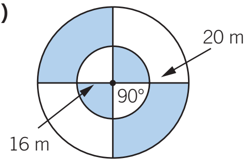
a)



$A_{\text{Corona}} = \pi \cdot (225 - 64) = 505{,}54\ \text{m}^2$

$A_{\text{Sector}} = \dfrac{505{,}54 \cdot 78}{360} = 109{,}53\ \text{m}^2$

b)



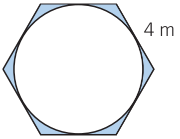
El área coloreada es la mitad de la corona exterior más la mitad del círculo interior. Por tanto, el área es la mitad del círculo mayor.

$$A = \frac{\pi \cdot 36^2}{2} = 2\,034{,}72 \text{ m}^2$$

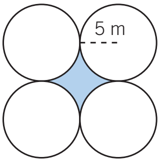
101 **Obtén el área de la zona coloreada.**

●●●

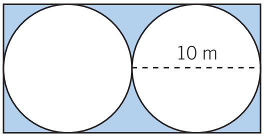
a)



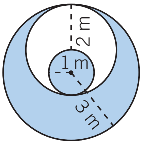
c)



b)



d)



a) $a = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ m

$$A_{\text{Hexágono}} = \frac{24 \cdot 3{,}46}{2} = 41{,}52 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot 3{,}46^2 = 37{,}59 \text{ m}^2$$

$$A = A_{\text{Hexágono}} - A_{\text{Círculo}} = 41{,}52 - 37{,}59 = 3{,}93 \text{ m}^2$$

b) $A = A_{\text{Rectángulo}} - 2 \cdot A_{\text{Círculo}} = 20 \cdot 10 - 2\pi \cdot 5^2 = 200 - 157 = 43 \text{ m}^2$

c) $A = A_{\text{Cuadrado}} - 4 \cdot \dfrac{A_{\text{Círculo}}}{4} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 78{,}5 = 21{,}5 \text{ m}^2$

d) $A = A_3 - A_2 + A_1 = \pi \cdot 9 - \pi \cdot 4 + \pi \cdot 1 = 18{,}84 \text{ m}^2$

102 **Considerando que los polígonos son regulares, copia y completa la tabla.**

●

N.º de lados	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
Suma de ángulos	180°	**360°**	540°	720°	900°	…
Ángulo interior	60°	$\frac{360°}{4} = 90°$	108°	120°	128,6°	…

a) ¿Cuál es el polígono con menor ángulo?

b) ¿Y el que tiene el mayor ángulo?

a) El polígono con menor ángulo interior es el triángulo.

b) El polígono con mayor ángulo interior es el que tiene mayor número de lados, y cuando es infinito, es la circunferencia.

103 **Calcula la suma de los ángulos de un polígono de 3, 4, 5 y 6 lados.**

a) ¿Qué diferencia hay entre la suma de cada polígono y la del polígono con un lado menos?

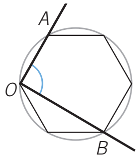
b) Si la suma de los ángulos de un polígono de 15 lados es 2 340°, ¿cuál será la suma de uno de 16 lados?

a) La diferencia es siempre 180°.

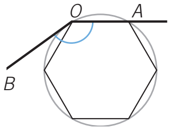
b) La suma es: $2340 + 180 = 2520°$

104 **Calcula el valor de los ángulos marcados.**

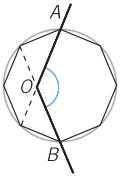
a)



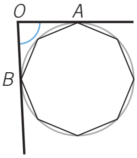
b)



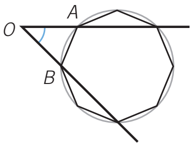
c)



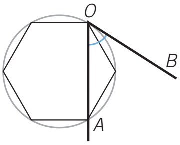
d)



e)



f)



a) Inscrito: $180 : 2 = 90°$

b) Semiinscrito: $300 : 2 = 150°$

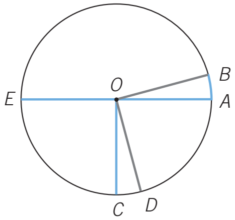
c) Interior: $(180 + 90) : 2 = 135°$

d) Circunscrito: $(270 - 90) : 2 = 90°$

e) Exterior: $(135 - 45) : 2 = 45°$

f) Semiinscrito: $120 : 2 = 60°$

105 **Si el arco $\widehat{AB} = 15°\ 20'$, calcula el valor de los arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{AD}$ y $\widehat{BE}$.**



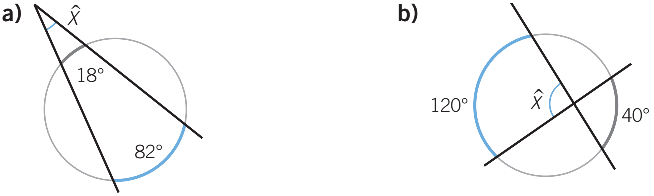
$\widehat{BC} = 90° - 15°\ 20' = 74°\ 40'$

$\widehat{CD} = \widehat{AB} = 15°\ 20'$

$\widehat{AD} = 90° + 15°\ 20' = 105°\ 20'$

$\widehat{BE} = 180° + 15°\ 20' = 195°\ 20'$

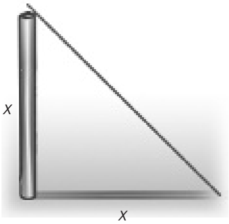
106 Calcula el valor del ángulo $\hat{X}$.



a) Exterior: (82 − 18) : 2 = 32°

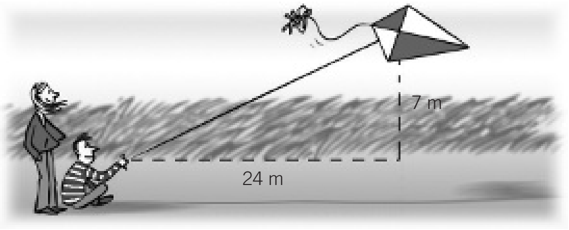
b) Interior: (120 + 40) : 2 = 80°

107 La sombra que produce una varilla vertical en un instante es igual a su longitud. ¿Qué triángulo determinan la varilla y su sombra? ¿Cuál es la inclinación de los rayos solares?



La varilla y su sombra determinan un triángulo rectángulo e isósceles. Los rayos del sol tienen una inclinación de 45°.

108 Calcula la longitud del cable de la cometa.

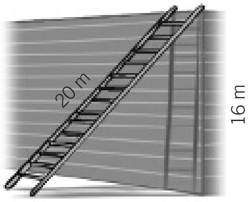


$l = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ m El cable mide 25 m.

109 ¿Cuál es la longitud máxima que Juan puede nadar en una piscina que mide 17 m de largo y 10 m de ancho, si solo puede hacerlo en línea recta?

La longitud máxima es la diagonal: $d = \sqrt{17^2 + 10^2} = 19{,}72$ m

110 ●● **Sobre una pared vertical de 16 m de altura se coloca inclinada una escalera de 20 m de longitud. ¿A qué distancia de la pared se encuentra la base de la escalera?**



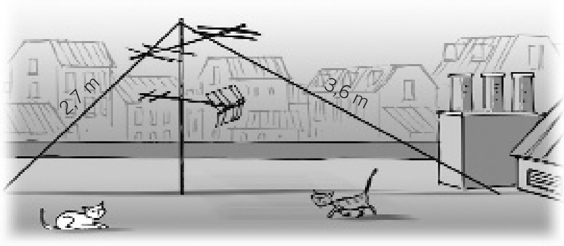
$d = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ m

Se encuentra a 12 m.

111 ●● **Una escalera mide 2,5 m de longitud y, al apoyarse en la pared, su base dista de ella 0,7 m. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?**

$h = \sqrt{2{,}5^2 - 0{,}7^2} = 2{,}4$ m Llega a una altura de 2,4 m.

112 ●● **Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 2,7 m y 3,6 m. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de unión de los cables con el suelo?**



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman los cables:

$d = \sqrt{2{,}7^2 + 3{,}6^2} = 4{,}5$ m

113 ●● **Ana tiene un jardín rectangular, de 500 m de largo y 300 m de ancho, y quiere hacer una piscina de forma circular de 100 m de radio. ¿Cuánto terreno le queda para plantar césped?**

El terreno para plantar césped es el área de la parcela menos el área de la piscina:

$A = 500 \cdot 300 - \pi \cdot 100^2 = 150\,000 - 31\,400 = 118\,600$ m^2

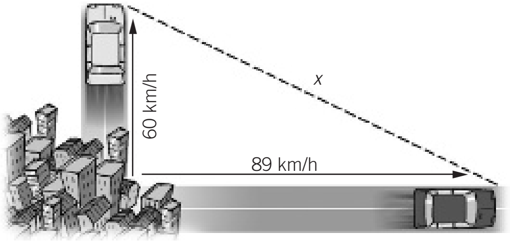
114 ●● **La rueda de un camión mide 90 cm de radio. ¿Cuánto avanza el camión cuando la rueda ha dado 1 000 vueltas? ¿Y cuántas vueltas dará para recorrer 2 km?**

La longitud de la rueda es: $L = 2\pi \cdot 90 = 565{,}2$ cm

En 1 000 vueltas, el camión avanzará: $1\,000 \cdot 565{,}2 = 565\,200$ m

Para recorrer 2 000 m, la rueda dará: $\frac{2\,000}{565{,}2} = 3{,}54$ vueltas

115 ●●● **Dos coches parten de una ciudad a la vez y en direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 60 km/h y el segundo de 89 km/h. ¿Qué distancia las separa al cabo de 1 hora y cuarto?**



La distancia es la hipotenusa del triángulo que forman las carreteras.

Así, la distancia recorrida por el primer coche es 75 km y la del segundo es 111,25 km.

La distancia que los separa es: $x = \sqrt{75^2 + 111{,}25^2} = 134{,}17$ km

116 ●●● **Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 600 km/h y el segundo de 800 km/h.**

a) ¿Qué distancia las separa al cabo de 2 horas?

b) Si el alcance de su radio es de 500 km, ¿podrán ponerse en contacto al cabo de media hora?

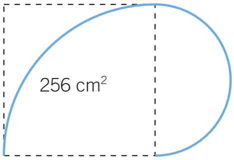
a) Al cabo de 2 horas, el primer avión ha recorrido 1 200 km, y el segundo, 1 600 km, por lo que la distancia que los separa es:

$d = \sqrt{1\,200^2 + 1\,600^2} = 2\,000$ km

b) Al cabo de media hora, el primer avión ha recorrido 300 km, y el segundo, 400 km, por lo que la distancia que los separa es:

$d = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500$ km y están en el límite del alcance de la radio.

117 ●●● **Uno de los adornos de metal de una reja tiene esta forma.**



Calcula la longitud del adorno sabiendo que el área del cuadrado es de 256 cm².

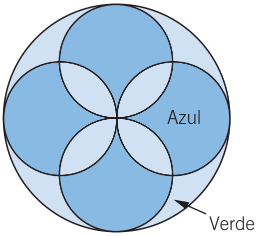
El lado del cuadrado es: $l = \sqrt{256} = 16$ cm

La longitud de la primera porción de reja es: $L_1 = \dfrac{2\pi \cdot 16}{4} = 25{,}12$ cm

La longitud de la segunda porción es: $L_2 = \dfrac{2\pi \cdot 8}{2} = 25{,}12$ cm

La longitud de la reja es: $2 \cdot 25{,}12 = 50{,}24$ cm

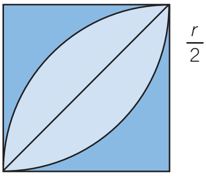
118 ●●● **Si se han empleado 400 cm² de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios para realizar esta vidriera?**



Área del círculo mayor: $\pi \cdot r^2$

Área de los círculos menores: $\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

Área de los pétalos:



$$A_{\text{Pétalo}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8} - \frac{r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8}$$

$$A_{\text{Verde}} = A_{\text{Círculo}} - 4 \cdot A_{\text{Menores}} + 4 \cdot A_{\text{Pétalo}}$$

$$400 = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} + 4 \cdot \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{8} = \frac{(\pi - 1) \cdot r^2}{2}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{800}{\pi - 1}} = 19{,}33 \text{ cm}$$

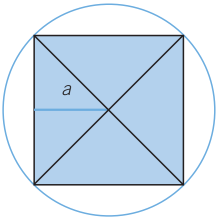
$$A_{\text{Azul}} = \pi \cdot 19{,}33^2 - 400 = 773{,}26 \text{ cm}^2$$

119 ●●● **Si dos polígonos tienen igual área, ¿pueden tener perímetros diferentes?**

Pueden tener perímetros diferentes, ya que no existe una correspondencia entre perímetro y área, salvo si son polígonos semejantes.

120 ●●● **Comprueba que, aplicando la fórmula para hallar el área de un polígono regular al triángulo equilátero y al cuadrado, obtenemos las fórmulas del área de un triángulo y de un cuadrado.**

Cuadrado:

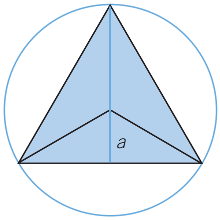


$$a = \frac{l}{2}$$

Perímetro $= 4l$

$$A = \frac{4l \cdot \frac{l}{2}}{2} = l^2$$

Triángulo equilátero:



Por ser un triángulo equilátero, la apotema es la mitad del radio:

$$a = \frac{r}{2}$$

$$\text{Altura} = r + a = \frac{3r}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot b \cdot \frac{r}{2}}{2} = \frac{l \cdot \frac{3r}{2}}{2} = \frac{b \cdot \text{altura}}{2}$$

121 ●●●

Sabiendo que *a*, *b* y *c* son los lados de un triángulo rectángulo, comprueba si son rectángulos los triángulos de lados:

a) $2a$, $2b$ **y** $2c$

b) $a + 5$, $b + 5$ **y** $c + 5$

c) $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ **y** $\frac{c}{3}$

d) $2a$, $3b$ **y** $4c$

¿Puedes extraer una regla general?

Dado un triángulo rectángulo de lados *a*, *b* y *c*, ¿cómo podrías obtener otros triángulos rectángulos?

Consideramos que $a^2 = b^2 + c^2$:

a) $(2b)^2 + (2c)^2 = 4 \cdot (b^2 + c^2) = 4 \cdot a^2 = (2a)^2$ → Es rectángulo.

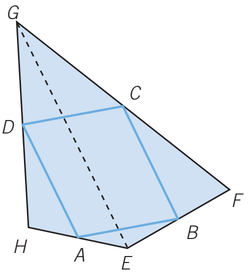
b) $(b + 5)^2 + (c + 5)^2 = b^2 + 10b + 25 + c^2 + 10c + 25 =$
$= b^2 + c^2 + + 10b + 10c + 50$
$= a^2 + 10a + 50 \neq (a + 5)^2$ → No es equilátero.

c) $\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot (b^2 + c^2) = \frac{1}{9} \cdot a^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot a\right)^2$ → Es rectángulo.

d) $(3b)^2 + (4c)^2 = 9 \cdot (b^2 + c^2) + 7c^2 = 9 \cdot a^2 + 7c^2 =$
$= (3a)^2 + 7c^2 \neq (2a)^2$ → No es equilátero.

122 ●●●

En un cuadrilátero cualquiera, señala los puntos medios de sus lados y únelos de dos en dos. ¿Qué figura se forma? Investiga si se cumple siempre.



Consideramos el cuadrilátero y sus diagonales:

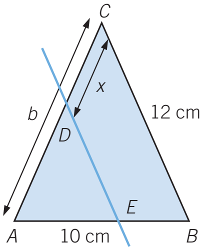
El triángulo $\widehat{EFG}$ está en posición de Tales con $\widehat{BFC}$, por lo que *CB* es paralelo a *EG*.

El triángulo $\widehat{HEG}$ está en posición de Tales con $\widehat{HAD}$, por lo que *AD* es paralelo a *EG*.

Tenemos que *AD* es paralelo a *CB* y *AB* es paralelo a *CD*.

Por tanto, siempre se forma un paralelogramo.

123 ●●● **La recta *DE* es paralela al lado *BC*.**



a) Halla lo que miden los segmentos *BE* y *DE* en función de *b* y *x*.

b) Determina *b* y *x* para que $\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD}$ **y** $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{5}{11}$**.**

a) Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AED}$ son semejantes.

$$\frac{\overline{BE}}{x} = \frac{10}{b} \rightarrow \overline{BE} = \frac{10x}{b}$$

$$\frac{12}{\overline{DE}} = \frac{b}{b-x} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot (b-x)}{b}$$

b) La primera igualdad significa que:

$$\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD} \rightarrow \frac{12 \cdot (b-x)}{b} = \frac{10x}{b} + x$$

y la segunda:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{x}{b} = \frac{5}{11}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones que resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12 \cdot (b-x)}{b} &= \frac{10x}{b} + x \\ \frac{x}{b} &= \frac{5}{11} \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{5b}{11}$$

$$\frac{12 \cdot (b-x)}{b} = \frac{10x}{b} + x \xrightarrow{x = \frac{5b}{11}} \frac{12 \cdot \left(\frac{6b}{11}\right)}{b} = \frac{\frac{50b}{11}}{b} + \frac{5b}{11}$$

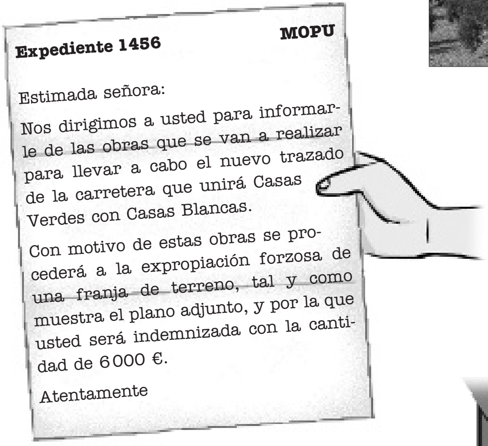
$$\rightarrow \frac{72}{11} = \frac{50}{11} + \frac{5b}{11} \rightarrow 22 = 5b \rightarrow b = \frac{22}{5} = 4{,}4 \text{ cm}$$

$$x = \frac{5b}{11} \xrightarrow{b = \frac{22}{5}} x = 2$$

Es decir, $b = 4{,}4$ cm y $x = 2$ cm.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

124 ●●● **Se está diseñando un nuevo trazado para la carretera que une dos localidades, pero este trazado pasará por los olivares, con lo que muchas familias se verán afectadas.**



Expediente 1456 **MOPU**

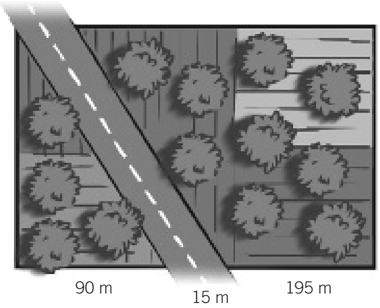
Estimada señora:

Nos dirigimos a usted para informarle de las obras que se van a realizar para llevar a cabo el nuevo trazado de la carretera que unirá Casas Verdes con Casas Blancas.

Con motivo de estas obras se procederá a la expropiación forzosa de una franja de terreno, tal y como muestra el plano adjunto, y por la que usted será indemnizada con la cantidad de 6000 €.

Atentamente

La familia de Lidia, al igual que otras familias del pueblo, ya ha recibido la notificación.



Eres capaz de... Comprender

a) Según las escrituras, su terreno tiene una superficie de 6 hectáreas. ¿Cuánto mide de largo? ¿Y de ancho?

Eres capaz de... Resolver

b) ¿Cuánto les van a pagar por cada metro cuadrado expropiado?

Eres capaz de... Decidir

c) El abogado al que han consultado dice que reclamando pueden recibir hasta 20 € por cada metro cuadrado expropiado. Si los costes judiciales son de 5000 €, ¿crees que les conviene reclamar?

a) El área del terreno es: $6\text{ ha} = 60\,000\text{ m}^2 = (90 + 15 + 195) \cdot \text{Ancho}$

$$60\,000 = 300 \cdot \text{Ancho} \rightarrow \text{Ancho} = 200\text{ m}$$

Las dimensiones del terreno son: Largo $= 90 + 15 + 195 = 300$ m
Ancho $= 200$ m

b) La carretera es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 90 m y 200 m.

$$L_{\text{Carretera}} = \sqrt{90^2 + 200^2} = 219{,}32\text{ m}$$

El área de la carretera será: $A_{\text{Carretera}} = 15 \cdot 219{,}32 = 3\,289{,}8\text{ m}^2$

Por cada m^2 expropiado les pagan: $6000 : 3\,289{,}8 = 1{,}82$ €/m^2

c) Si el precio son 20 €/m^2, recibirán: $20 \cdot 3289{,}8 = 65796$ €

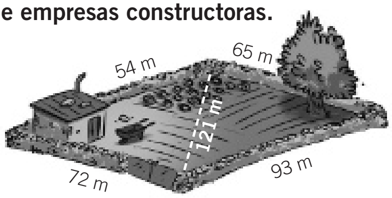
Como los costes son 5000 €, recibirán:

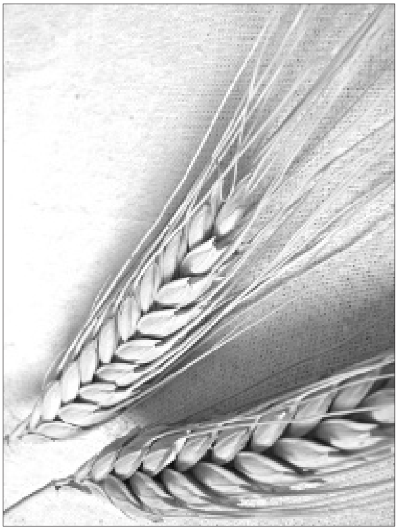
$65796 - 5000 = 60796$ €

Si no reclaman recibirán 6000 €, si reclaman pueden llegar a más de 60000 €. Les conviene reclamar.

125 ●●● **Tras la última reunión sobre urbanismo del ayuntamiento de una localidad, se ha decidido declarar urbanizable uno de los terrenos en los que Goro ha sembrado cereales.**

Goro se ha enterado de la noticia y ha buscado los planos del terreno para estudiarlos ante posibles ofertas por parte de empresas constructoras.





Eres capaz de... Comprender

a) Dibuja un gráfico que represente los triángulos que se forman en el terreno y sus medidas.

Eres capaz de... Resolver

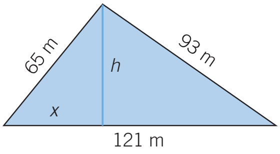
b) ¿Cuál es la superficie del terreno?

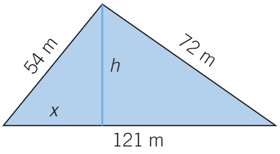
Eres capaz de... Decidir

c) A los pocos días, Goro ha recibido una oferta de una empresa constructora.

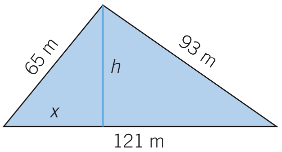
¿Es cierto lo que afirma el constructor?

a) Consideramos los dos triángulos que se forman con la diagonal:





b)

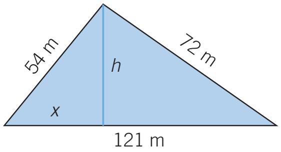


$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 65^2 - x^2 \\ h^2 = 93^2 - (121 - x)^2 \end{array}\right\}$$

$$65^2 - x^2 = 93^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 4\,225 - 8\,649 + 14\,641 = 242x$$
$$\rightarrow x = 42{,}22 \text{ m}$$

$$h^2 = 65^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,42{,}22} h^2 = 4\,225 - 1\,782{,}53 \rightarrow h = 49{,}42 \text{ m}$$

$$A_1 = \frac{121 \cdot 49{,}42}{2} = 2\,989{,}91 \text{ m}^2$$



$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 54^2 - x^2 \\ h^2 = 72^2 - (121 - x)^2 \end{array}\right\}$$

$$54^2 - x^2 = 72^2 - (121 - x)^2 \rightarrow 2\,916 - 5\,184 + 14\,641 = 242x$$
$$\rightarrow x = 51{,}13 \text{ m}$$

$$h^2 = 54^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,51{,}13} h^2 = 2\,916 - 2\,614{,}28 \rightarrow h = 17{,}37 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{121 \cdot 17{,}37}{2} = 1\,050{,}88 \text{ m}^2$$

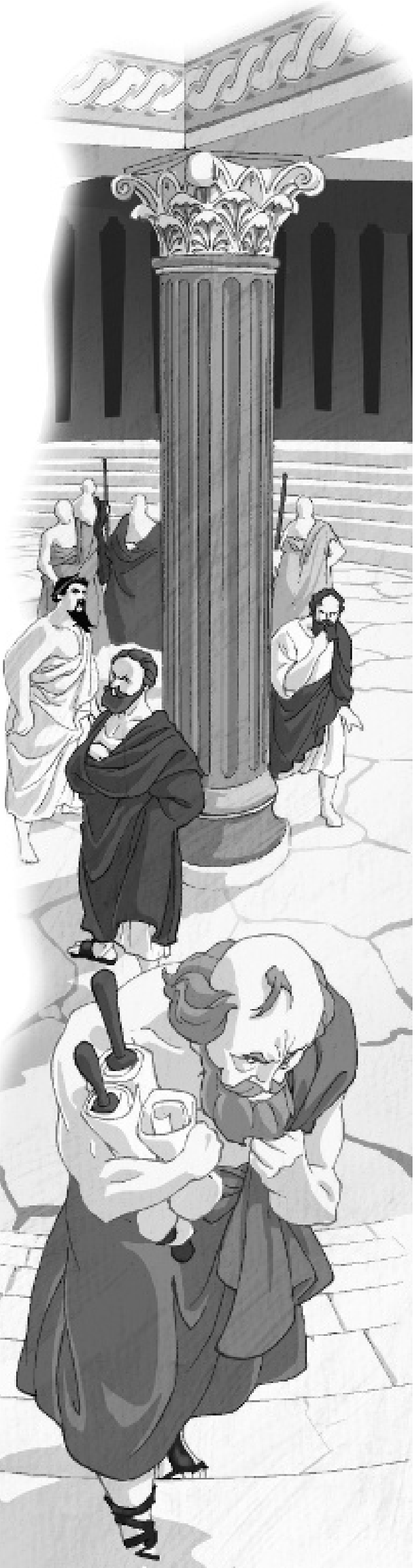
El área total es: $2\,989{,}91 + 1\,050{,}88 = 4\,040{,}79 \text{ m}^2$

c) Si le pagan 325 000 €, por cada metro cuadrado recibirá:

$325\,000 : 4\,040{,}79 = 80{,}43$ €

No es cierto lo que le dice el constructor, el metro se lo pagan a casi el 20 % menos.

11 Cuerpos geométricos



El centro del universo

Como a otros les ocurrió antes y a otros muchos después, Aristarco de Samos se vio irremediablemente atraído por Alejandría: una ciudad tranquila, patria adoptiva de sabios y protectora del conocimiento.

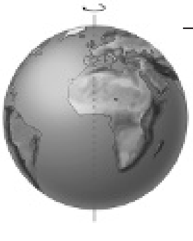
La magnífica biblioteca de la ciudad le abrió sus puertas y Aristarco se empapó de los conocimientos de los sabios de otros tiempos. Después, tras años de silencioso estudio se decidió por fin a hacer públicas sus teorías y, ante un concurrido auditorio de sabios, comenzó:

–Amigos, tras exhaustivos estudios puedo afirmar que la Tierra no está inmóvil: se mueve en círculo alrededor del Sol, completando un círculo cada año y, además, gira sobre sí misma, una vuelta cada día.

Un murmullo de protestas se alzó en la sala, entre insultos y burlas que le decían:

–Partiendo del hecho de que la Tierra es redonda, lo que ha sido probado por Aristóteles, si girara una vuelta cada día, la velocidad en la superficie sería tan elevada que nunca podríamos avanzar hacia el Este, pues la Tierra nos adelantaría.

Aristarco, en vano, intentaba explicar que ellos también giraban a la misma velocidad. Incapaz de convencer al auditorio, recogió los escritos donde explicaba su teoría y abandonó la sala, diciendo:



–A veces lo más necio es un hombre sabio.

DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **Busca información sobre la vida de Aristarco de Samos, importante matemático y astrónomo griego que vivió en el siglo III a.C.**

Se puede encontrar información sobre la vida de Aristarco de Samos visitando la siguiente página web:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/aristarco.htm

En la siguiente página se puede completar la información sobre la biografía de Aristarco:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Aristarco2.asp

2 **Investiga sobre el modelo heliocéntrico del universo que defendió Aristarco de Samos.**

En esta página web se puede obtener información sobre el modelo heliocéntrico del universo en el que trabajó Aristarco:
http://www.astronomia-iniciacion.com/personajes/aristarco-de-samos.html

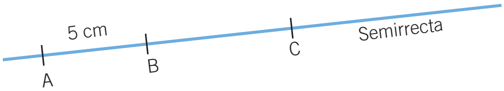
3 **¿Cuáles fueron los trabajos más relevantes que realizó Aristarco relacionados con las matemáticas y con la astronomía?**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Aristarco y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://astroseti.org/articulo/3733/biografia-de-aristarco-de-samos

En este otro enlace también se pueden encontrar datos sobre las aportaciones a la astronomía que realizó Aristarco:
http://historiadelaciencia.idoneos.com/index.php/366695

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Traza una recta. En ella dibuja un segmento de 5 cm y tres puntos, uno de ellos que sea el origen de una semirrecta.**



2 **Estudia la posición relativa de las rectas que se determinan en cada caso.**

a) Dos calles que forman una esquina.

b) Los cables que conducen la electricidad.

c) Los bordes superior e inferior de tu cuaderno.

d) El largo y el ancho de una puerta.

e) Las vías de un tren.

f) Las dos orillas de un río.

Secantes: a) y d) Paralelas: b), c), e) y f)

3 **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 y 15 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?**

$a^2 = 8^2 + 15^2 \rightarrow a = 17$ cm

Cuerpos geométricos

EJERCICIOS

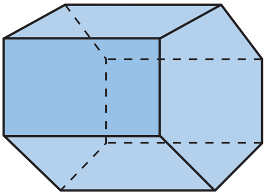
001 **Observa la habitación donde te encuentres e indica elementos que sugieren:**

a) Planos paralelos.
b) Planos secantes.
c) Rectas paralelas.
d) Rectas secantes.
e) Rectas que se cruzan.
f) Rectas paralelas a un plano.
g) Rectas secantes a un plano.
h) Rectas contenidas en un plano.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) El suelo y el techo de la habitación.
b) El suelo y las paredes.
c) El lado derecho e izquierdo de una pared.
d) El lado derecho y superior de una pared.
e) Un lado del suelo y el perpendicular del techo.
f) Un lado del suelo y el techo.
g) El lado derecho de una pared y el suelo.
h) Un lado del suelo y el suelo.

002 **Indica las posiciones de rectas y planos que veas en el siguiente cuerpo geométrico:**



Respuesta abierta. Por ejemplo:

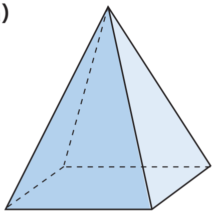
- Planos paralelos: las dos bases.
- Planos secantes: cada cara lateral y una base.
- Rectas paralelas: arista derecha e izquierda de cada cara lateral.
- Rectas secantes: aristas de las caras y aristas de las bases.
- Rectas que se cruzan: arista de una base y la perpendicular correspondiente de la otra.
- Rectas paralelas a un plano: aristas de una base y la otra base.
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara lateral y una base.
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una base y esa base.

003 **Dos rectas que son secantes, ¿están siempre en el mismo plano?**

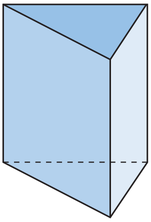
No necesariamente, pueden estar en planos secantes.

004 **Determina el nombre de estos poliedros. ¿Cuántas caras tienen? ¿Y cuántas aristas?**

a)



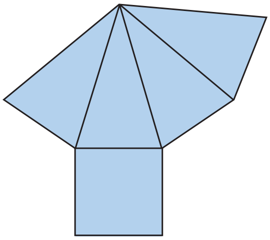
b)

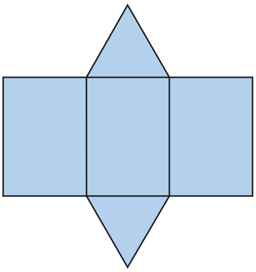


a) Pirámide cuadrangular: 5 caras y 8 aristas

b) Prisma triangular: 5 caras y 9 aristas

005 **Realiza el desarrollo plano de los poliedros del ejercicio anterior.**





006 **Justifica si es verdadero o falso.**

a) En un poliedro, todas sus caras son iguales.

b) El menor número de caras de un poliedro es 4.

c) En cada vértice de un poliedro concurre siempre el mismo número de aristas.

a) Falso: Las caras pueden ser diferentes, y solo son iguales en los poliedros regulares.

b) Verdadero: El polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, son 4 caras.

c) Falso: Por ejemplo, en los vértices de la base de las pirámides concurren 3 aristas, y en el vértice superior concurren tantas aristas como lados tiene la base.

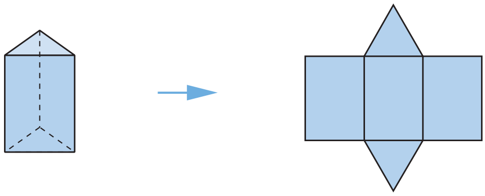
007 **Dibuja un prisma recto de base triangular y otro de base pentagonal.**

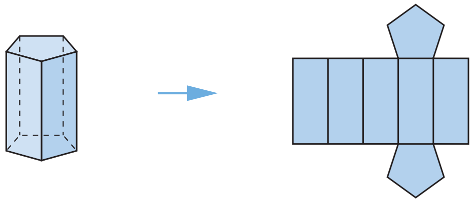
a) Calcula su número de caras, aristas y vértices.

b) Dibuja sus desarrollos planos.

a)
- Prisma triangular ⟶ Caras: 5, aristas: 9, vértices: 6
- Prisma pentagonal → Caras: 7, aristas: 15, vértices: 10

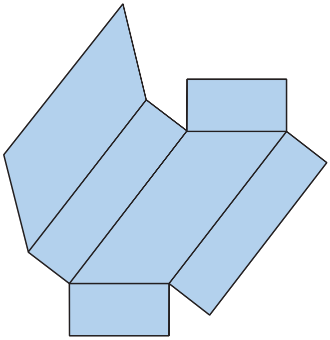
b)





008 **Dibuja el desarrollo plano de un prisma oblicuo de base cuadrangular.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



009 **¿Qué polígono forma la base de un prisma que tiene 18 aristas?**

La base del prisma es un hexágono.

010 **Calcula el área de un cubo cuya arista mide 2 cm.**

$A = 6 \cdot A_B = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ cm}^2$

011 **Determina el área de un prisma:**

a) Pentagonal regular, de altura 10 cm, lado de la base 4 cm y apotema 2,75 cm.

b) Triangular regular, de altura 8 cm, lado de la base 4 cm y altura de la base 3,46 cm.

a) $A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 2{,}75 = 255 \text{ cm}^2$

b) $A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 12 \cdot 8 + 12 \cdot 3{,}46 = 137{,}52 \text{ cm}^2$

012 **Un prisma cuadrangular recto, con arista de la base de 3 cm, tiene un área total de 78 cm².** **Calcula su altura.**

$$A = 2 \cdot A_B + P \cdot h \rightarrow 78 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot h \rightarrow h = \frac{60}{12} = 5 \text{ cm}$$

013 **Halla la longitud de la arista de un cubo para que su área sea igual que la de un ortoedro de 6 cm de ancho, 3 cm de alto y 2 cm de profundidad.**

$$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \text{ cm}^2$$

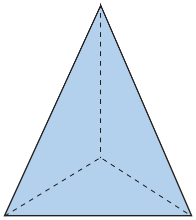
$$A_{\text{Cubo}} = 6l^2 \rightarrow 6l^2 = 72 \rightarrow l = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ cm}$$

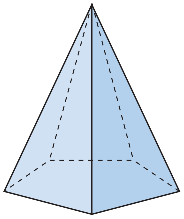
La arista mide 3,46 cm.

014 **Dibuja una pirámide recta de base triangular y otra de base pentagonal.**

a) Calcula su número de caras, aristas y vértices.

b) Dibuja sus desarrollos planos.

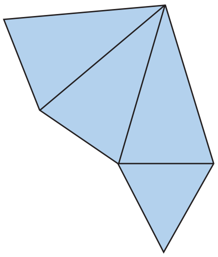


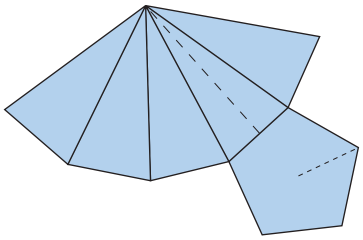


a) Pirámide triangular ⟶ Caras: 4, aristas: 6, vértices: 4

Pirámide pentagonal → Caras: 6, aristas: 10, vértices: 6

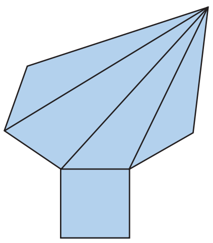
b)





015 **Dibuja el desarrollo plano de una pirámide oblicua de base cuadrangular.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



016 **¿Qué polígono forma la base de una pirámide con 18 aristas?
¿Y si tiene 9 vértices?**

La pirámide con 18 aristas tiene un eneágono de base.

La pirámide con 9 vértices tiene un octógono de base.

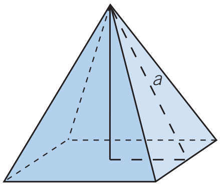
017 **Calcula el área de una pirámide regular de base cuadrangular, si su arista básica mide 7 cm y la altura de sus caras laterales es 4 cm.**

$$A_L = 4 \cdot \frac{l \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 4}{2} = 56 \text{ cm}^2$$

$$A_B = l^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 56 + 49 = 105 \text{ cm}^2$$

018 **Halla el área total de una pirámide cuadrangular de altura 4 cm y arista de la base 4 cm.**

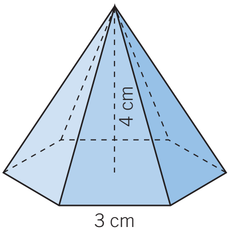


La apotema de la pirámide es:

$$a = \sqrt{16 + 4} = 4{,}47 \text{ cm}$$

$$A_T = A_L + A_B = \frac{16 \cdot 4{,}47}{2} + 4^2 = 51{,}76 \text{ cm}^2$$

019 **Determina el área total de la pirámide regular.**



La apotema del hexágono es:

$$a = \sqrt{\frac{3}{4} l^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = 2{,}6 \text{ cm}$$

La apotema de la pirámide es:

$$a' = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{22{,}75} = 4{,}77 \text{ cm}$$

$$A_T = \frac{P \cdot a'}{2} + A_B = \frac{18 \cdot 4{,}77}{2} + \frac{18 \cdot 2{,}6}{2} = 66{,}33 \text{ cm}^2$$

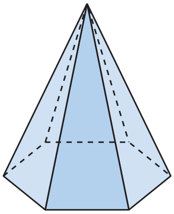
020 **Prueba que todos los poliedros regulares cumplen la fórmula de Euler.**

- Tetraedro ⟶ Caras: 4, vértices: 4, aristas: 6 ⟶ $4 + 4 = 6 + 2$
- Cubo ⟶ Caras: 6, vértices: 8, aristas: 12 ⟶ $6 + 8 = 12 + 2$
- Octaedro ⟶ Caras: 8, vértices: 6, aristas: 12 ⟶ $8 + 6 = 12 + 2$
- Dodecaedro → Caras: 12, vértices: 20, aristas: 30 → $12 + 20 = 30 + 2$
- Icosaedro ⟶ Caras: 20, vértices: 12, aristas: 30 → $20 + 12 = 30 + 2$

021 **Determina el número de caras que concurre en los vértices de cada uno de los poliedros regulares.**

- Tetraedro: 3 caras
- Cubo: 3 caras
- Octaedro: 4 caras
- Dodecaedro: 3 caras
- Icosaedro: 5 caras

022 **Dibuja un poliedro que tenga 7 vértices. ¿Cumple la fórmula de Euler?**

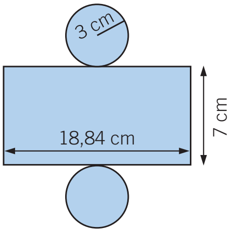


Caras: 7
Aristas: 12
Vértices: 7
$C + V = A + 2$
$7 + 7 = 12 + 2$

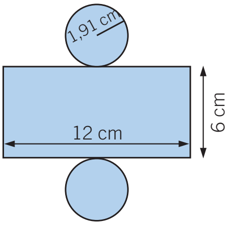
023 **¿Puede existir un poliedro regular de 3 caras?**

No es posible, ya que el polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, al menos tendrá 4 caras.

024 **Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de 3 cm de radio y 7 cm de altura.**

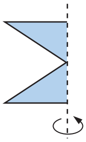


025 **Dibuja el desarrollo plano de un cilindro cuya circunferencia de la base mide 12 cm y tiene una altura de 6 cm.**

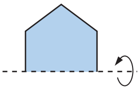


026 **Determina los cuerpos de revolución que al girar generan estas figuras planas.**

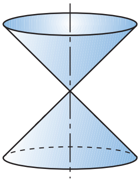
a)



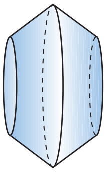
b)



a)



b)



027 **Calcula el área total de un cilindro de altura 10 cm y radio de la base 7 cm.**

$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot 10 = 439{,}6 \text{ cm}^2$

$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 7^2 = 153{,}86 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 747{,}32 \text{ cm}^2$

028 **Luis y Ana tienen que forrar un tubo cilíndrico de 12 m de altura y 2 m de diámetro. Si el papel les cuesta 12 €/m², ¿cuánto les costará forrar la superficie lateral del tubo?**

$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 12 = 75{,}36 \text{ m}^2$

Les costará forrarla: 75,36 · 12 = 904,32 €

029 **Halla la superficie total de un tronco de madera cilíndrico recto, de 3 m de altura y diámetro de la base de 30 cm.**

$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 3 = 2{,}83 \text{ m}^2$

$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}07 \text{ m}^2$

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2{,}97 \text{ m}^2$

030 **Un botón de forma cilíndrica tiene una altura de 1 mm. Si su área total es 188,4 mm², ¿cabe por un ojal que tiene una altura de 8 mm?**

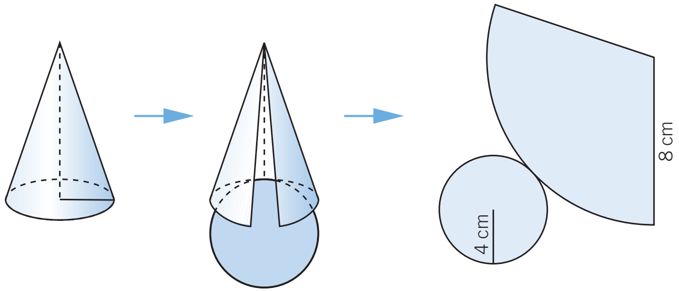
Calculamos el diámetro del botón:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow 188{,}4 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (r^2 + r) \rightarrow 30 = r^2 + r$$
$$\rightarrow r^2 + r - 30 = 0$$

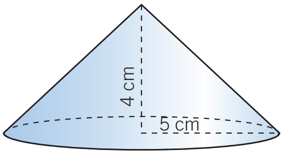
$$r^2 + r - 30 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} \rightarrow \begin{cases} r = 6 \text{ mm} \\ r = -5 \quad \text{(solución no válida)} \end{cases}$$

Por tanto, el diámetro es 12 mm, y no cabe por el ojal de 8 mm.

031 **Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 4 cm y generatriz 8 cm.**

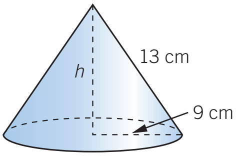


032 **Calcula la generatriz del cono.**



$$g = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}4 \text{ cm}$$

033 **Determina la altura de este cono:**



$$13^2 = h^2 + 9^2$$
$$h^2 = 13^2 - 9^2$$
$$h = \sqrt{13^2 - 9^2} = 9{,}38 \text{ cm}$$

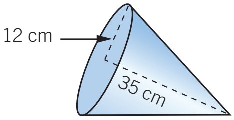
034 **¿Un triángulo equilátero, al girar sobre cualquiera de sus lados, genera un cono? ¿Y uno obtusángulo?**

Solo generan conos los triángulos rectángulos al girar sobre uno de sus catetos.

035 **Un cono tiene 12 cm de generatriz y 8 cm de diámetro de la base. Calcula su área total.**

$$A_L = \pi r g = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 12 = 150{,}72 \text{ cm}^2$$
$$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$$
$$A_T = A_L + A_B = 150{,}72 + 50{,}24 = 200{,}96 \text{ cm}^2$$

036 **Halla el área total de este cono:**



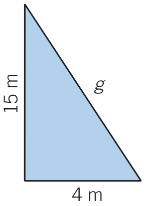
$g = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37$ cm

$A_L = \pi rg = 3{,}14 \cdot 12 \cdot 37 = 1394{,}16$ cm^2

$A_B = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16$ cm^2

$A_T = A_L + A_B = 1394{,}16 + 452{,}16 = 1846{,}32$ cm^2

037 **Se desea cubrir con lona un torreón de forma cónica de 15 m de altura y diámetro de 8 m. ¿Qué cantidad de lona se necesita?**



Hallamos su generatriz:

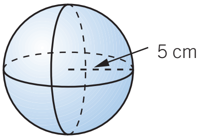
$g = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{225 + 16} = \sqrt{241} = 15{,}52$ m

$A_L = \pi rg = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 15{,}52 = 194{,}93$ m^2

038 **Si el radio de un cono mide el doble que el de otro, ¿qué relación hay entre sus áreas laterales?**

Una de las áreas laterales es el doble que la otra.

039 **¿Cuál es el área de esta esfera?**



$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 314$ cm^2

040 **Determina el área de una esfera cuyo diámetro mide 12 cm.**

$r = 6$ cm $\quad A_T = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 = 452{,}16$ cm^2

041 **El radio de una esfera mide 4 cm. Halla el área de un huso esférico de amplitud 40º.**

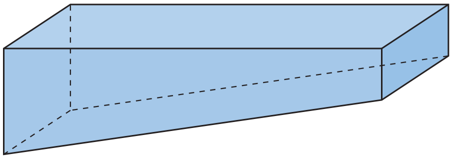
$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 40}{360} = 22{,}33 \text{ cm}^2$$

042 **Razona si un círculo puede generar una esfera. ¿Cuántos ejes de giro podría tener?**

Un círculo genera una esfera al girar sobre alguno de sus diámetros, por lo que tiene infinitos ejes de giro.

ACTIVIDADES

043 Indica las posiciones de las rectas y planos que veas en este cuerpo geométrico:



Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Planos paralelos: las dos caras laterales
- Planos secantes: cada cara lateral y una base
- Rectas paralelas: arista derecha e izquierda de cada cara lateral
- Rectas secantes: aristas de las caras y aristas de las bases
- Rectas que se cruzan: arista de una cara lateral y la perpendicular correspondiente de la otra
- Rectas paralelas a un plano: aristas de una cara lateral y la otra cara lateral paralela
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara lateral y una base
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una base y esa base

044 Encuentra ejemplos de ángulos diedros en tu aula y en tu habitación.

Si consideramos el aula como un poliedro, cualquier ángulo formado por dos caras es un ángulo diedro.

045 Dibuja en tu cuaderno:

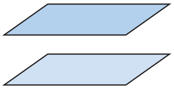
a) Dos planos paralelos.

b) Dos planos perpendiculares.

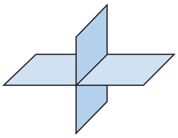
c) Dos planos secantes no perpendiculares.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

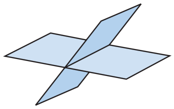
a)



b)



c)



046 Considera las aristas de un cubo como rectas ilimitadas. Dibuja en él:

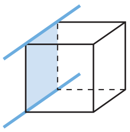
a) Dos rectas paralelas.

b) Dos rectas secantes.

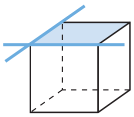
c) Dos rectas que se cruzan.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

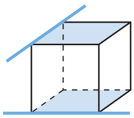
a)



b)



c)



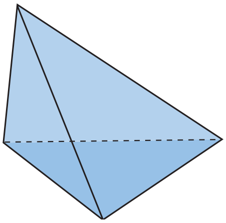
047 ●

Si dos rectas son paralelas a un plano, ¿son necesariamente paralelas entre sí?

No necesariamente, pueden cruzarse o cortarse.

048 ●

Indica las posiciones de rectas y planos que encuentres en el siguiente cuerpo geométrico:



- Planos secantes: dos de sus caras
- Rectas secantes: aristas que concurren en un vértice
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara y otra cara
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una cara y esa cara

049 ●

Considera las caras de un cubo como planos.

a) ¿Cuántas posiciones de planos paralelos tienes?

b) ¿Y de rectas secantes a un plano?

c) ¿Y de rectas contenidas en un plano?

Si las únicas rectas que consideramos son las aristas, tenemos:

a) Tres posiciones de planos paralelos.

b) Cuatro rectas secantes a un plano.

c) Cuatro rectas contenidas en un plano.

050 ●

Contesta a estas preguntas.

a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio?

b) ¿Cuántos planos contienen a una recta en el espacio?

a) Por un punto en el espacio pasan infinitas rectas.

b) En el espacio, infinitos planos pueden contener a una misma recta.

051 ●●

Decide si es verdadero o falso.

a) Tres puntos no alineados determinan un plano.

b) Dos rectas secantes se cruzan.

c) Dos planos paralelos contienen rectas paralelas.

d) Dos planos secantes son perpendiculares.

a) Verdadero

b) Falso: Si son secantes no pueden cruzarse.

c) Falso: No necesariamente deben ser paralelas.

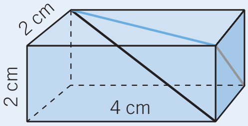
d) Falso: Dos planos perpendiculares son secantes pero dos planos secantes no tienen porqué ser perpendiculares.

ACTIVIDADES

052 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LAS DIAGONALES DE UN ORTOEDRO CONOCIENDO SUS ARISTAS?

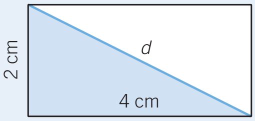
Calcula la longitud de las diagonales de este ortoedro:



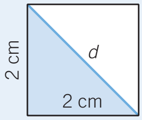
PRIMERO. Se identifican los tipos de diagonales que hay en el poliedro.

En un ortoedro hay tres tipos de diagonales: las de sus caras laterales, las de sus bases y las situadas entre vértices de caras opuestas.

SEGUNDO. Se determinan las diagonales de las caras, que son la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de la cara. Se aplica el teorema de Pitágoras.



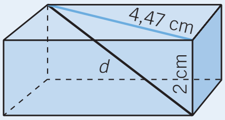
$$d^2 = 2^2 + 4^2$$
$$d = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47 \text{ cm}$$



$$d^2 = 2^2 + 2^2$$
$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}83 \text{ cm}$$

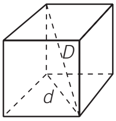
TERCERO. Se determinan las diagonales que hay situadas entre vértices de caras opuestas.

Estas diagonales serán la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son las diagonales de las caras laterales y las aristas de la base. Se aplica el teorema de Pitágoras.

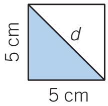


$$d^2 = 2^2 + 4{,}47^2$$
$$d = \sqrt{2^2 + 4{,}47^2} = 4{,}9 \text{ cm}$$

053 ●● **Un cubo tiene de arista 5 cm. Calcula la longitud de la diagonal de la cara y de la diagonal del cubo.**



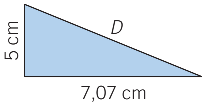
- Diagonal de la cara



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7{,}07$ cm

- Diagonal del cubo

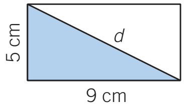


$D^2 = 5^2 + 7{,}07^2 \rightarrow D^2 = 74{,}98$
$\rightarrow D = 8{,}66$ cm

054 ●●

Un ortoedro tiene aristas de 5 cm, 7 cm y 9 cm. Halla la longitud de las diagonales de las caras y de la diagonal del ortoedro.

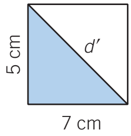
- Diagonal de la cara rectangular mayor



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 5^2 + 9^2 \rightarrow d^2 = 106 \rightarrow d = 10{,}3$ cm

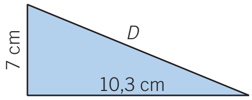
- Diagonal de la cara rectangular menor

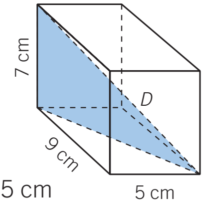


Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d'^2 = 7^2 + 5^2 \rightarrow d'^2 = 74 \rightarrow d' = 8{,}6$ cm

- Diagonal del ortoedro





$D^2 = 7^2 + 10{,}3^2 \rightarrow D^2 = 155{,}09 \rightarrow D = 12{,}45$ cm

055 ●●

Un cubo tiene una diagonal de cara de 4 cm. Determina la longitud de la arista y de la diagonal del cubo.

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} \rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}83 \text{ cm}$$

$$D^2 = l^2 + d^2 \rightarrow D = \sqrt{4^2 + 2{,}83^2} = \sqrt{16+8} = \sqrt{24} \rightarrow D = 4{,}9 \text{ cm}$$

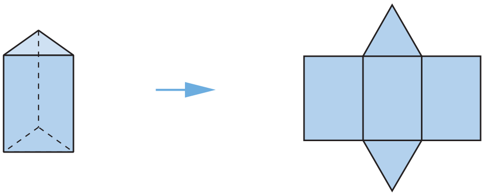
056 ●

Dibuja estos prismas y dibuja también sus desarrollos planos.

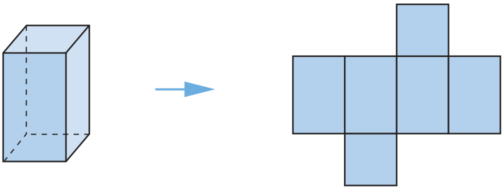
a) Prisma triangular.
b) Prisma cuadrangular.
c) Prisma pentagonal.
d) Prisma hexagonal.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

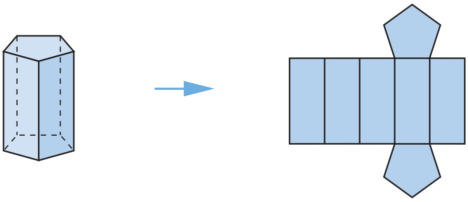
a)



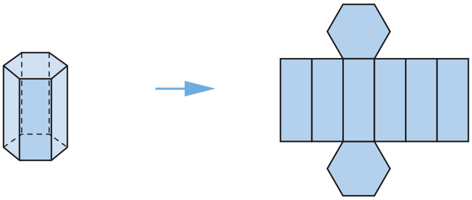
b)



c)

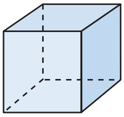


d)

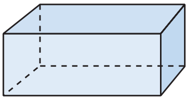


057 **Dibuja un prisma regular y otro prisma irregular.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



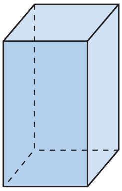
Regular



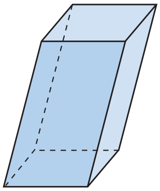
Irregular

058 **Dibuja un prisma recto y otro oblicuo que tengan la misma base.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



Recto

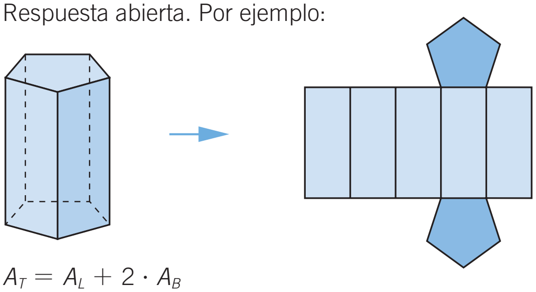


Oblicuo

059 ●

Dibuja un prisma pentagonal regular y su desarrollo. Colorea en azul el área lateral, y en rojo, el área de las bases. ¿Cómo se calcula el área total?

Respuesta abierta. Por ejemplo:



$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$

060 ●●

Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.

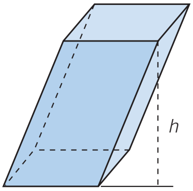
a) Un cubo es un ortoedro.

b) La altura de un prisma oblicuo es la arista lateral.

c) Los prismas oblicuos se clasifican en regulares e irregulares.

a) Verdadera

b) Falsa

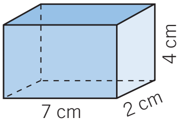


c) Falsa: Todos los prismas oblicuos son irregulares.

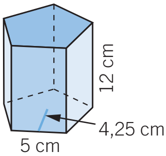
061 ●●

Calcula el área total de estos prismas.

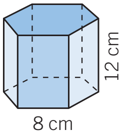
a)



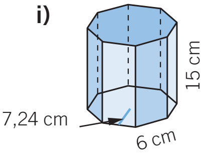
d)



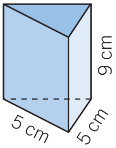
g)



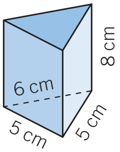
i)



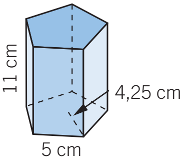
b)



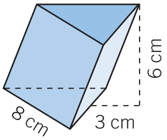
e)



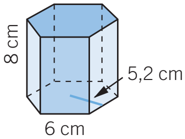
h)



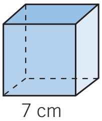
j)



c)



f)



a) $A = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 100 \text{ cm}^2$

b) $h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}$

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 9 = 156{,}65 \text{ cm}^2$$

c) $A = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} + 6 \cdot 6 \cdot 8 = 475{,}2 \text{ cm}^2$

d) $A = 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 12 = 386 \text{ cm}^2$

e) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$

$$A = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} + 8 \cdot 5 \cdot 3 = 144 \text{ cm}^2$$

f) $A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$

g) $a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ cm}$

$$A = 6 \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} + 6 \cdot 8 \cdot 12 = 742{,}32 \text{ cm}^2$$

h) $h = \sqrt{4{,}25^2 - 2{,}5^2} = 3{,}44 \text{ cm}$

$$A = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5 \cdot 3{,}44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 11 = 361 \text{ cm}^2$$

i) $A = 2 \cdot 8 \cdot \dfrac{6 \cdot 7{,}24}{2} + 48 \cdot 15 = 1\,067{,}52 \text{ cm}^2$

j) $h_{\text{Triángulo}} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93 \text{ cm}$

$$h_{\text{Cara Lateral}} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 5{,}2 = 180{,}24 \text{ cm}^2$$

062 ●● **Halla el área lateral y el área total de un prisma triangular recto, cuya altura mide 3 cm y su base es un triángulo equilátero de lado 2 cm.**

Altura de la base: $h = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1{,}73 \text{ cm}$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 3{,}46 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 3{,}46 + 18 = 21{,}46 \text{ cm}^2$$

063 ●● **Calcula el área lateral y el área total de un prisma triangular regular, cuyo lado de la base mide 4 cm y su arista lateral, 8 cm.**

Altura de la base: $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3{,}46$ cm

$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 13{,}84 \text{ cm}^2$ $A_L = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$

$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 13{,}84 + 96 = 108{,}84 \text{ cm}^2$

064 ●● **Determina el área total de un prisma hexagonal, sabiendo que la arista de su base mide 8 cm, y su altura es de 10 cm.**

Apotema de la base: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93$ cm

$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 332{,}64 \text{ cm}^2$ $A_L = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$

$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 332{,}64 + 480 = 812{,}64 \text{ cm}^2$

065 ●● **Calcula el área total de un prisma recto, cuyas bases son hexágonos regulares de lado 6 cm, si su altura es de 10 cm.**

Apotema de la base: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$ cm

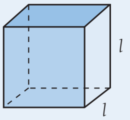
$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 187{,}2 \text{ cm}^2$ $A_L = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^2$

$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 187{,}2 + 360 = 547{,}2 \text{ cm}^2$

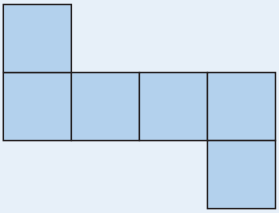
066 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA LA ARISTA DE UN CUBO CONOCIENDO SU ÁREA?

Calcula la arista de un cubo sabiendo que su área es de 54 cm².



PRIMERO. Se aplica la fórmula del área total.



$A_T = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6 \cdot l \cdot l = 6l^2$

SEGUNDO. Se iguala con el área conocida.

$6l^2 = 54 \rightarrow l^2 = \dfrac{54}{6} = 9 \rightarrow l = \sqrt{9} = 3$ cm

067 ●●

Calcula la altura de una habitación cuadrada sabiendo que el área de sus paredes, el techo y el suelo es de 726 m^2.

El área total de la habitación es de 726 m^2.

Además, el área total es: $A_T = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6l^2$ m^2

Así, la altura será: $l = \sqrt{\dfrac{726}{6}} = 11$ m

068 ●●

El área total de un cubo mide 24 cm^2. Calcula la arista del cubo, la diagonal de la cara y la diagonal del cubo.

$A = 6l^2 \rightarrow 24 = 6l^2 \rightarrow l = 2$ cm

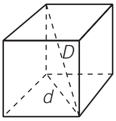
$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm

$D^2 = 3l^2 \rightarrow D = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

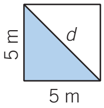
069 ●●

Halla la diagonal de un cubo de área total 150 m^2.

$A = 6l^2 \rightarrow 150 = 6l^2 \rightarrow l = 5$ m



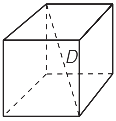
- Diagonal de la cara

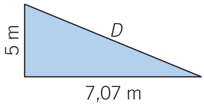


Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7,07$ m

- Diagonal del cubo





$D^2 = 5^2 + 7,07^2 \rightarrow D^2 = 74,98 \rightarrow D = 8,66$ m

070 ●●

En un estudio de arquitectura se ha diseñado un edificio que tiene forma de prisma recto, de 20 m de altura, y la base es un triángulo equilátero de 6 m de lado.

a) ¿Cuánto mide el área lateral del edificio? **b) ¿Y el área total?**

a) $A_L = 3 \cdot 6 \cdot 20 = 360$ cm^2

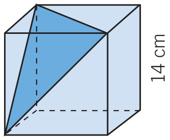
b) Altura de la base: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2$ m

$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \dfrac{6 \cdot 5,2}{2} = 31,2$ m^2

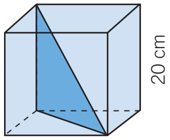
$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 31,2 + 360 = 391,2$ m^2

071 ●●● **Calcula el área de los triángulos coloreados.**

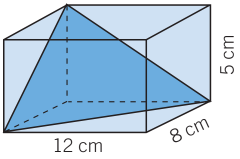
a)



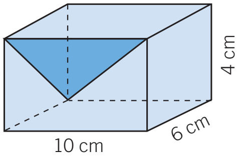
b)



c)



d)



a) La diagonal de cada cara es: $d = \sqrt{14^2 + 14^2} = 19{,}8$ cm

Se forma un triángulo equilátero de lado 19,8 cm.

$$h = \sqrt{392 - 98} = 17{,}15 \text{ cm}$$

$$A = \frac{19{,}8 \cdot 17{,}15}{2} = 169{,}79 \text{ cm}^2$$

b) La diagonal de cada cara es: $d = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{,}28$ cm

Se forma un triángulo rectángulo de catetos 28,28 cm y 20 cm.

$$A = \frac{20 \cdot 28{,}28}{2} = 282{,}8 \text{ cm}^2$$

c) Las diagonales de cada cara son:

$$d_1 = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14{,}42 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$d_3 = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9{,}43 \text{ cm}$$

Se forma un triángulo, de lados 14,42 cm, 13 cm y 9,43 cm.

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 13^2 - x^2 \\ h^2 = 9{,}43^2 - (14{,}42 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 13^2 - x^2 = 9{,}43^2 - (14{,}42 - x)^2$$

$$\rightarrow 169 - 88{,}92 + 207{,}94 = 28{,}84x \rightarrow x = 9{,}99 \text{ cm}$$

$$h^2 = 13^2 - x^2 \xrightarrow{x\,=\,9{,}99} h^2 = 169 - 99{,}8 \rightarrow h = 8{,}32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14{,}42 \cdot 8{,}32}{2} = 59{,}99 \text{ cm}^2$$

d) La diagonal del lateral es: $d = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21$ cm

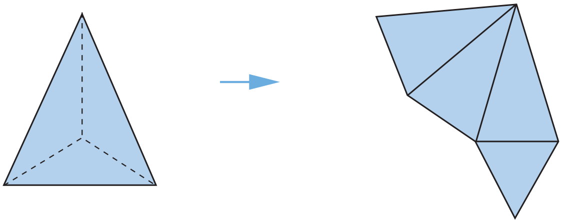
Se forma un triángulo rectángulo de catetos 7,21 cm y 10 cm.

$$A = \frac{10 \cdot 7{,}21}{2} = 36{,}06 \text{ cm}^2$$

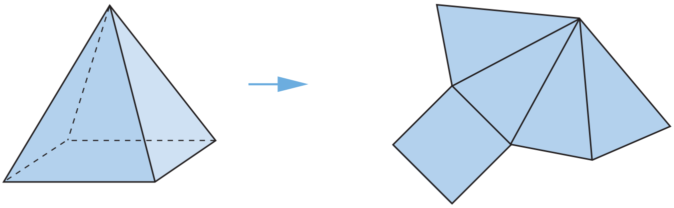
072 **Dibuja estas pirámides y su desarrollo plano.**

a) Pirámide triangular.
b) Pirámide cuadrangular.
c) Pirámide pentagonal.
d) Pirámide hexagonal.

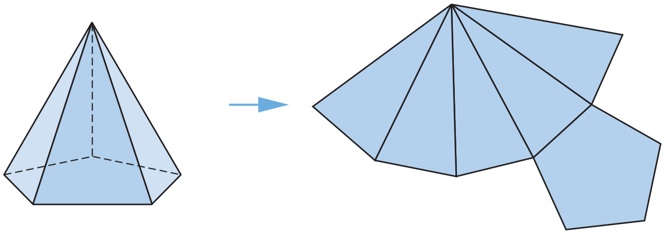
a)



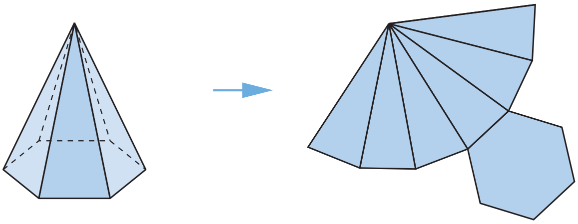
b)



c)

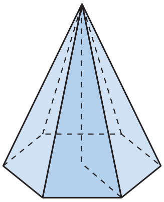


d)

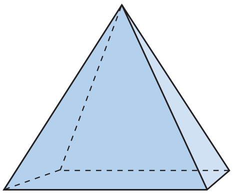


073 **Dibuja una pirámide regular y otra irregular.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



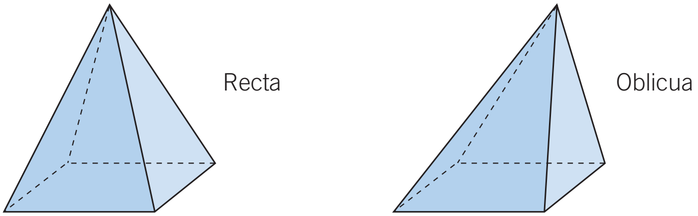
Regular



Irregular

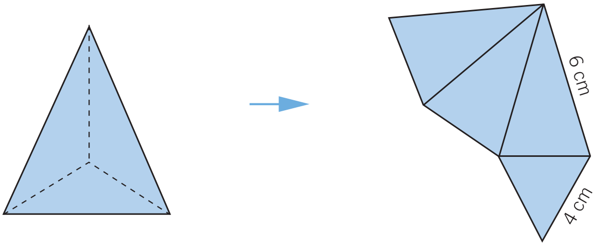
074 ● **Dibuja una pirámide recta y otra oblicua que tengan la misma base.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



075 ● **Dibuja el desarrollo plano de una pirámide triangular regular, con aristas laterales de 6 cm, y base, un triángulo equilátero de 4 cm de lado.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



076 ● **Identifica similitudes y diferencias entre una pirámide triangular regular y un tetraedro.**

El tetraedro es una pirámide triangular en la que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base, por lo que es una pirámide triangular regular.

077 ●● **Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.**

a) En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos equiláteros.

b) Una pirámide es un prisma triangular.

c) La altura de una pirámide es cualquiera de sus aristas laterales.

d) Una pirámide regular es un tetraedro.

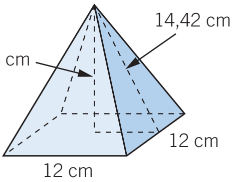
a) Falsa: Los triángulos son isósceles.

b) Falsa: La pirámide tiene caras laterales que son triángulos, y los prismas, paralelogramos.

c) Falsa: La altura es la perpendicular que pasa por el vértice superior.

d) Falsa: El tetraedro es una pirámide regular en la que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base.

078 **Determina el área total de esta pirámide:**



$$A_L = 4 \cdot \frac{12 \cdot 14{,}42}{2} = 346{,}08 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Base}} + A_L = 144 + 346{,}08 = 490{,}08 \text{ cm}^2$$

079 **En una pirámide de base pentagonal, su apotema mide 11,83 cm, la altura mide 12 cm, el lado de la base 4 cm y la apotema de la base 2,75 cm. Halla su área lateral y su área total.**

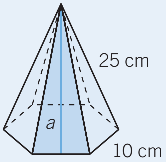
$$A_L = 5 \cdot \frac{4 \cdot 11{,}83}{2} = 118{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = 5 \cdot \frac{4 \cdot 2{,}75}{2} = 27{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Base}} + A_L = 27{,}5 + 118{,}3 = 145{,}8 \text{ cm}^2$$

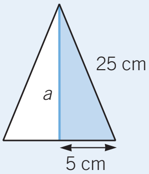
080 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UNA PIRÁMIDE CONOCIENDO SUS ARISTAS?



Calcula el área total de esta pirámide:

PRIMERO. Se calcula la apotema de la pirámide.

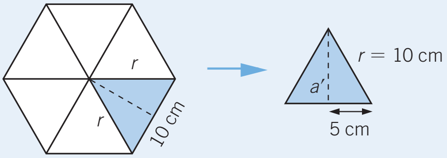


Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la pirámide, la mitad del lado de la base y la arista lateral.

$$25^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow a = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24{,}49 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula la apotema de la base.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la base, la mitad del lado de la base y el radio de la base.



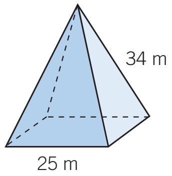
$$10^2 = (a')^2 + 5^2 \rightarrow a' = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm}$$

TERCERO. Se determina el área.

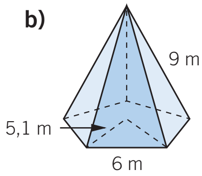
$$A_T = \frac{(6 \cdot 10) \cdot 24{,}49}{2} + \frac{(6 \cdot 10) \cdot 8{,}66}{2} = 994{,}5 \text{ cm}^2$$

081 Calcula el área total de estas pirámides.

a)



b)



a) Pirámide cuadrangular:

$$a = \sqrt{34^2 - 12{,}5^2} = 31{,}62 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = 25^2 + 50 \cdot 31{,}62 = 2\,206 \text{ m}^2$$

b) Pirámide pentagonal:

$$a = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8{,}49 \text{ m}$$

$$a' = \sqrt{5{,}1^2 - 3^2} = 4{,}12 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{30 \cdot 4{,}12}{2} + \frac{30 \cdot 8{,}49}{2} = 189{,}15 \text{ m}^2$$

082 Halla el área total de un tetraedro de arista:

a) 3 cm **b) 5 cm** **c) 9 cm** **d) 6,2 cm**

a) $a = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 2{,}6 \text{ cm}$ $A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

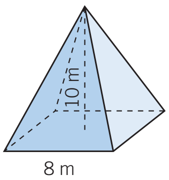
b) $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}$ $A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$

c) $a = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}79 \text{ cm}$ $A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{9 \cdot 7{,}79}{2} = 140{,}22 \text{ cm}^2$

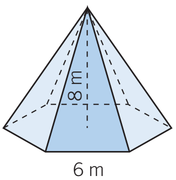
d) $a = \sqrt{6{,}2^2 - 3{,}1^2} = 5{,}37 \text{ cm}$ $A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{6{,}2 \cdot 5{,}37}{2} = 66{,}59 \text{ cm}^2$

083 Calcula el área total de estas pirámides.

a)



b)



a) $a = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10{,}77 \text{ m}$

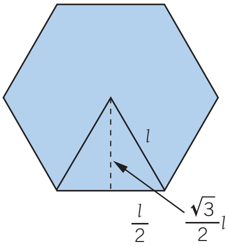
$$A_T = A_B + A_L = 64 + \frac{32 \cdot 10{,}77}{2} = 236{,}32 \text{ m}^2$$

b) $a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ m}$ $a' = \sqrt{8^2 + 5{,}2^2} = 9{,}54 \text{ m}$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} + \frac{36 \cdot 9{,}54}{2} = 265{,}32 \text{ m}^2$$

084 ●● **Determina el área total de una pirámide hexagonal regular, que tiene un área de la base de $100\ \text{cm}^2$ y una altura de 20 cm.**

Como la base es un hexágono:



$$A_B = 6 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 = 100 \rightarrow l^2 = \frac{100 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 38{,}5$$

$$\rightarrow l = \sqrt{38{,}5} = 6{,}2\ \text{cm}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}l = 5{,}37\ \text{cm}$$

Calculamos la apotema de la pirámide:

$$a = \sqrt{5{,}37^2 + 20^2} = 20{,}7\ \text{cm}$$

El área lateral es: $A_L = 6 \cdot \dfrac{6{,}2 \cdot 20{,}7}{2} = 385{,}02\ \text{cm}^2$

$$A_T = 100 + 385{,}02 = 485{,}2\ \text{cm}^2$$

085 ●●● **El área total de una pirámide cuadrangular regular es $4\ \text{cm}^2$ y su altura mide 6 cm. Calcula la arista que tiene un cubo cuya área total es igual que la de la pirámide.**

$$A_T = 6 \cdot A_B \rightarrow 4 = 6l^2 \rightarrow l = 0{,}82\ \text{cm}$$

086 ●●● **Halla la longitud de la arista de un tetraedro, para que su área sea igual que la de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 3 cm y apotema de sus caras laterales 10 cm.**

- Pirámide hexagonal:

$$a = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 2{,}6\ \text{cm}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{18 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{18 \cdot 10}{2} = 113{,}4\ \text{cm}^2$$

- Tetraedro:

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

$$A_T = 4 \cdot A_B \rightarrow 113{,}4 = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} \rightarrow 113{,}4 = \sqrt{3}\,l^2 \rightarrow l = 8{,}1\ \text{cm}$$

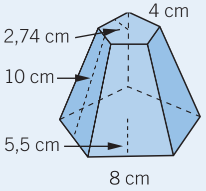
La arista del tetraedro es 8,1 cm.

087 ●

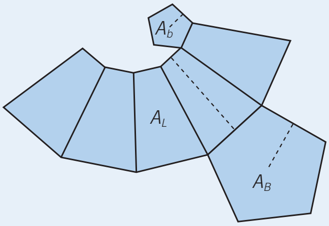
HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE?

Halla el área total de este tronco de pirámide pentagonal regular.



PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco de pirámide.



Como la base es un pentágono regular, las caras laterales son trapecios isósceles, y su altura es la apotema.

SEGUNDO. Se calcula el área lateral a partir de los trapecios.

$$A_L = 5 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 5 \cdot \frac{8+4}{2} \cdot 10 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5{,}5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2{,}74}{2} = 27{,}4 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 300 + 110 + 27{,}4 = 437{,}4 \text{ cm}^2$$

088 ●●

Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide pentagonal regular, cuyas medidas son:

- **Arista de la base mayor: 10 cm**
- **Apotema de la base mayor: 6,84 cm**
- **Arista de la base menor: 6 cm**
- **Apotema de la base menor: 4,1 cm**
- **Apotema del tronco: 7,5 cm**

$$A_L = 5 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 5 \cdot \frac{10+6}{2} \cdot 7{,}5 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}84}{2} = 171 \text{ cm}^2 \qquad A_b = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4{,}1}{2} = 61{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 300 + 171 + 61{,}5 = 532{,}5 \text{ cm}^2$$

089 ●●

Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide hexagonal regular, cuyas medidas son:

- **Arista de la base mayor: 12 cm**
- **Apotema de la base mayor: 6,84 cm**
- **Arista de la base menor: 8 cm**
- **Apotema del tronco: 4,6 cm**

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 6 \cdot \frac{12+8}{2} \cdot 4{,}6 = 6 \cdot 46 = 276 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$$

Apotema de la base menor: $h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93$ cm

$$A_b = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 276 + 374{,}04 + 166{,}32 = 816{,}36 \text{ cm}^2$$

090 ●

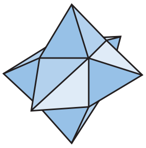
Copia y completa la tabla, sabiendo que los datos pertenecen a poliedros en los que se cumple la fórmula de Euler.

N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
9	14	**21**
6	**8**	**12**
11	18	**27**
12	**20**	30

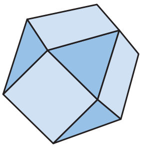
091 ●●

Clasifica los siguientes poliedros en cóncavos o convexos. Evalúa si cumplen la fórmula de Euler.

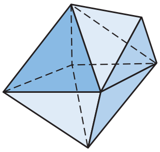
a)



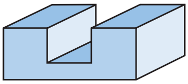
b)



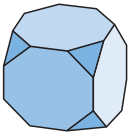
c)



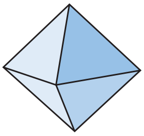
d)



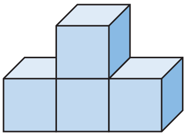
e)



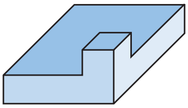
f)



g)



h)



a) Cóncavo. Caras: 24, vértices: 14, aristas: 36 → $24 + 14 = 36 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.

b) Convexo. La cumple por ser convexo.

c) Convexo. La cumple por ser convexo.

d) Cóncavo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24 → $10 + 16 = 24 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.

e) Convexo. La cumple por ser convexo.

f) Convexo. La cumple por ser convexo.

g) Cóncavo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24 → $10 + 16 = 24 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.

h) Cóncavo. Caras: 9, vértices: 13, aristas: 21 → $9 + 13 \neq 21 + 2$
No cumple la fórmula de Euler.

092 ●

Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

093 ●●

¿Qué poliedro o poliedros regulares se pueden obtener utilizando como caras triángulos equiláteros? ¿Y con pentágonos regulares? ¿Y con hexágonos regulares?

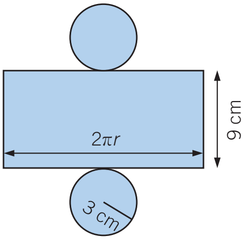
Triángulos equiláteros: tetraedro, octaedro e icosaedro

Pentágonos regulares: dodecaedro

Hexágonos regulares: no se puede obtener ningún poliedro regular

094 ●

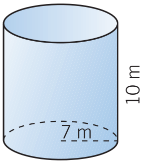
La altura de un cilindro es 9 cm y el diámetro de la base mide 6 cm. Dibuja su desarrollo plano.



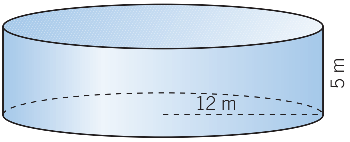
095 ●

Calcula el área total de estos cilindros.

a)



b)



a) $A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot 10 = 747{,}32 \text{ m}^2$

b) $A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 5 = 1\,281{,}12 \text{ m}^2$

096 ●●

Halla la altura de un cilindro de área lateral 756,6 cm² y radio de la base 10 cm.

$$A_L = 2\pi rg \rightarrow 756{,}6 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = \frac{756{,}6}{62{,}8} = 12{,}05 \text{ cm}$$

097 ●●

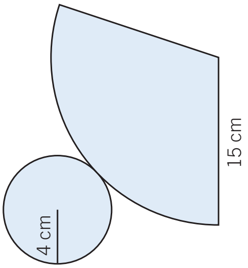
El área total de un cilindro es 471 cm² y su altura es el doble que su radio. Obtén la altura y el radio.

$$\left.\begin{array}{r} 471 = 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ h = 2r \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 471 = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r \\ \rightarrow 471 = 6\pi r^2 \rightarrow r = 5 \text{ cm} \end{array}$$

$$h = 2r \xrightarrow{r\,=\,5\text{ cm}} h = 10 \text{ cm}$$

098 ●

Dibuja el desarrollo de un cono, y calcula el valor de la longitud del arco del sector correspondiente, si el radio de la base del cono es 4 cm y su generatriz 15 cm.



La longitud del arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base:
$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$ cm

099 ●

Un cono tiene 12 cm de generatriz y 8 cm de diámetro de la base. Calcula su área total.

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 12 = 401{,}92 \text{ cm}^2$$

100 ●●

Halla la altura de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base 5 cm.

$$h = \sqrt{13^2 - 5^5} = 12 \text{ cm}$$

101 ●●

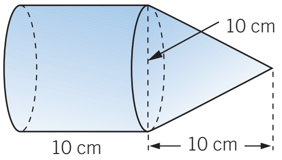
Obtén el radio de una esfera, sabiendo que el área de su superficie es de 803,84 cm².

$$A = 4\pi r^2 \rightarrow 803{,}84 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 8 \text{ cm}$$

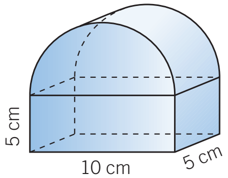
102 ●●

Halla el área total de estas figuras.

a)



b)



a) $A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10 + 3{,}14 \cdot 5^2 + 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10 =$
$= 314 + 78{,}5 + 157 = 549{,}5 \text{ cm}^2$

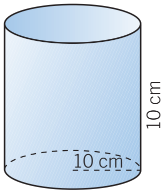
b) $A = 2 \cdot 5 \cdot 5 + (10 + 10 + 5 + 5) \cdot 4 + \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5}{2} =$
$= 50 + 120 + 157 = 327 \text{ cm}^2$

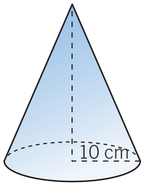
103 ●●●

Averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:

a) La misma área lateral.

b) La misma área total.





a) $A_L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 1000 = 62\,800 \text{ cm}^2$
$62\,800 = 3{,}14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2\,000 \text{ cm}$

b) $A_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 1\,000 = 63\,428 \text{ cm}^2$

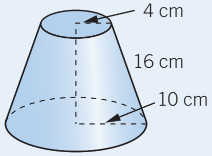
$63\,428 = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 10 + 3{,}14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2\,010 \text{ cm}$

104

HAZLO ASÍ

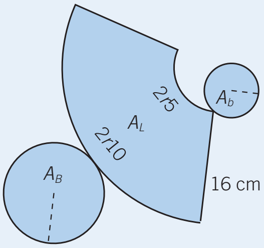
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRONCO DE CONO?

Halla el área total de este tronco de cono.



PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco de cono.

Su superficie lateral está formado por un trapecio curvilíneo y sus bases son dos círculos.



SEGUNDO. Se calcula el área lateral.

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g =$$

$$= (10 + 5) \cdot \pi \cdot 16 = 753{,}6 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \pi \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$$

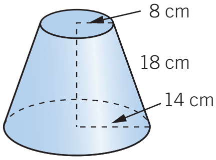
$$A_b = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 753{,}6 + 314 + 78{,}54 = 1\,146{,}14 \text{ cm}^2$$

105

Determina el área lateral y el área total de este tronco de cono:



$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g =$$

$$= (14 + 8) \cdot 3{,}14 \cdot 18 = 1\,243{,}44 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3{,}14 \cdot 14^2 = 615{,}44 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3{,}14 \cdot 8^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 1\,243{,}44 + 615{,}44 + 200{,}96 = 2\,059{,}84 \text{ cm}^2$$

106

Calcula el área total del tronco de cono cuyas medidas son:

- **Radio de la base mayor: 12 cm**
- **Radio de la base menor: 9 cm**
- **Generatriz: 6 cm**

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g = (12 + 9) \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 395{,}64 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3{,}14 \cdot 9^2 = 254{,}34 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 395{,}64 + 452{,}16 + 254{,}34 = 1\,102{,}14 \text{ cm}^2$$

107 ●● **Halla el área lateral y el área total del tronco de cono, sabiendo que sus medidas son:**

- **Radio de la base mayor: 15 cm**
- **Radio de la base menor: 12 cm**
- **Generatriz: 4 cm**

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g = (15 + 12) \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 339{,}12 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3{,}14 \cdot 15^2 = 706{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 339{,}12 + 706{,}5 + 452{,}16 = 1\,497{,}78 \text{ cm}^2$$

108 ●● **Las paredes y el techo de una habitación tienen un área de 94 m^2. Si el suelo es un rectángulo de 7 m de largo y 4 m de ancho, ¿qué altura tiene dicha habitación?**

$$A_{\text{Techo}} = A_{\text{Suelo}} = 7 \cdot 4 = 28 \text{ m}^2$$

Las cuatro paredes ocuparán un área de: $94 - 28 = 66$ m^2

Hay dos paredes de 7 m de largo y h de altura, y otras dos paredes de 4 m de largo y h de altura:

$$2 \cdot 7 \cdot h + 2 \cdot 4 \cdot h = 66 \rightarrow 14h + 8h = 66 \rightarrow 22h = 66 \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

La habitación tiene una altura de 3 m.

109 ●● **Un edificio tiene forma de prisma recto de 30 m de altura, y la base es un triángulo equilátero de 5 m de lado. ¿Qué área lateral y total tiene el edificio?**

$$a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ m}$$

$$A_L = 15 \cdot 30 = 450 \text{ m}^2$$

$$A_T = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + 450 = 471{,}65 \text{ m}^2$$

110 ●● **Calcula el área lateral y total de un monolito en forma de pirámide hexagonal, cuyo lado del hexágono mide 10 cm y el lado de los triángulos laterales es de 25 cm.**

$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8{,}66 \text{ cm}$$

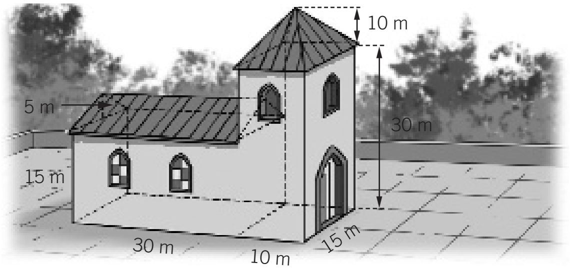
$$a' = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24{,}49 \text{ cm}$$

$$A_L = 60 \cdot 24{,}49 = 1\,469{,}4 \text{ cm}^2$$

$$A_T = \frac{60 \cdot 8{,}66}{2} + 1\,469{,}4 = 1\,729{,}2 \text{ cm}^2$$

111 ●●

Determina el coste de construir este edificio, sabiendo que el metro cuadrado de ladrillos cuesta 4,35 €, y el de tejas, 9,65 €.



- Tejado de la torre:

  $a = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}18$ m

  $A = \dfrac{40 \cdot 11{,}18}{2} = 223{,}6$ m^2

- Tejado de la iglesia:

  $l = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15{,}81$ m

  $A = 2 \cdot 15{,}81 \cdot 30 = 948{,}6$ m^2

- Fachadas laterales: $2 \cdot (30 \cdot 15 + 10 \cdot 30) = 1\,500$ m^2
- Fachadas frontales y traseras: $15 \cdot 30 + 15 \cdot 15 + 15 \cdot 15 = 900$ m^2

  Coste de las tejas: $(223{,}6 + 948{,}6) \cdot 9{,}65 = 11\,311{,}73$ €

  Coste de los ladrillos: $(1\,500 + 900) \cdot 4{,}35 = 10\,440$ €

  Coste total: $11\,311{,}73 + 10\,440 = 21\,751{,}73$ €

112 ●●

Una tienda de campaña de forma cónica tiene una altura de 2 m y un diámetro de 1 m. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para forrarla, incluyendo la base?

El área total de la tienda es la superficie que hay que forrar:

$A = 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 7{,}065$ m^2

113 ●●

Una bobina de papel de forma cilíndrica tiene una altura de 1,75 m y un diámetro de la base circular de 80 cm. Calcula el área total.

$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 \cdot 175 = 54\,008$ cm^2

114 ●

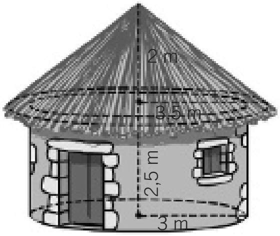
Determina la superficie esférica de un balón que tiene 30 cm de diámetro.

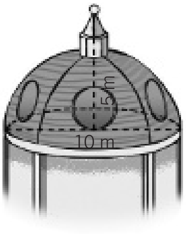
$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^2 = 2\,826$ cm^2

La superficie del babón es de 2826 cm^2.

115 ●●

Obtén el área total de estas figuras:





- Área de la casa:

$$g_{\text{Tejado}} = \sqrt{2^2 + 3{,}5^2} = 4{,}03 \text{ m}$$

$$A = 3{,}14 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 2{,}5 + \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5 \cdot 4{,}03}{2} = 119{,}65 \text{ m}^2$$

- Área del helado:

$$g_{\text{Cono}} = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}62 \text{ cm}$$

$$A = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3}{2} + 3{,}14 \cdot 3 \cdot 7{,}62 = 90{,}62 \text{ cm}^2$$

- Área de la cúpula:

$$A = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2}{2} + 3{,}14 \cdot 5^2 = 235{,}5 \text{ m}^2$$

116 ●●

Contesta a estas preguntas, razonando la respuesta:

a) ¿Pueden tener dos planos un solo punto en común?

b) ¿Pueden tres puntos no determinar un plano?

c) Una recta y un punto que no pertenezca a esa recta, ¿pueden determinar planos secantes?

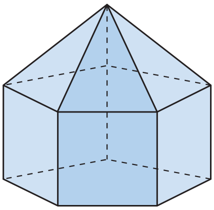
a) No, si dos planos tienen un punto en común, tienen en común toda una recta que contiene a ese punto.

b) Sí, si los tres puntos están alineados.

c) Sí, pueden determinar planos secantes.

117 ●●●

Si consideramos $C = 11$, $V = 11$ y $A = 20$ se cumple la fórmula de Euler. ¿Existe algún poliedro cuyas caras, aristas y vértices coincidan con esas cantidades?



Sí, por ejemplo, un prisma coronado por una pirámide.

118 ●●● **Con 1 000 cubitos construimos un cubo que tiene 10 cubitos por arista. A continuación, pintamos las 6 caras del cubo. ¿Cuántos cubitos tienen 3 caras pintadas? ¿Cuántos cubitos tienen 2 caras pintadas? ¿Y cuántos tienen 1 cara? ¿Cuántos cubitos no tienen ninguna cara pintada?**

Los cubitos que forman las esquinas tienen 3 caras pintadas: 8 cubitos

Los cubitos que forman las aristas menos los que están en las esquinas tienen 2 caras pintadas: $12 \cdot 8 = 96$ cubitos

Los cubitos que forman las caras exteriores menos las aristas tienen 1 cara pintada: $81 \cdot 6 = 486$ cubitos

No tienen ninguna cara pintada: $1000 - 486 - 96 - 8 = 410$ cubitos

119 ●●● **Ariel tiene 36 cubitos para hacer construcciones. ¿Cuántos prismas diferentes puede formar utilizando todos los cubitos?**

Si son iguales los prismas que tienen las mismas dimensiones, aunque estén en posición diferente, tenemos prismas con estas dimensiones:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	$1 \cdot 3 \cdot 12$	$1 \cdot 6 \cdot 6$	$2 \cdot 3 \cdot 6$
$1 \cdot 2 \cdot 18$	$1 \cdot 4 \cdot 9$	$2 \cdot 2 \cdot 9$	$3 \cdot 3 \cdot 4$

En total, se pueden formar 8 prismas diferentes.

120 ●●● **Copia y completa la siguiente tabla que muestra características sobre prismas rectos.**

	Cuadrangular	Pentagonal	Hexagonal
Lados de la base	4	5	6
Vértices	8	10	12
Aristas	12	15	18
Caras	6	7	8

a) Busca una fórmula que relacione el número de lados de la base con:

- **El número de vértices del prisma.**
- **El número de aristas del prisma.**
- **El número de caras del prisma.**

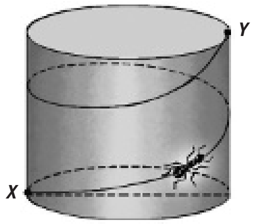
b) A la vista de las relaciones obtenidas, ¿se puede calcular el número de caras sabiendo el número de aristas? ¿Y el número de aristas conociendo el número de vértices?

a) Si n es el número de lados de la base:
N.º de vértices $= 2n$
N.º de aristas $= 3n$
N.º de caras $= n + 2$

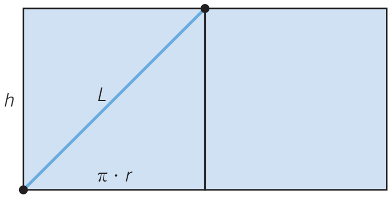
b) Sí es posible, basta con sustituir los datos conocidos y despejar en la relación correspondiente.

121 ●●● **Una hormiga se desplaza desde el punto *X* al punto *Y* sobre la superficie de un cilindro.**

¿Cuál es la mínima distancia recorrida por la hormiga?



La mínima distancia recorrida es dando menos de una vuelta. Si hacemos el desarrollo plano, vemos que la distancia buscada es la diagonal de un rectángulo de base la mitad de la circunferencia, y de altura, la altura del cilindro.



$$L = \sqrt{h^2 + (\pi \cdot r)^2}$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

122 ●●● **A una empresa dedicada al cuidado y limpieza de fachadas de edificios le han encargado consiste en limpiar las ventanas y puertas, así como pulir el mármol, de la fachada de un edificio.**

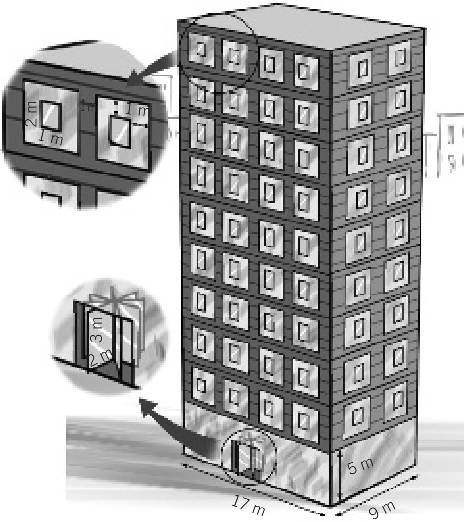
Para elaborar el presupuesto, un técnico ha visitado el edificio para tomar medidas.

Eres capaz de… Comprender

a) **¿Cuántas ventanas tiene el edificio? ¿Cuál es su área?**

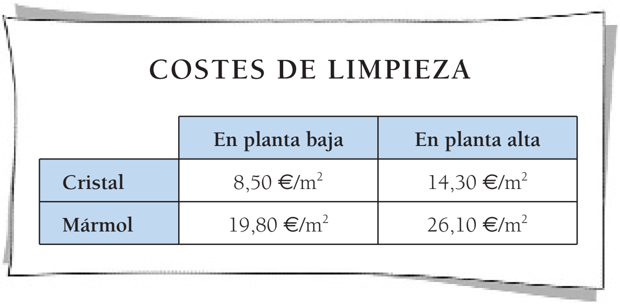
Eres capaz de… Resolver

b) **¿Cuánta superficie de cristal hay que limpiar? ¿Y de mármol?**



ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Estas medidas se entregan en el departamento de Facturación, donde se calculan los costes de la limpieza.



COSTES DE LIMPIEZA

	En planta baja	En planta alta
Cristal	8,50 €/m^2	14,30 €/m^2
Mármol	19,80 €/m^2	26,10 €/m^2

Si el presupuesto previsto por la comunidad para la limpieza de la fachada es de 40 000 €, ¿crees que tienen dinero suficiente?

a) Suponemos que el edificio ocupa la totalidad de la manzana y que las ventanas se reparten de manera similar por todo el edificio.

El número de ventanas que tiene el edificio es:
$2 \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 9 = 108$ ventanas
Su área es de: $108 \cdot 1 \cdot 2 = 216$ m^2

b) La superficie de cristal de las plantas altas es el área de las ventanas que hemos calculado, esto es, 216 m^2.
En la planta baja hay una puerta con 8 cristales de $2 \cdot 3 = 6$ m^2, que hacen un total de 48 m^2 de cristal en la planta baja.

Así, la superficie de cristal que hay que limpiar es de:
$216 + 48 = 264$ m^2

La superficie de mármol que recubre cada ventana es de:
$3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$ m^2

Por lo tanto, la superficie total de mármol en las plantas altas es de:
$108 \cdot 10 = 1080$ m^2

En la planta baja, la superficie de mármol es la del zócalo menos la del espacio de la puerta:
$(17 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 248$ m^2

Así, la superficie de mármol que hay que limpiar es de:
$1080 + 248 = 1328$ m^2

c) El coste de la limpieza del edificio será:
$48 \cdot 8{,}50 + 216 \cdot 14{,}30 + 248 \cdot 19{,}80 + 1080 \cdot 26{,}10 = 36\,595{,}20$ €
Como el presupuesto de la comunidad es de 40 000 €, sí tienen dinero suficiente para realizar la limpieza.

123 ●●● **La escultora María Cincel ha recibido un encargo del ayuntamiento de Buril.**

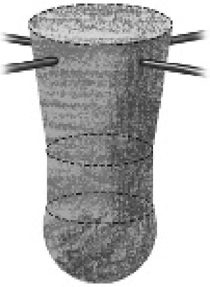
La escultora ha pensado en realizar una escultura de granito, que es la piedra predominante en los alrededores, y en una estructura similar a esta.

Cuando ha llamado a una cantera en la que le pueden proporcionar el granito, le han informado de que tienen estas piezas:

Un cono de 2,4 m de altura y un diámetro de 1,4 m.

Un cilindro de 0,4 m de radio y 0,6 m de altura.

Una esfera de 0,5 m de radio.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cómo tendrá que unir las tres piezas de granito para obtener la escultura?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

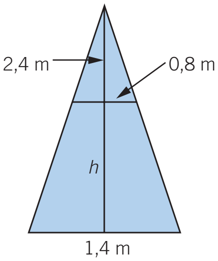
b) Para conseguir esta estructura tendrá que hacer un corte al cono y otro a la esfera. ¿A qué altura tiene que hacer los cortes?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Se necesita recubrir la escultura de un líquido que hace que la piedra no se deteriore. Cada bote de ese líquido sirve para cubrir 5 m^2. Si María tiene dos botes, ¿tendrá líquido suficiente?

a) En la parte superior se pondrá el cono, que como tendrá que encajar con el cilindro deberemos cortarle hasta dejarle una base superior de 0,4 m de radio. En el centro irá el cilindro, y en la parte inferior la esfera, que también habrá que cortar hasta dejar una sección de radio de, también, 0,4 m.

b) • Cono

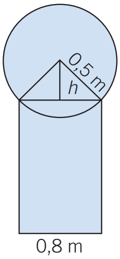


Como son triángulos semejantes:

$$\frac{1,4}{2,4} = \frac{0,8}{h} \rightarrow h = 1,37 \text{ m}$$

Hay que cortar el cono a 1,37 m de su vértice. Es decir, al cono de granito hay que quitarle otro cono menor de altura 1,37 m y base 0,8 m de diámetro.

- Esfera



$$h = \sqrt{0,5^2 - 0,4^2} = 0,3 \text{ m}$$

La esfera ha de cortarse a una distancia de 30 cm del centro o, lo que es lo mismo, a 20 cm de la superficie.

c) • Superficie del tronco de cono de la escultura

Calculamos la generatriz del cono entero: $g = \sqrt{0,7^2 + 2,4^2} = 2,5$ m

Superficie cono entero:

$$S_T = \pi rg + \pi r^2 = 3,14 \cdot 0,7 \cdot 2,5 + 3,14 \cdot 0,7^2 = 7,034 \text{ m}^2$$

Calculamos la generatriz del cono cortado:

$$g = \sqrt{0,4^2 + 1,37^2} = 1,43 \text{ m}$$

Superficie del cono cortado sin la base:

$$S_C = \pi rg = 3,14 \cdot 0,4 \cdot 1,43 = 1,796 \text{ m}^2$$

Superficie del tronco de cono de la escultura:

$$S = S_T + S_C = 7,034 - 1,796 = 5,238 \text{ m}^2$$

- Superficie del cilindro sin las bases

$$\text{Superficie cilindro} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 1,507 \text{ m}^2$$

- Superficie del trozo de esfera de la escultura

Superficie total del la esfera de granito:

$$S_T = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,5^2 = 6,28 \text{ m}^2$$

Superficie del casquete esférico que quitamos de la esfera:

$$S_C = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot (0,5 - 0,3) = 0,628 \text{ m}^2$$

Superficie del trozo de esfera de la escultura:

$$S = S_T - S_C = 6,28 - 0,628 = 5,652 \text{ m}^2$$

- Superficie total de la escultura:

$$S = 5,238 + 1,507 + 5,652 = 12,397 \text{ m}^2$$

Por tanto, necesita 3 botes para recubrir totalmente la escultura.

12 Volumen de cuerpos geométricos

El saqueo de Siracusa

El cónsul Marcelo veía desde la distancia el inexorable avance de su ejército sobre la ciudad de Siracusa. El grueso de sus tropas entraba por un boquete de la muralla, mientras que otros legionarios la escalaban por distintos puntos.

La batalla estaba decidida y, de regreso a su tienda, le dijo a su lugarteniente:

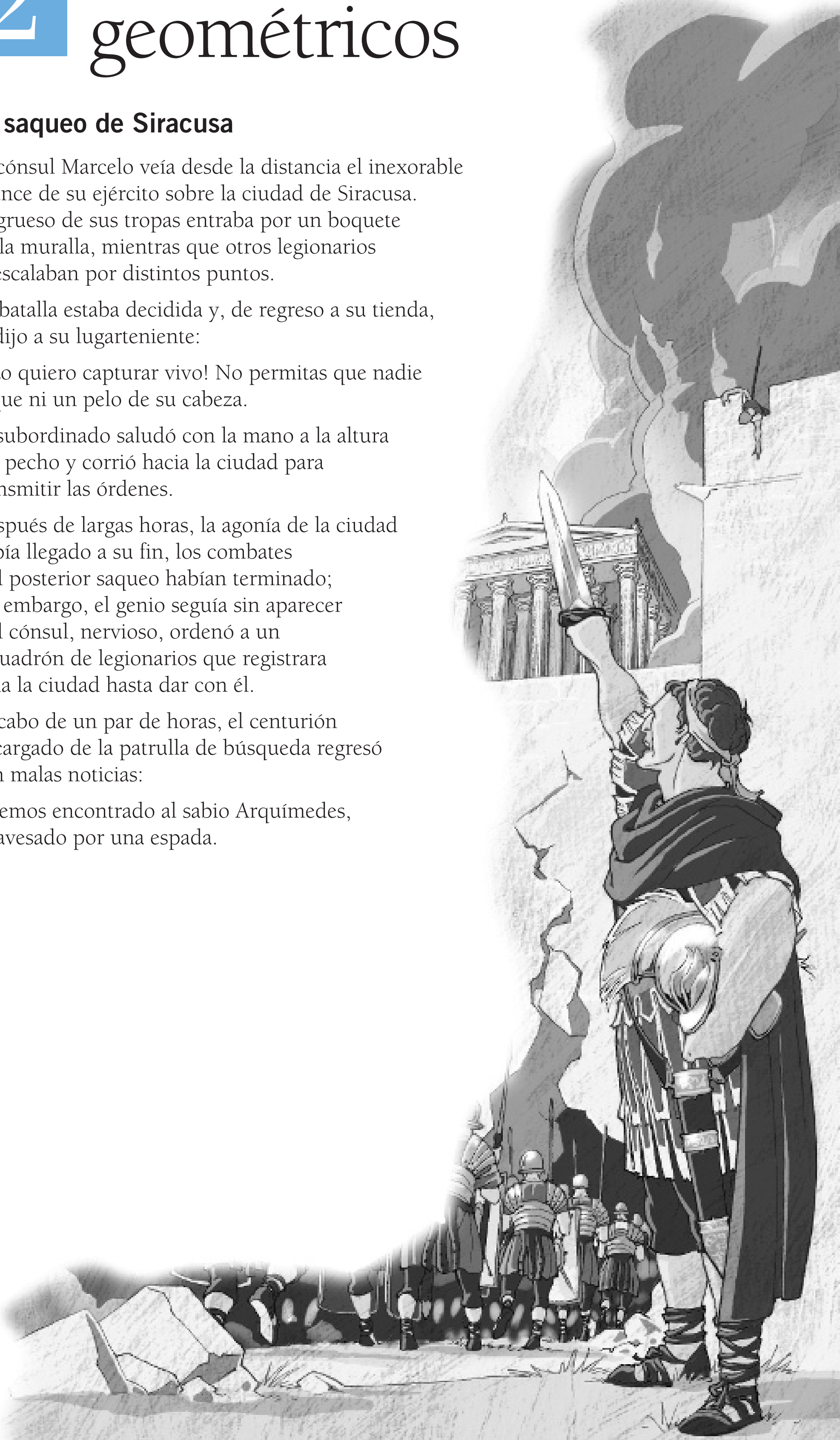
–¡Lo quiero capturar vivo! No permitas que nadie toque ni un pelo de su cabeza.

El subordinado saludó con la mano a la altura del pecho y corrió hacia la ciudad para transmitir las órdenes.

Después de largas horas, la agonía de la ciudad había llegado a su fin, los combates y el posterior saqueo habían terminado; sin embargo, el genio seguía sin aparecer y el cónsul, nervioso, ordenó a un escuadrón de legionarios que registrara toda la ciudad hasta dar con él.

Al cabo de un par de horas, el centurión encargado de la patrulla de búsqueda regresó con malas noticias:

–Hemos encontrado al sabio Arquímedes, atravesado por una espada.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Arquímedes está reconocido como uno de los mayores matemáticos de la Antigüedad. Busca información sobre su vida y su obra.**

Se puede encontrar información sobre la vida de Arquímedes visitando la siguiente página web:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/arquimedes.htm

En la siguiente página se puede completar la información sobre la biografía de este matemático:
http://www.portalplanetasedna.com.ar/arquimedes.htm

2 **El texto narra un episodio de su vida. Averigua cómo murió Arquímedes.**

En esta página web se puede obtener información sobre cómo tuvo lugar la muerte de Arquímedes:
http://curistoria.blogspot.com/2010/10/la-muerte-de-arquimedes.html

3 **Investiga sobre las publicaciones que Arquímedes realizó sobre el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos.**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Arquímedes y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/arquimedes.htm

En este otro enlace también se pueden encontrar datos sobre los trabajos que realizó Arquímedes relacionados con el cálculo de volúmenes:
http://www.cienciafacil.com/paginaesfera.html

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

a) 143 · 10
b) 4 · 10
c) 14,35 · 1 000
d) 4 : 10
e) 0,201 · 100
f) 0,201 : 100
g) 0,201 · 1 000
h) 14,35 : 1 000

a) 1 430
b) 40
c) 14 350
d) 0,4
e) 20,1
f) 0,00201
g) 0,000201
h) 0,01435

2 **Expresa estas medidas de capacidad en decilitros.**

a) 12 ℓ **b) 52,6 dal** **c) 14,7 cl** **d) 0,23 kl**

a) 120 dl b) 5 260 dl c) 1,47 dl d) 2 300 dl

3 **Expresa las siguientes medidas de masa en decagramos.**

a) 0,7 hg **b) 25 cg** **c) 5 g** **d) 21,96 kg**

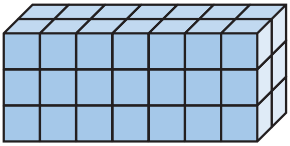
a) 70 dag b) 0,025 dag c) 0,5 dag d) 2 196 dag

Volumen de cuerpos geométricos

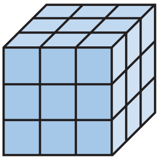
EJERCICIOS

001 **Determina el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**

a)



b)



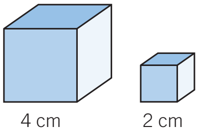
a) $V = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42\ \text{cm}^3$

b) $V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27\ \text{cm}^3$

002 **Calcula el volumen de un cubo que tiene 5 cm de arista. Expresa el resultado en m^3.**

$V = 5^3 = 125\ \text{cm}^3 = 0{,}000125\ \text{m}^3$

003 **¿Cuántas veces es mayor el volumen del cubo grande que el del cubo pequeño?**



El volumen del cubo grande es 8 veces mayor.

004 **Expresa en decímetros cúbicos.**

a) 525 cm^3 **b) 0,5 dam^3** **c) 3 m^3**

a) 0,523 dm^3

b) 500 000 dm^3

c) 3 000 dm^3

005 **Expresa en forma compleja o incompleja.**

a) 3 425 123 m^3

b) 4 090,67 dm^3

c) 76 cm^3 0,46 dm^3

d) 90 cm^3 450 mm^3

a) 3 hm^3 425 dam^3 123 m^3

b) 4 m^3 90 dm^3 670 cm^3

c) 536 cm^3

d) 90 450 mm^3

006 **Una planta que potabiliza agua del mar desala 25 000 m^3 de agua al día. ¿Cuántos hm^3, dam^3 y m^3 desalará en un año?**

$25\,000 \cdot 365 = 9\,125\,000\ \text{m}^3 = 9\,125\ \text{dam}^3 = 9{,}125\ \text{hm}^3$

007 **Calcula: 1 hm^3 − 2 dam^3 − 5 m^3**

$1\,000\,000 - 2\,000 - 5 = 997\,995\ \text{m}^3$

008 **Expresa en decímetros cúbicos.**

a) 3,42 ℓ **b) 4 090 cl** **c) 0,98 dal** **d) 0,009 hl**

a) 3,42 dm^3

b) 40,9 dm^3

c) 9,8 dm^3

d) 0,9 dm^3

009 **Transforma en kilogramos las siguientes medidas de agua destilada.**

a) 240 cm^3
b) 8,6 cl
c) 7 dal
d) 2 400 mm^3

a) 0,24 kg
b) 0,086 kg
c) 70 kg
d) 0,0024 kg

010 **¿Cuántos vasos de 3 dl de capacidad se pueden llenar con una jarra de 1,5 ℓ?**

Se pueden llenar 15 : 3 = 5 vasos.

011 **¿Cuántos litros de leche caben en un paquete de forma cúbica cuya arista mide 16 cm?**

Caben $16^3 = 4\,096$ cm^3 = 4,096 litros de leche.

012 **¿Qué arista debe tener un cubo para contener 8 ℓ de aceite?**

$V = l^3 \rightarrow 8 = l^3 \rightarrow l = 2$ dm. Debe tener 2 dm de arista.

013 **Una barra de plata de 1 dm^3 pesa 10,47 kg. ¿Cuál es la densidad de la plata?**

Como el volumen se expresa en dm^3, la masa se expresará en kg.

Sustituimos en la fórmula: $d = \frac{m}{V} \rightarrow d = \frac{10{,}47}{1} \rightarrow d = 10{,}47$ kg/dm^3

014 **Un trozo de metal de 400 cm^3 de volumen tiene una densidad de 16,18 g/cm^3. ¿Cuánto pesa?**

Como el volumen se expresa en cm^3, la masa se expresará en g.

Sustituimos en la fórmula: $d = \frac{m}{V} \rightarrow 16{,}18 = \frac{m}{400}$

$\rightarrow m = 16{,}18 \cdot 400 \rightarrow m = 6\,472$ g

015 **Una barra de hierro pesa 50 kg. Si la densidad del hierro es 7,21 kg/ℓ, ¿cuál será su volumen?**

Como la masa se expresa en kg, el volumen se expresará en dm^3.

Sustituimos en la fórmula: $d = \frac{m}{V} \rightarrow 7{,}21 = \frac{50}{V} \rightarrow 7{,}21 \cdot V = 50$

$\rightarrow V = \frac{50}{7{,}21} \rightarrow V = 6{,}93$ dm^3

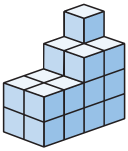
016 **Si una sortija, hecha con 1 cm^3 de oro, pesa 19,26 g, ¿cuál es la densidad del oro?**

Sustituimos en la fórmula: $d = \frac{m}{V} \rightarrow d = \frac{19{,}26}{1} \rightarrow d = 19{,}26$ g/cm^3

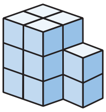
Volumen de cuerpos geométricos

017 **Si cada cubito mide 1 cm^3, halla el volumen de estas figuras.**

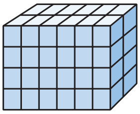
a)



b)



c)



a) 21 cubos → 21 cm^3 b) 14 cubos → 14 cm^3 c) 48 cubos → 48 cm^3

018 **Obtén el volumen de una piscina que tiene 12 m de largo, 9 m de ancho y 2 m de profundidad. Expresa el resultado en m^3 y ℓ.**

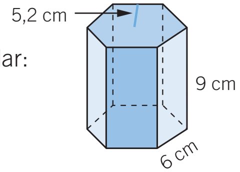
Como $V = 12 \cdot 9 \cdot 2 = 216$ m^3, su capacidad es: 216 m^3 = 216 kl = 216 000 ℓ

019 **Un ortoedro tiene de dimensiones $a = 25$ cm, $b = 8$ cm y $c = 5$ cm. ¿Cuánto mide la arista de un cubo con el mismo volumen que el ortoedro?**

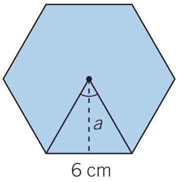
El volumen del ortoedro es: $25 \cdot 8 \cdot 5 = 1\,000$ cm^3

La arista del cubo mide 10 cm.

020 **Determina el volumen de este prisma:**



Hallamos el área de la base, que es un hexágono regular:



$a = 5{,}2$ cm

$$A_{\text{Base}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 6) \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 93{,}6 \cdot 9 = 842{,}4 \text{ cm}^3$$

021 **Halla el volumen de un cilindro cuya área de la base mide 45 cm^2 y su altura 7 cm.**

$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 45 \cdot 7 = 315$ cm^3

022 **Una urna de cristal tiene unas aristas de 40 cm, 40 cm y 60 cm. ¿Cuánta agua cabe en ella?**

$V = 40 \cdot 40 \cdot 60 = 96\,000$ cm^3 = 96 dm^3

Como 1 l = 1 dm^3, caben 96 l de agua en la urna.

023 **¿Cuál es el área de la base de un cilindro con una altura de 8 cm y que tiene el mismo volumen que un cubo de 6 cm de arista?**

Volumen del cubo: $V = 6^3 = 216$ cm^3

Volumen del cilindro: $V = A_{\text{Base}} \cdot 8 = 216 \rightarrow A_{\text{Base}} = 27$ cm^2

024 **Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular de arista de la base 7 cm y altura 13 cm.**

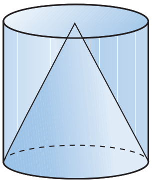
Hallamos el área de la base, que es un cuadrado: $A = l^2 \rightarrow A = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$

Calculamos el volumen: $V = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 13 = 212,\widehat{3} \text{ cm}^3$

025 **¿Cuál es el radio de la base de un cono que tiene 12 cm de altura y un volumen de 168 cm³?**

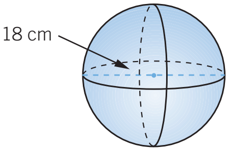
$V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 168 = A_{\text{Base}} \cdot 12 \rightarrow A_{\text{Base}} = 14 \text{ cm}^2$
$A_{\text{Base}} = \pi r^2 \rightarrow 14 = \pi r^2 \rightarrow r = 2,11 \text{ cm}$

026 **Un cilindro tiene como diámetro de la base 8 cm y una altura de 12 cm. Halla el volumen de un cono de igual altura y base circular equivalente.**



$A_{\text{Base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$
$V = \frac{1}{3} A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 50,24 \cdot 12 = 200,96 \text{ cm}^3$

027 **Halla el volumen de esta esfera:**



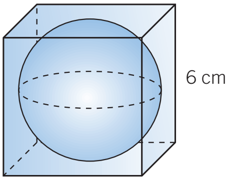
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 \rightarrow V = 3052 \text{ cm}^3$

028 **Si el volumen de una esfera es 34 cm³, ¿cuál es la longitud de su radio?**

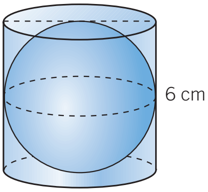
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 34 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r^3 = 8,12 \rightarrow r = 2,01 \text{ cm}$

029 **Calcula el volumen comprendido entre estos cuerpos y la esfera inscrita en ellos.**

a)



b)



a) Volumen del cubo: $V = l^3 \rightarrow V = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \rightarrow V = 113,04 \text{ cm}^3$

El volumen comprendido es: $216 - 113,04 = 102,96 \text{ cm}^3$

b) Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 169,56 \text{ cm}^3$

Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \rightarrow V = 113,04 \text{ cm}^3$

El volumen comprendido es: $169,56 - 113,04 = 56,52 \text{ cm}^3$

ACTIVIDADES

030 **Transforma en decímetros cúbicos.**

a) 8,56 m^3
b) 124 090 cm^3
c) 0,085 m^3
d) 0,006 dam^3

a) 8 560 dm^3
b) 124,09 dm^3
c) 85 dm^3
d) 6 000 dm^3

031 **Expresa en decámetros cúbicos.**

a) 93,42 m^3
b) 64 090 cm^3
c) 0,86 hm^3
d) 0,0059 dm^3

a) 0,09342 dam^3
b) 0,00006409 dam^3
c) 860 dam^3
d) 0,0000000059 dam^3

032 **Expresa en metros cúbicos.**

a) 1,4 km^3 23 hm^3 18 dam^3
b) 0,625 dm^3 850 cm^3 589 mm^3

a) 1 423 018 000 m^3
b) 0,001475589 m^3

033 **Transforma en hectómetros cúbicos.**

a) 30 dam^3 41 m^3
b) 4 450 m^3 500 cm^3
c) 760 m^3 480 dm^3
d) 98 m^3 4 800 dm^3

a) 0,030041 hm^3
b) 0,0000044505 hm^3
c) 0,000760480 hm^3
d) 0,0001028 hm^3

034 **Expresa de forma compleja.**

a) 57 784 325 dam^3
b) 782 760,432 cm^3
c) 85 245,9847 m^3
d) 6 667 229 503 dm^3

a) 57 km^3 784 hm^3 325 dam^3
b) 782 dm^3 760 cm^3 432 mm^3
c) 85 dam^3 245 m^3 984 dm^3 700 cm^3
d) 6 hm^3 667 dam^3 229 m^3 503 dm^3

035 **Expresa en mililitros.**

a) 53,41 ℓ
b) 5 246 cl
c) 9,08 dal
d) 0,0019 hl

a) 53 410 ml
b) 52 460 ml
c) 90 800 ml
d) 190 ml

036 ●

Transforma en decalitros.

a) 8 050 dl 900 cl

b) 850 ml 50 cl

c) 7 590,41 dl

d) 80 dl 4 750 ml

a) 81,4 dal

b) 0,09 dal

c) 75,9041 dal

d) 1,275 dal

037 ●

Calcula el peso del agua destilada.

a) 3 dal

b) 12 dl

c) 65 cm^3

d) 423 m^3

a) 30 kg

b) 1,2 kg

c) 65 g

d) 423 000 kg

038 ●●

Una barra de hierro pesa 40 kg. Si la densidad del hierro es 7,8 kg/dm^3, ¿cuál será su volumen?

$$V = \frac{40}{7,8} = 5,128 \text{ dm}^3$$

039 ●●

Un lingote de plata de 2 dm^3 pesa 20,94 kg. ¿Cuál es la densidad de la plata?

$$d = \frac{20,94}{2} = 10,47 \text{ kg/dm}^3$$

040 ●●

La densidad del oro es 19,258 g/cm^3. Di qué significa esto.

Esto significa que 1 cm^3 de oro pesa 19,258 g.

041 ●●

Un bloque de aluminio pesa 75 kg y su densidad es 2,7 g/cm^3. ¿Cuál es su volumen?

$$V = \frac{75\,000}{2,7} = 27\,777,777 \text{ cm}^3 = 27,777 \text{ dm}^3$$

042 ●●

Un trozo de metal pesa 3 149,6 g y su densidad es 12,4 kg/dm^3. ¿Cuál es su volumen en cm^3?

$$V = \frac{3,1496}{12,4} = 0,254 \text{ dm}^3 = 254 \text{ cm}^3$$

043 ●

Calcula el volumen de un cubo que tiene 8 cm de arista. Expresa el resultado en m^3.

$$V = 8^3 = 512 \text{ cm}^3 = 0,000512 \text{ m}^3$$

Volumen de cuerpos geométricos

044 ●

El perímetro de la base de un cubo es 84 cm. Halla su volumen.

$P = 4l \rightarrow 84 = 4l \rightarrow l = 21$ cm

$V = 21^3 = 9261$ cm^3

045 ●

Si el volumen de un cubo es 98 cm^3, calcula la longitud de su arista.

$98 = l^3 \rightarrow l = 4{,}61$ cm

046 ●●

El volumen de un cubo es 125 cm^3. Halla su diagonal.

$125 = l^3 \rightarrow l = 5$ cm

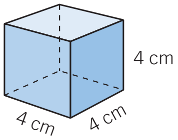
Diagonal del lado: $d = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7{,}07$ cm

Diagonal del cubo: $d = \sqrt{50 + 5^2} = 8{,}66$ cm

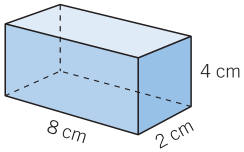
047 ●●

Identifica cuáles de estas figuras tienen el mismo volumen, aplicando el principio de Cavalieri.

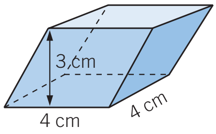
a)



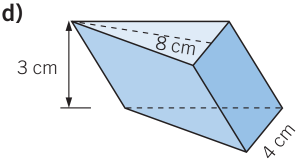
c)



b)



d)



Las figuras de los apartados a) y c) tienen el mismo volumen, porque la sección de ambas mide 16 cm^2 de área y presentan igual altura, 4 cm.

Las figuras de los apartados b) y d) tienen el mismo volumen, porque la sección de ambas mide 16 cm^2 de área y presentan igual altura, 3 cm.

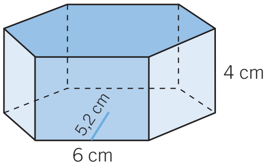
048 ●

Obtén el volumen de un prisma cuya base es un cuadrado de 8 cm de lado y su altura mide 15 cm.

$V = 8^2 \cdot 15 = 960$ cm^3

049 ●

Calcula el volumen de este prisma de base hexagonal regular.



$A_{\text{Base}} = \dfrac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm^2

$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 93{,}6 \cdot 4 = 374{,}4$ cm^3

050 ●●

Determina el volumen de un prisma hexagonal que tiene 10 cm de arista básica y 16 cm de altura.

$$a = \sqrt{100 - 25} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Base}} = \frac{60 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 259{,}8 \cdot 16 = 4\,156{,}8 \text{ cm}^3$$

051 ●●

Un prisma de base cuadrada de 12 cm de altura tiene un volumen de 146 cm^3. Calcula la longitud del lado de la base.

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 146 = A_{\text{Base}} \cdot 12 \rightarrow A_{\text{Base}} = 12{,}17 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = l^2 \rightarrow 12{,}17 = l^2 \rightarrow l = 3{,}49 \text{ cm}$$

052 ●

Obtén el volumen de un cilindro de altura 15 cm y diámetro de la base 16 cm.

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 3\,014{,}4 \text{ cm}^3$$

053 ●

Calcula el radio de un cilindro que tiene 8 cm de altura y un volumen de 122 cm^3.

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h \rightarrow 122 = \pi \cdot r^2 \cdot 8 \rightarrow r = 2{,}2 \text{ cm}$$

054 ●●

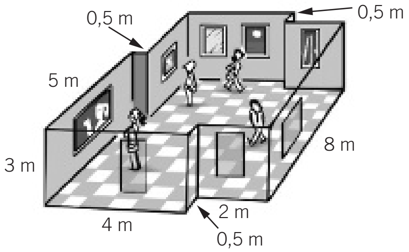
Halla el volumen de un cilindro de 12 cm de radio de la base, y de altura, el triple del radio.

$$h = 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm}$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 16\,277{,}76 \text{ cm}^3$$

055 ●●

Calcula el volumen de esta sala:

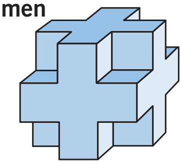


$$A_{\text{Base}} = A_{\text{Rectángulo}} - A_{\text{Entrantes}} = 9 \cdot 6 - 2 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}5 = 50 \text{ m}^2$$

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = 50 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3$$

Volumen de cuerpos geométricos

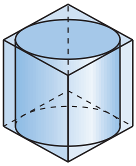
056 ●● **Obtén el volumen de la figura.**



El volumen es el volumen del cubo entero menos el volumen de los 8 cubitos que faltan:

$V = 6^3 - 8 \cdot 2^3 = 216 - 64 = 152 \text{ cm}^3$

057 ●● **Calcula el volumen comprendido entre un cubo de 8 cm de arista y el cilindro inscrito en él.**



Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 401{,}92 \text{ cm}^3$

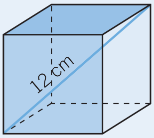
Volumen de la esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = 267{,}94 \text{ cm}^3$

El volumen comprendido es: $401{,}92 - 267{,}94 = 133{,}98 \text{ cm}^3$

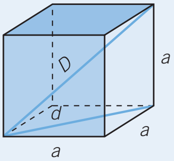
058 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE UN CUBO CONOCIENDO SOLO SU DIAGONAL?

Calcula el volumen de este cubo:



PRIMERO. Se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos:



- Hipotenusa *D* y catetos *d* y *a*.

  $D^2 = a^2 + d^2 \rightarrow 12^2 = a^2 + d^2$

- Hipotenusa *d* y catetos *a* y *a*.

  $d^2 = a^2 + a^2$

SEGUNDO. Se plantea un sistema con las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 12^2 &= a^2 + d^2 \\ d^2 &= a^2 + a^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow d^2 = 12^2 - a^2 \\ &\rightarrow 12^2 - a^2 = a^2 + a^2 \rightarrow a^2 = \frac{12^2}{3} = 48 \end{aligned}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{48} = 6{,}93 \text{ cm}$$

TERCERO. Se calcula el volumen.

$$V = 6{,}93^3 = 332{,}81 \text{ cm}^3$$

059 **Calcula el volumen de un cubo, sabiendo que su diagonal mide:**

a) 27 cm **b) 32 cm** **c) 9 cm**

a) $$\left.\begin{array}{r}27^2 = a^2 + d^2\\ d^2 = a^2 + a^2\end{array}\right\} \rightarrow 27^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{243} = 15{,}59 \text{ cm}$$

$$V = a^3 = 15{,}59^3 = 3\,789{,}12 \text{ cm}^3$$

b) $$\left.\begin{array}{r}32^2 = a^2 + d^2\\ d^2 = a^2 + a^2\end{array}\right\} \rightarrow 32^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \frac{\sqrt{1\,024}}{3} = 18{,}48 \text{ cm}$$

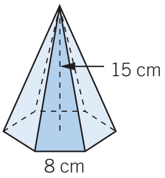
$$V = a^3 = 18{,}48^3 = 6\,311{,}11 \text{ cm}^3$$

c) $$\left.\begin{array}{r}9^2 = a^2 + d^2\\ d^2 = a^2 + a^2\end{array}\right\} \rightarrow 9^2 = a^2 + a^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$$

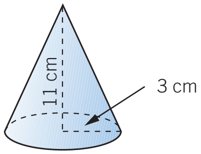
$$V = a^3 = 5{,}2^3 = 140{,}61 \text{ cm}^3$$

060 **Halla el volumen de estas figuras.**

a)



b)

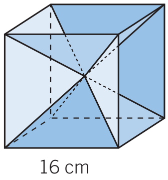


a) $a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93$ cm

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 15 = 831{,}6 \text{ cm}^3$$

b) $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 11 = 103{,}62 \text{ cm}^3$

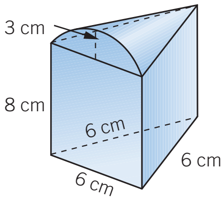
061 **Uniendo el centro de un cubo de 16 cm de arista con sus 8 vértices se forman 6 pirámides. ¿Cuál es el volumen de cada pirámide?**



El volumen de cada pirámide es la sexta parte del volumen del cubo:

$$V = \frac{16^3}{6} = 682{,}67 \text{ cm}^3$$

062 **Halla el volumen de esta figura, formada por un prisma y la mitad de un cono, si el triángulo de la base del prisma es equilátero.**



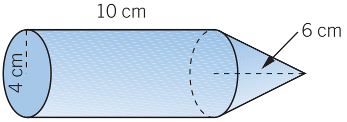
$$h_{\text{Base}} = \sqrt{36 - 9} = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$V = V_{\text{Prisma}} + \frac{V_{\text{Cono}}}{2} = \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} + \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{2} = 15{,}6 + 28{,}26 = 43{,}86 \text{ cm}^3$$

Volumen de cuerpos geométricos

063 ●●

En una acería se fabrican diariamente 3 000 piezas de acero ($d = 8$ g/cm^3) con esta forma. Halla la masa y el volumen de acero utilizado.



$$V_{\text{Pieza}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cono}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 602{,}88 \text{ cm}^3$$

Volumen total de las piezas: $V = 602{,}88 \cdot 3\,000 = 1\,808\,640$ cm^3

Masa: $M = 1\,808\,640 \cdot 8 = 14\,469\,120$ g

064 ●●

Calcula el volumen de un cono de altura 36 cm y diámetro de la base $\frac{2}{3}$ de la altura.

Altura: 36 cm → Diámetro: 24 cm $\quad V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 36 = 5\,425{,}92$ cm^3

065 ●●

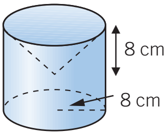
Un cilindro tiene como diámetro de la base 6 cm y una altura de 10 cm. Determina el volumen de un cono de igual altura y base circular equivalente.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 94{,}2 \text{ cm}^3$$

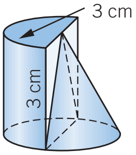
066 ●●●

Calcula el volumen de las figuras.

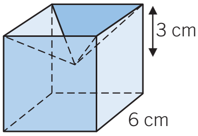
a)



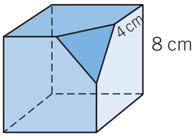
b)



c)



d)



a) $V = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cono}} = \pi \cdot 8^2 \cdot 16 - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 8 = 2\,679{,}47$ cm^3

b) $\dfrac{\text{Circunferencia}}{2} = \pi r \rightarrow \pi r = 3 \rightarrow r = 0{,}96$ cm

$$V = \frac{V_{\text{Cilindro}}}{2} - \frac{V_{\text{Cono}}}{2} = \frac{\pi \cdot 0{,}96^2 \cdot 3}{2} + \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}96^2 \cdot 3}{2} = 5{,}79 \text{ cm}^3$$

c) El volumen de la pirámide es la sexta parte del volumen del cubo:

$$V = 6^3 - \frac{6^3}{6} = 180 \text{ cm}^3$$

d) El volumen de la figura es el volumen de un cubo menos el volumen de una pirámide triangular cuya base es un triángulo rectángulo de lado 4 cm y altura 4 cm:

$$V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 8^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 4 = 64 - 10{,}67 = 53{,}33 \text{ cm}^3$$

067 ● **Halla el volumen de una esfera de 15 cm de radio.**

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 14\,130 \text{ cm}^3$$

068 ●● **El diámetro de la base y la altura de un cilindro miden 16 cm. Obtén el volumen comprendido entre el cilindro y la esfera inscrita en él.**

Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi \cdot 8^2 \cdot 16 = 3\,215{,}36 \text{ cm}^3$

Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = 2\,143{,}57 \text{ cm}^3$

El volumen comprendido es: $3\,215{,}36 - 2\,143{,}57 = 1\,071{,}79 \text{ cm}^3$

069 ●● **Calcula y contesta.**

a) ¿Cuál es el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 14 cm?

b) ¿Cuántos centilitros de agua caben en esta esfera?

c) ¿Cuántos centigramos pesa el agua que cabe en la esfera?

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = 1\,436{,}03 \text{ cm}^3$

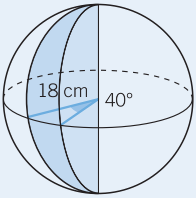
b) En la esfera caben: $1\,436{,}03 : 10 = 143{,}603$ cl

c) El agua de la esfera pesa: $1\,436{,}03 \cdot 100 = 143\,603$ cg

070 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE UN SECTOR ESFÉRICO?

La porción de una esfera limitada por dos semicírculos cuyo diámetro es el de la esfera se llama sector esférico. ¿Cuál es el volumen de este sector esférico?



PRIMERO. Se calcula el volumen de la esfera.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 18^3 = 24\,416{,}64 \text{ cm}^3$$

SEGUNDO. Se plantea una regla de tres en función de los grados que tenga el sector esférico.

$$\text{Si a } 360° \xrightarrow{\text{le corresponden}} 24\,416{,}64 \text{ cm}^3$$

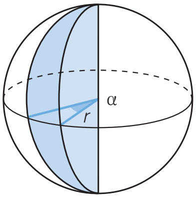
$$\text{a } 40° \xrightarrow{\text{le corresponderán}} x \text{ cm}^3$$

$$x = \frac{40 \cdot 24\,416{,}64}{360} = 2\,712{,}96 \text{ cm}^3$$

Volumen de cuerpos geométricos

071 ●●

Calcula el volumen de estos sectores esféricos.



a) $r = 8$ **cm** $\alpha = 36°$

b) $r = 5$ **m** $\alpha = 120°$

c) $r = 10$ **dam** $\alpha = 90°$

d) $r = 12$ **cm** $\alpha = 150°$

a) $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = 2\,143{,}57\text{ cm}^3$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 36}{360} = 214{,}357\text{ cm}^3$$

b) $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}33\text{ m}^3$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 120}{360} = 174{,}44\text{ m}^3$$

c) $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,186{,}67\text{ dam}^3$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 90}{360} = 1\,046{,}67\text{ dam}^3$$

d) $V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 7\,234{,}56\text{ cm}^3$

$$V_{\text{Sector}} = \frac{V_{\text{Esfera}} \cdot 150}{360} = 3\,014{,}4\text{ cm}^3$$

072 ●●●

Una naranja de 10 cm de diámetro tiene 8 gajos iguales. Calcula el volumen de cada gajo.

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}33\text{ cm}^3 \qquad V_{\text{Gajo}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{8} = 65{,}42\text{ cm}^3$$

073 ●●

El consumo anual de agua en una vivienda ha sido de 140 m^3 256 dm^3. ¿Cuánto tienen que pagar si el metro cúbico cuesta 0,90 €?

El consumo anual es de 140 m^3 256 dm^3 = 140,256 m^3.

Por tanto, el gasto anual es: $140{,}256 \cdot 0{,}90 = 126{,}23$ €

074 ●●

Un bote lleno de agua destilada pesa 380 g y vacío pesa 20 g. ¿Cuál es su capacidad en decilitros y en centilitros?

El peso del agua que hay en el bote es $380 - 20 = 360$ g, por lo que su capacidad es 360 ml = 36 cl = 3,6 dl.

075 ●● **Un grifo vierte 80 litros por hora y tarda 1 hora y 36 minutos en llenar una barrica. ¿Qué volumen tiene la barrica?**

Los litros que caben en la barrica son $80 \cdot 1{,}6 = 128$ litros, siendo el volumen de la barrica de 128 dm^3.

076 ●● **Una bomba de agua que achica 30 dm^3/min, tarda 2 horas y media en vaciar un depósito. ¿Cuántos litros caben en el depósito?**

Los litros de agua que desaloja son $30 \cdot 150 = 4\,500$ litros, que es la capacidad del depósito.

077

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN PROBLEMAS DE LLENADO Y VACIADO CON DISTINTAS UNIDADES?

Un grifo mana 140 ℓ/mm. ¿Cuánto tarda en llenar un depósito de 9 m^3 800 dm^3?

PRIMERO. Se transforman todas las cantidades a las mismas unidades.

Se transforma en dm^3:

Grifo ⟶ 140 ℓ/min = 140 dm^3/min

Depósito → $9\ m^3 + 800\ dm^3 = (9 \cdot 1\,000)\ dm^3 + 800\ dm^3 = 9\,800\ dm^3$

SEGUNDO. Se resuelve la regla de tres.

$$\text{Si} \quad 140\ dm^3 \xrightarrow{\text{se llenan en}} 1\ \text{min}$$

$$9\,800\ dm^3 \xrightarrow{\text{se llenarán en}} x\ \text{min}$$

$$x = \frac{1 \cdot 9\,800}{140} = 70\ \text{min}$$

078 ●● **Un grifo mana 24,1 ℓ/min. ¿Cuánto tarda en llenar un depósito de 24,75 m^3 160 dm^3?**

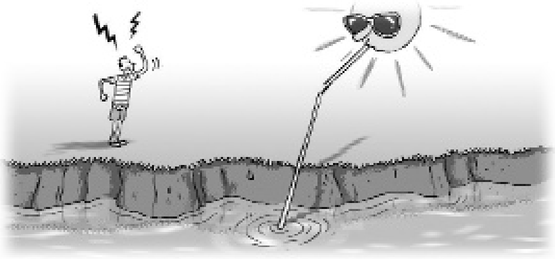
La capacidad del depósito es de 24 m^3 910 dm^3 = 24 910 litros.

Tardará en llenarse: 24 910 : 24,1 = 1 033,61 minutos

079 ●● **El desagüe de un estanque de 180 dm^3 desaloja 35 ℓ/min. ¿Cuánto tardará en vaciarse?**

Tardará en vaciarse: 180 : 35 = 5,14 minutos

080 ●● **Un pantano contiene 3 542 millones de m^3 de agua. En verano pierde 875 000 ℓ por día.**



a) ¿Cuántos m^3 perderá en 60 días?

b) ¿Cuántos m^3 le quedarán después de 20 días?

a) 875 000 litros = 875 m^3

En 60 días perderá: $875 \cdot 60 = 52\,500$ m^3

b) Después de 20 días quedarán:

$3\,542\,000\,000 - 875 \cdot 20 = 3\,541\,982\,500$ m^3

081 ●● **En un depósito caben 2 700 ℓ de agua. Si un grifo tarda en llenarlo 45 minutos, ¿cuántos metros cúbicos mana por minuto?**

Consideramos que 2 700 litros equivalen a 2,7 m^3.

En un minuto mana: $2{,}7 : 45 = 0{,}06$ m^3/min

082 ●● **Una piscina tiene 25 m de largo, 12 m de ancho y 1,6 m de profundidad. ¿Cuánto tiempo tarda en llenarla un grifo que vierte 100 ℓ/min?**

El volumen de la piscina es: $25 \cdot 12 \cdot 1{,}6 = 480$ m^3 = 480 000 dm^3

Tardará en llenarse: $480\,000 : 100 = 4\,800$ minutos = 80 horas

083 ●● **¿Cuántas cajas de 1 m de largo, 8 dm de ancho y 6 dm de altura se pueden apilar en una sala de 4 × 3,2 m de planta y 2,4 m de altura?**

Volumen de cada caja: $V_{\text{Caja}} = 1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$ m^3

Volumen de la sala: $V_{\text{Sala}} = 4 \cdot 3{,}2 \cdot 2{,}4 = 30{,}72$ m^3

El número de cajas que podemos almacenar es: $30{,}72 : 0{,}48 = 64$ cajas

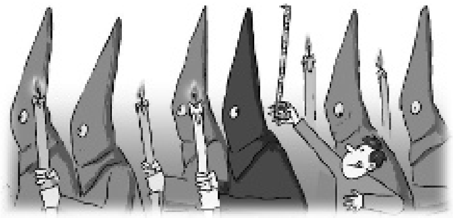
084 ●● **En un día las precipitaciones de lluvia fueron de 60 ℓ/m^2. ¿Qué altura alcanzó el agua en un recipiente cúbico de 2 dm de arista?**

El agua que recogió el recipiente fue:

$$\left.\begin{array}{l} 60\ \ell \longrightarrow 1\,000\ \text{dm}^2 \\ x\ \ell \longrightarrow 4\ \text{dm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0{,}24\ \ell$$

La altura que alcanzó es: $V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow 0{,}24 = 4 \cdot h \rightarrow h = 0{,}06$ dm = 6 mm

085 ●● **Halla el volumen del capirote de un cofrade de Semana Santa, sabiendo que tiene 9 cm de radio y 60 cm de altura.**



$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 60 = 5\,086,8 \text{ cm}^3$

086 ●● **Para inflar 200 balones de radio 12 cm, ¿qué volumen de aire se necesita?**

Volumen de un balón:

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 7\,234,56 \text{ cm}^3$

Volumen de 200 balones:

$V = 7\,234,56 \cdot 200 = 1\,446\,912 \text{ cm}^3$

087 ●● **Calcula el volumen de material que se necesita para fabricar un balón de 15 cm de radio y 1 cm de espesor.**

El volumen de material que se necesita es igual al volumen de la esfera exterior menos el volumen de la esfera interior.

$V = V_{\text{Exterior}} - V_{\text{Interior}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (15^3 - 14^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 631 = 2\,641,79 \text{ cm}^3$

088 ●●● **El radio de la Tierra mide 6 370 km y el de Marte mide 3 400 km.**

a) ¿Cuántas veces es mayor el radio de la Tierra que el de Marte?

b) ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la Tierra que el de Marte?

a) El radio de la Tierra es:

$\frac{6\,370}{3\,400} = 1,87$ veces mayor que el de Marte

b) Volumen de la Tierra: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6\,370^3 = 1\,082\,148\,051\,226,67 \text{ km}^3$

Volumen de Marte: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3\,400^3 = 164\,552\,746\,666,67 \text{ km}^3$

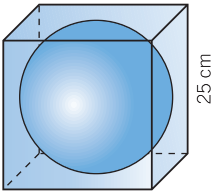
$\frac{1\,082\,148\,051\,226,67}{164\,552\,746\,666,67} = 6,58$

El volumen de la Tierra es 6,58 veces mayor que el de Marte.

Volumen de cuerpos geométricos

089 ●●●

Una empresa que fabrica bolas de cristal las envasa como ves en la figura.



a) Halla el volumen comprendido entre el cilindro del envase y la bola inscrita en él.

b) Si se rellena el hueco entre la bola y el envase con un material que cuesta 4,50 €/m³, ¿cuánto costará el relleno de 200 envases?

c) Contesta a las preguntas anteriores, suponiendo que el envase fuera un cilindro de radio 13 cm y altura 25 cm.

d) ¿Cuál de las dos opciones es más económica?

a) $V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Esfera}} = 25^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12{,}5^3 = 7\,447{,}92 \text{ cm}^3 = 0{,}00744792 \text{ m}^3$

b) El coste es: $200 \cdot 4{,}50 \cdot 0{,}00744792 = 6{,}70$ €

c) $V = V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Esfera}} = \pi \cdot 13^2 \cdot 25 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12{,}5^3 =$

$= 5\,089{,}42 \text{ cm}^3 = 0{,}00508942 \text{ m}^3$

El coste es: $200 \cdot 4{,}50 \cdot 0{,}00508942 = 4{,}58$ €

d) Es más económica la opción del cilindro.

090 ●●●

Un cono de 3 m de altura y una esfera de 3 m de radio tienen el mismo volumen. ¿Cuál es el radio de la base del cono?

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{Cono}} &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3 \\ V_{\text{Esfera}} &= \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \to r^2 = 12 \to r = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ cm}$$

091 ●●●

Si un cono y un cilindro tienen igual base y volumen, ¿qué relación hay entre sus alturas?

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{Cono}} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{\text{Cilindro}} &= \pi r^2 H \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r^2 H \to h = 3H$$

La altura del cono es el triple de la altura del cilindro.

092 ●●●

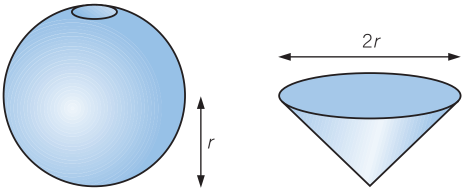
Un cono y un cilindro tienen la misma altura y volumen. ¿Qué relación existe entre los diámetros de sus bases?

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{Cono}} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{\text{Cilindro}} &= \pi R^2 h \end{aligned}\right\} \to \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi R^2 H \to r^2 = 3R^2 \to r = \sqrt{3}R$$

El diámetro del cono es $\sqrt{3}$ del diámetro del cilindro.

093 ●●●

El radio del cono de la figura es igual que su altura y ambos segmentos son idénticos al radio de la esfera. ¿Cuántos conos de agua se necesitan para llenar la esfera?



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 r \\[2ex] V_{\text{Esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{V_{\text{Esfera}}}{V_{\text{Cono}}} = \frac{\dfrac{4}{3}\pi r^3}{\dfrac{1}{3}\pi r^3} = 4$$

Se necesitan 4 conos de agua para llenar la esfera.

094 ●●●

¿Cuántas veces aumenta el volumen de un prisma hexagonal si duplicamos su altura? ¿Y si duplicamos las dimensiones de la base?
¿Y si duplicamos sus tres dimensiones?

- Volumen del prisma original:

$$V = A_{\text{Base1}} \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h$$

- Volumen del prisma con doble altura:

$$V_1 = A_{\text{Base1}} \cdot 2 \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot 2 \cdot h = P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con doble altura es el doble del original.

- Volumen del prisma con doble base:

$$V_2 = A_{\text{Base2}} \cdot h = \frac{(2 \cdot P) \cdot (2 \cdot a)}{2} \cdot h = 2 \cdot P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con doble base es el cuádruple del original.

- Volumen del prisma con dimensiones duplicadas:

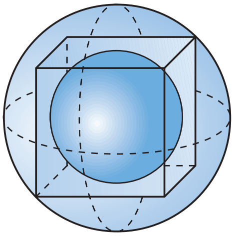
$$V_2 = A_{\text{Base2}} \cdot 2 \cdot h = \frac{(2 \cdot P) \cdot (2 \cdot a)}{2} \cdot 2 \cdot h = 4 \cdot P \cdot a \cdot h$$

El volumen del prisma con sus dimensiones duplicadas es 8 veces mayor que el original.

Volumen de cuerpos geométricos

095 ●●●

Dentro de una esfera está inscrito un cubo y, dentro de él, hay inscrita una esfera. ¿Qué relación existe entre el volumen de la esfera interior y la exterior?



Radio de la esfera exterior: r

Lado del cubo: l

Diagonal del lado del cubo: $\sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l$

Diagonal del cubo: $\sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l$

El diámetro de la circunferencia coincide con la diagonal del cubo:

$$2r = \sqrt{3}l \to l = \frac{2}{\sqrt{3}}r$$

Radio de la circunferencia menor: $r' = \frac{l}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}r$

Volumen de la esfera mayor: $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

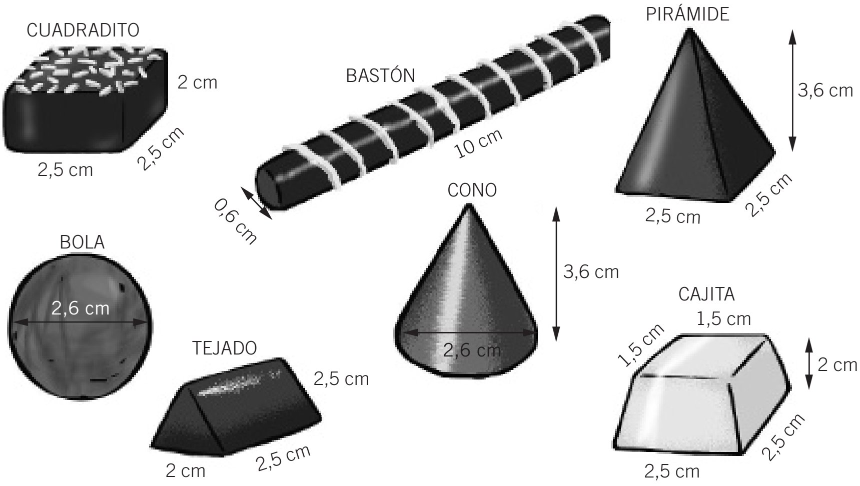
Volumen de la esfera menor: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)^3$

Relación entre los volúmenes: $\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)^3} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

096 ●●●

Los Bombones Bombay cuidan mucho el diseño de los bombones que fabrican. Por eso, dan una especial importancia a la forma de los bombones.



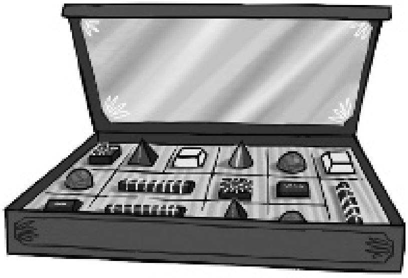
Eres capaz de… Comprender

a) Si los bombones son macizos, ¿qué cantidad de chocolate se necesita para fabricar un bombón *cuadradito*? ¿Y un bombón *bastón*?

Eres capaz de… Resolver

b) Si esta es la caja en la que se comercializan los bombones:

¿Cuántos litros de chocolate se necesitan para cada caja de bombones?



Eres capaz de… Decidir

c) ¿Se podrían colocar los bombones de otra manera para que las dimensiones de la caja fuesen menores?

a) • Bombón *cuadradito*: $V = 2{,}5^2 \cdot 2 = 12{,}5$ cm^3 de chocolate

• Bombón *bastón*: $V = \pi \cdot 0{,}3^2 \cdot 10 = 2{,}83$ cm^3 de chocolate

b) • Volumen del bombón *pirámide*: $V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5^2 \cdot 3{,}6 = 7{,}5$ cm^3

• Volumen del bombón *bastón*: $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 2{,}83$ cm^3

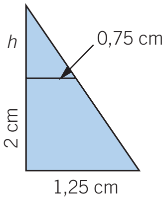
• Volumen del bombón *tejado*:

$$a = \sqrt{2{,}5^2 - 1^2} = 2{,}29 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{2 \cdot 2{,}29}{2} \cdot 2{,}5 = 5{,}73 \text{ cm}^3$$

• Volumen del bombón *cono*: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}3^2 \cdot 3{,}6 = 6{,}37$ cm^3

• Volumen del bombón *cajita*:

El volumen del tronco de pirámide es el volumen total de la pirámide menos el volumen de la pirámide que se le ha quitado.



Como los triángulos son semejantes, se cumple:

$$\frac{1{,}25}{h+2} = \frac{0{,}75}{h} \rightarrow 1{,}25h = 0{,}75h + 1{,}5 \rightarrow h = 3 \text{ cm}$$

$$V_7 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}5^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 8{,}17 \text{ cm}^3$$

La caja de bombones tiene 2 bombones *cuadradito*, 2 *pirámide*, 3 *bastón*, 2 *tejado*, 1 *cono* y 2 *cajita*.

$$V = 2 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 7{,}5 + 3 \cdot 9{,}2 + 3 \cdot 2{,}83 + 2 \cdot 5{,}73 + 6{,}37 + 2 \cdot 8{,}17 = $$
$$= 110{,}26 \text{ cm}^3$$

Se necesitan:

110,26 cm^3 = 0,11026 dm^3 = 0,11026 *l* de chocolate

c) Longitud mínima de la parte de arriba:

$4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,6 = 15,2$ cm

Longitud mínima de la parte de abajo:

$2 \cdot 2,5 + 10 + 2,6 + 0,6 = 18,2$ cm

Anchura mínima de la parte izquierda: $2,5 + 2,6 + 2 = 7,1$ cm

Anchura mínima de la parte derecha: $10 + 2,5 = 12,5$ cm

Área mínima de la caja: $18,2 \cdot 12,5 = 227,5$ cm^2

Una manera de disminuir las dimensiones de la caja sería:

Agrupar los 3 *bastones* en paralelo, con lo cual la anchura de la caja serían 10 cm y agrupar el resto de bombones junto a ellos. Por columnas, podemos agrupar las 3 *bolas*, en la siguiente columna los 2 *cuadraditos* y el *cono*, en la siguiente, las 2 *pirámides* y 1 *tejado*, y en la última columna, el otro *tejado* y las 2 *cajitas*.

La longitud de la caja sería: $3 \cdot 0,6 + 2,6 + 2,6 + 2,5 + 2,5 = 12$ cm

Así, el área de la caja se reduciría a: $10 \cdot 12 = 120$ cm^2

097 ●●●

En una famosa cadena de restaurantes anuncian la siguiente oferta:

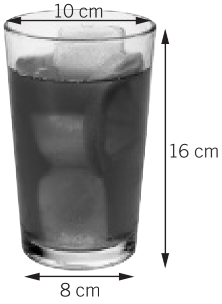
En esta oferta usan vasos como el que ves en el cartel, con forma de cono cortado por un plano paralelo a la base.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Si el vaso fuera un cilindro, con diámetro de la base 10 cm y altura 16 cm, ¿qué capacidad tendría? ¿Y si fuese un cono con las mismas medidas?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Si las medidas del vaso son las que figuran en la fotografía y lo llenamos por completo, ¿qué capacidad tendrá el vaso?



ERES CAPAZ DE… DECIDIR

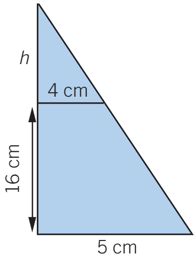
c) En cada vaso se introducen ocho hielos cúbicos de 3 cm de lado y, después, se llena el vaso de refresco hasta 2 cm del borde.

Teniendo en cuenta que del volumen de los hielos flota en el refresco, quedando $\frac{1}{10}$ fuera del vaso, ¿es cierto lo que se afirma en el anuncio?

a) $V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 16 = 1\,256 \text{ cm}^3 = 1{,}256\ \ell$

$V_{\text{Cono}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 16 = 418{,}67 \text{ cm}^3 = 0{,}41867\ \ell$

b)



Como los triángulos son semejantes:

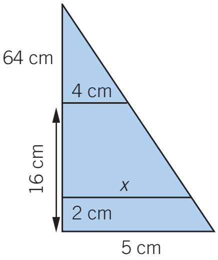
$$\frac{5}{h+16} = \frac{4}{h} \rightarrow 5h = 4h + 64 \rightarrow h = 64 \text{ cm}$$

El volumen del tronco de cono es igual al volumen del cono total menos el cono que hemos cortado:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (16 + 64) - \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 64 = 1\,021{,}55 \text{ cm}^3 =$$
$$= 1{,}02155\ \ell$$

El vaso, lleno al completo, tiene una capacidad de, prácticamente, 1 litro.

c)



Como los triángulos son semejantes:

$$\frac{4}{x} = \frac{64}{78} \rightarrow x = 4{,}875 \text{ cm}$$

Volumen del vaso: $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4{,}875^2 \cdot 78 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 64 = 868{,}44 \text{ cm}^3$

Volumen de los cubitos: $8 \cdot 3^3 = 216 \text{ cm}^3$

Volumen sumergido de los cubitos: 90 % de $216 = 194{,}4 \text{ cm}^3$

El volumen de refresco es: $868{,}44 - 194{,}4 = 674{,}04 \text{ cm}^3 = 0{,}67404\ \ell$

El refresco que contiene el vaso es algo más de medio litro.

13

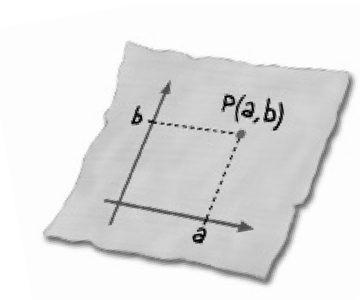
Funciones

El ingenio y la espada

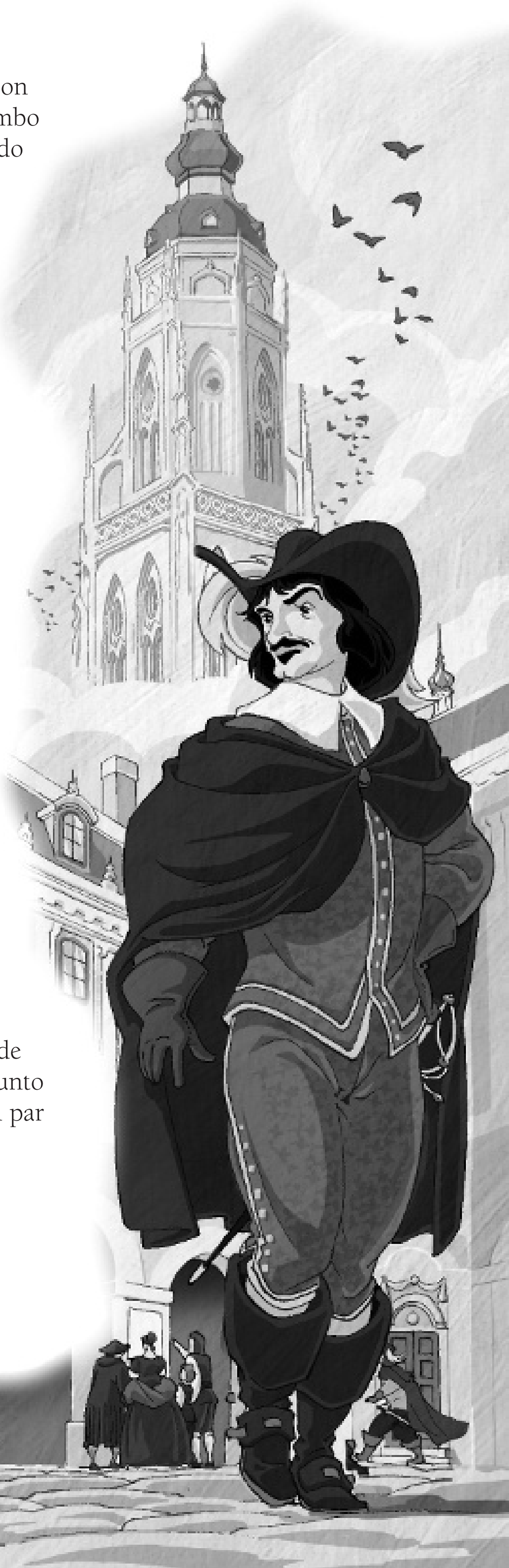
René, un joven soldado, que en 1618 contaba con 22 años, paseaba por la ciudad de Breda sin rumbo fijo. Había decidido viajar para conocer el mundo y no se arrepentía lo más mínimo de haberlo hecho como soldado de fortuna. Podía alquilar su espada o su ingenio; nadie preguntaba por la espada y, sin embargo, se exigía prueba del ingenio.

Al llegar a una plaza le llamó la atención un grupo de gente que se agolpaba frente una fachada, queriendo leer un cartel que había pegado en ella. La curiosidad pudo con él y, desconociendo el idioma, pidió que lo tradujeran al francés o al latín. Se encontró con un problema matemático por cuya resolución ofrecía una recompensa un tal Beeckman, científico de renombre en el país.

Al día siguiente se presentó en su casa con la solución al problema. Beeckman se sorprendióal ver al soldado; sin embargo, al leer la solución volvió a mirar al joven y ya no vio la espada, sino su enorme talento.



El joven era René Descartes y su ingenio le hizo inmortal. A él deben su nombre los diagramas cartesianos, donde sustituye cada punto del plano por un par de números que lo identifican.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Busca información sobre la vida de René Descartes, famoso matemático del siglo XVII.**

Se puede encontrar información sobre la vida de René Descartes en este enlace:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/descartes.htm

En la siguiente página web se puede completar la biografía de este matemático:
http://www.astroseti.org/articulo/3548/biografia-de-rene-descartes/

2 **Investiga sobre el episodio que narra el texto y los trabajos que hicieron juntos Descartes y Beeckman.**

En esta página web se puede obtener más información sobre la vida de Descartes y también sobre los trabajos que realizó con Beekman:
http://www.webdianoia.com/moderna/descartes/desc_bio.htm

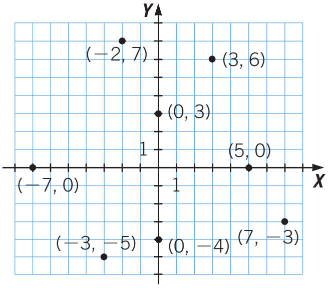
3 **¿Cuáles fueron los trabajos más importantes que realizó Descartes relacionados con las matemáticas?**

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Descartes y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Descartes.asp

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas.**

a) (3, 6)
b) (7, −3)
c) (0, 3)
d) (0, −4)
e) (−2, 7)
f) (−3, −5)
g) (−7, 0)
h) (5, 0)



2 **Decide si las siguientes magnitudes son directa o inversamente proporcionales.**

a) El número de entradas que se compran para ir al cine y su precio.

b) La velocidad que lleva un coche y el tiempo que tarda en recorrer un trayecto.

c) El número de personas que realizan un trabajo y el tiempo que tardan en terminarlo.

a) A doble, triple,… número de entradas, le corresponde doble, triple,… precio. Son magnitudes directamente proporcionales.

b) A doble, triple,… velocidad, le corresponde la mitad, un tercio,… de tiempo. Son magnitudes inversamente proporcionales.

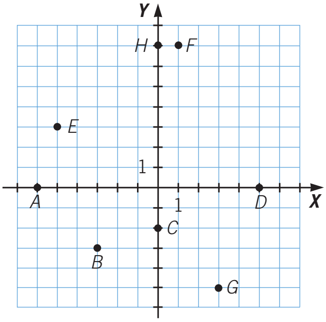
c) A doble, triple,… número de personas, le corresponde la mitad, un tercio,… de tiempo. Son magnitudes inversamente proporcionales.

Funciones

EJERCICIOS

001 **Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Cuántos hay en cada cuadrante?**

$A(-6, 0)$	**$E(-5, 3)$**
$B(-3, -3)$	**$F(1, 7)$**
$C(0, -2)$	**$G(3, -5)$**
$D(5, 0)$	**$H(0, 7)$**



Primer cuadrante: *F*

Segundo cuadrante: *E*

Tercer cuadrante: *B*

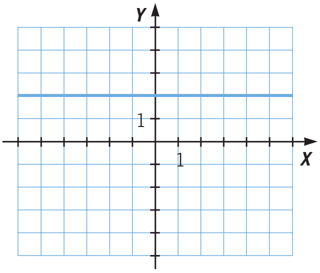
Cuarto cuadrante: *G*

002 **Dado el punto $P(x, y)$, con $x > 0$ e $y < 0$, ¿en qué cuadrante estará representado? Pon un ejemplo.**

Los puntos de este tipo están en el cuarto cuadrante, por ejemplo (4, −3).

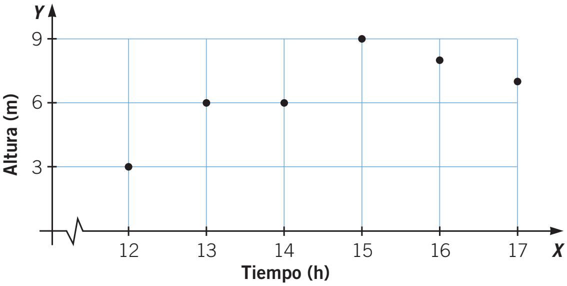
003 **Representa todos los puntos cuya ordenada sea 2. ¿Qué observas?**

Es una recta horizontal.



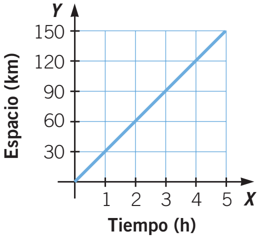
004 **Estudia si estos valores son de una función.**

Tiempo (h)	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Altura (m)	**3**	**6**	**6**	**9**	**8**	**7**



Puede ser una función, porque a cada valor de *x* solo le corresponde un valor de *y*.

005 **¿Representa esta gráfica a una función?**



Sí, porque a cada valor de *x* solo le corresponde un valor de *y*.

006 **Cada kilo de fruta cuesta 2,50 €. En la función que relaciona cada peso con su precio, halla el valor de *y* para 2, 4, 6, 8 y 10 kilos.**

Peso (kg)	2	4	6	8	10
Precio (€)	5	10	15	20	25

007 **Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no.**

a) Título de un libro y número de páginas.

b) Velocidad y tiempo en recorrer un trayecto.

c) Hora del día y longitud de una sombra.

a) No es una función.

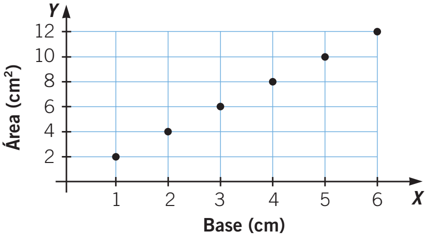
b) Es una función.

c) Es una función.

008 **En esta tabla de valores se relaciona la base con el área de un rectángulo de altura 2 cm.**

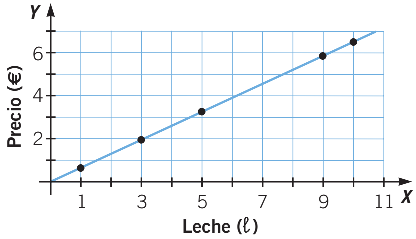
Base (cm)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Área (cm²)	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**

Representa los valores gráficamente.

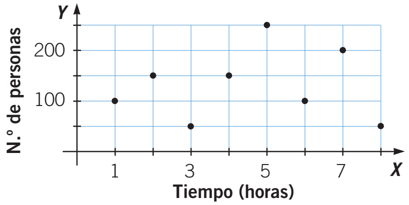


009 **Copia y completa la tabla, y representa la función que relaciona las magnitudes.**

Leche (ℓ)	**1**	**3**	**5**	**9**	**10**
Precio (€)	**0,65**	1,95	3,25	5,85	6,50



010 **Esta gráfica relaciona las horas transcurridas desde la apertura de una exposición con el número de personas que asisten. Forma la tabla de valores correspondiente.**



Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	6	7	8
N.º de personas	100	150	50	150	250	100	200	50

011 **Pon un ejemplo de una función expresada mediante una tabla de valores, y en cuya representación gráfica estén unidos sus puntos.**

Por ejemplo, la función que relaciona el área de un cuadrado y su lado.

Lado (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (cm^2)	1	4	9	16	25	36	49	64

012 **Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5:**

a) Halla su expresión algebraica. **b) Calcula $f(2)$ y $f(0)$.**

a) $y = \frac{x}{4} + 5$

b) $f(2) = \frac{2}{4} + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$ $f(0) = \frac{0}{4} + 5 = 5$

013 **Dada la función que asocia a cada número su triple menos 7 unidades:**

a) Halla su expresión algebraica. **b) Calcula $f(3)$ y $f(5)$.**

a) $y = 3x - 7$

b) $f(3) = 3 \cdot 3 - 7 = 9 - 7 = 2$ $f(5) = 3 \cdot 5 - 7 = 15 - 7 = 8$

014 **Expresa la relación que existe entre el lado de un cuadrado y su área, mediante una expresión algebraica.**

Si el lado es x y el área es y, la relación es $y = x^2$.

015 **La función que relaciona cada hora con su temperatura ambiental no tiene expresión algebraica. Razónalo. ¿Puedes poner otro ejemplo de función similar?**

No tiene expresión algebraica porque la temperatura no es predecible en función del tiempo.

Otro ejemplo sería la función que relaciona la edad con el peso de una persona.

016 **Determina si es continua la función que relaciona la edad con el peso de una persona. Algunos pares de valores vienen recogidos en la siguiente tabla:**

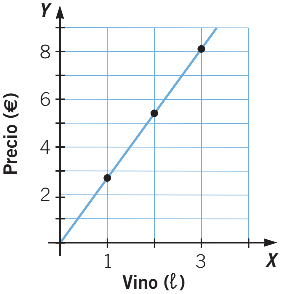
Edad (años)	0,5	1	2	5	8	11
Peso (kg)	5	6	9	15	21	34

Es una función continua, porque para cualquier edad se puede obtener un peso.

017 **En un almacén se vende el litro de vino a 2,70 €. Expresa esta situación con una función, dibuja la gráfica y determina si es continua.**

La función es $f(x) = 2{,}70x$.

Es una función continua.



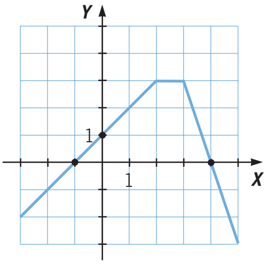
018 **Pon un ejemplo de función continua y otra con puntos de discontinuidad.**

Ejemplo de función continua: el precio de la carne dependiendo de su peso.

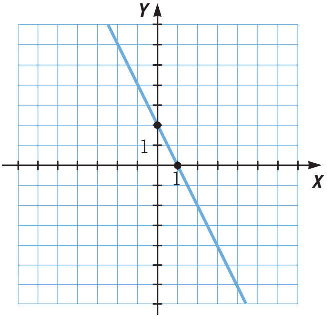
Ejemplo de función con puntos de discontinuidad: el coste de una llamada de teléfono dependiendo de su duración (si se tarifa por minutos).

019 **Determina los puntos de corte con los ejes de esta función.**

- Puntos de corte con el eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$
- Punto de corte con el eje Y: $(0, 1)$



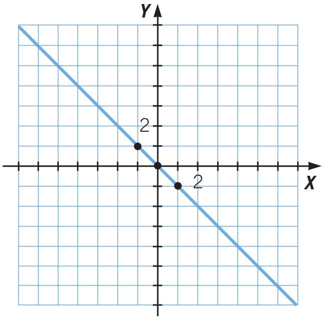
020 **Representa la función $y = -2x + 2$, y halla sus puntos de corte con los ejes.**



Puntos de corte

- Con el eje de abscisas:
  $y = 0 \rightarrow 0 = -2x + 2 \rightarrow x = 1$
  La recta corta al eje X en el punto (1, 0).
- Con el eje de ordenadas:
  $x = 0 \rightarrow y = -2 \cdot 0 + 2 \rightarrow y = 2$
  La recta corta al eje Y en el punto (0, 2).

021 **Representa la función $y = -x$. Obtén los puntos de corte con los ejes.**

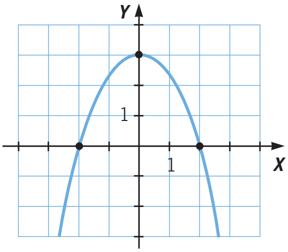


Puntos de corte

- Con el eje de abscisas:
  $y = 0 \rightarrow 0 = -x \rightarrow x = 0$
  La recta corta al eje X en el punto (0, 0).
- Con el eje de ordenadas:
  $x = 0 \rightarrow y = 0$
  La recta corta al eje Y en el punto (0, 0).

022 **Dibuja la gráfica de una función continua que corte dos veces al eje X y una vez al eje Y.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

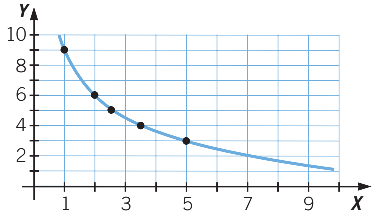


023 **¿Cuántos puntos de corte con el eje X tiene una función del tipo $y = x + a$? ¿Y con el eje Y?**

La función cortará una vez al eje X y otra vez al eje Y.

024 **Dibuja una gráfica que no tenga puntos de corte con los ejes.**

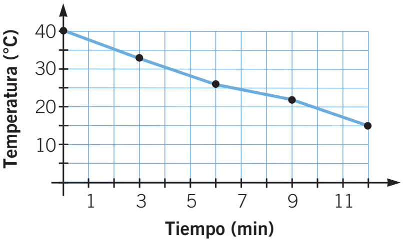
Respuesta abierta. Por ejemplo:



025 **Representa la evolución de la temperatura de una taza de café a lo largo del tiempo.**

Tiempo (min)	0	3	6	9	12
Temperatura (°C)	40	33	26	22	15

Indica cuándo crece y decrece la función.



La función es siempre decreciente.

026 **Un globo aerostático registra la temperatura del aire en función de la altitud.**

Altitud (km)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	16	6	2	−1	−4	−6

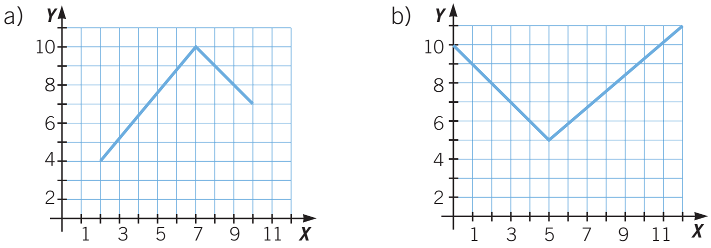
Estudia si es creciente o decreciente.

La función es siempre decreciente.

027 **Dibuja una función para cada una de las condiciones.**

a) Crece de $x = 2$ hasta $x = 7$, y decrece de $x = 7$ hasta $x = 10$.

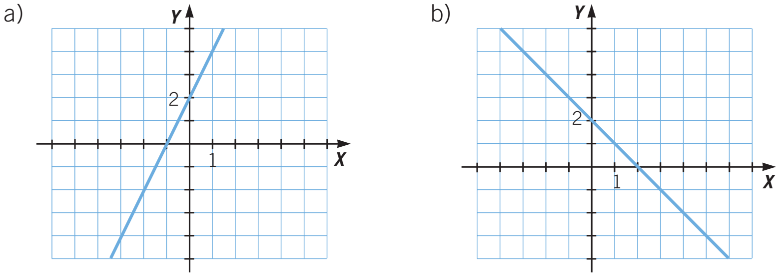
b) Decrece de $x = 0$ hasta $x = 5$, y crece de $x = 5$ hasta $x = 12$.



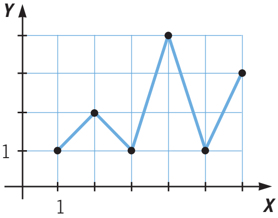
028 **Representa la gráfica de una función que cumpla que:**

a) Siempre sea creciente.

b) Siempre sea decreciente.



029 **Indica los máximos y los mínimos de la siguiente función:**



Máximos: (2, 2) y (6, 3)

Mínimos: (3, 1) y (5, 1)

030 **Los datos de la tabla muestran la velocidad de un motorista en función del tiempo transcurrido.**

Tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
Velocidad (km/h)	0	45	90	45	60	30

Encuentra sus máximos y mínimos.

Máximos: (10, 90) y (20, 60) Mínimo: (15, 45)

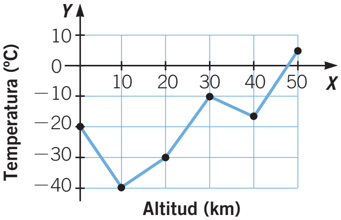
031 **Representa gráficamente los datos de esta tabla, y encuentra sus máximos y mínimos tanto absolutos como relativos.**

Altitud (km)	0	10	20	30	40	50
Temperatura (°C)	−20	−40	−30	−10	−18	5

Mínimos relativos: (10, −40) y (40, −18)

De ellos, el mínimo absoluto es (10, −40).

Máximo relativo y absoluto: (30, −10)



032 **Dibuja la gráfica de una función que tenga:**

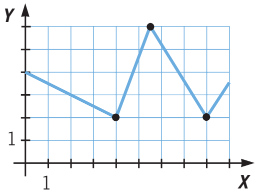
a) Un máximo y dos mínimos.

b) Un máximo y ningún mínimo.

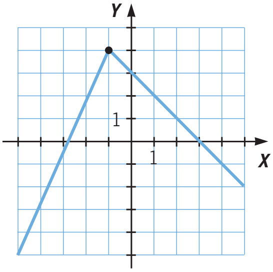
c) Ningún máximo ni mínimo.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

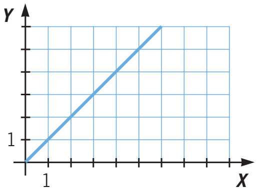
a)



b)



c)



033 **Un litro de un refresco cuesta 1,25 €.**

a) Haz una tabla que relacione el precio en función de los litros.

b) Averigua la expresión algebraica de la función.

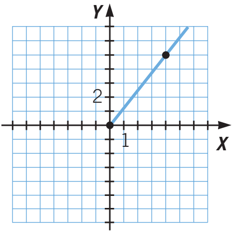
c) Representa gráficamente la función.

a)

N.º de litros	1	2	3	4	5	6
Precio (€)	1,25	2,50	3,75	5	6,25	7,50

b) $\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{5}{4}x$

c)

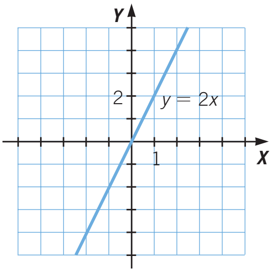


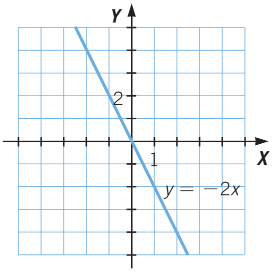
034 **Queremos colocar un tendido eléctrico y cada metro de cable pesa 3 kg. Averigua la expresión algebraica de la función.**

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6
Peso (kg)	3	6	9	12	15	18

$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = 3x$

035 **Representa las funciones $y = 2x$ e $y = -2x$. Estudia y compara su crecimiento.**

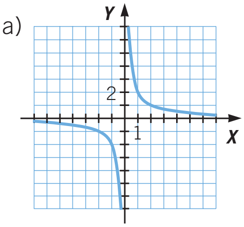


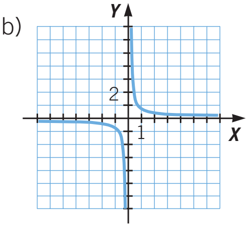


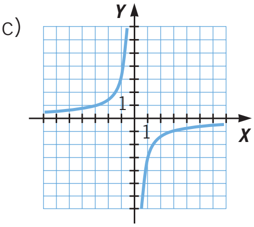
La función $y = 2x$ es creciente y la función $y = -2x$ es decreciente. Ambas son funciones de proporcionalidad directa.

036 **Representa las siguientes funciones.**

a) $y = \frac{2}{x}$ **b)** $y = \frac{20}{x}$ **c)** $y = -\frac{3}{x}$







037 **En un trayecto, a una velocidad de 2 km/h, tardo 1,5 h. ¿Cuánto tardaré a 15 km/h?**

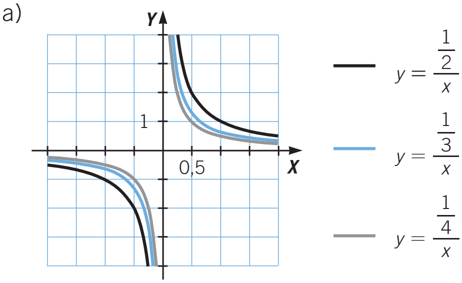
Velocidad	Tiempo
2 ⟶	1,5
15 ⟶	x

$$\left.\begin{matrix} 2 \longrightarrow 1{,}5 \\ 15 \longrightarrow x \end{matrix}\right\} \rightarrow x \cdot 15 = 2 \cdot 1{,}5 \rightarrow x = 0{,}2 \text{ h} = 12 \text{ min}$$

038 **Dadas las funciones:** $y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$ $y = \frac{\frac{1}{3}}{x}$ $y = \frac{\frac{1}{4}}{x}$

a) Representa estas funciones en el mismo sistema de coordenadas cartesianas.

b) ¿Qué gráfica está por encima de las otras?



b) La gráfica que está por encima de las otras es:

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{x}$$

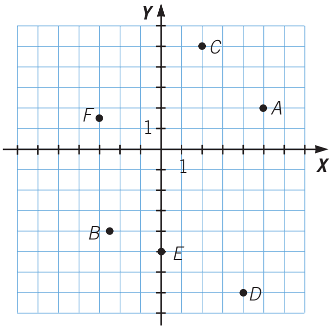
ACTIVIDADES

039 ● **Dibuja unos ejes cartesianos en un papel cuadriculado y representa estos puntos:**

A(5, 2) **D(4, −7)**

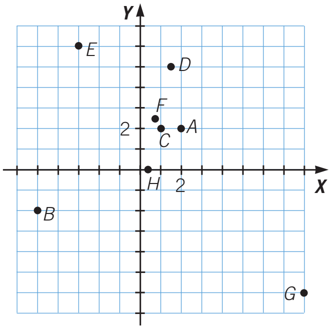
B $\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ **E(0, −5)**

C(2, 5) **F** $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

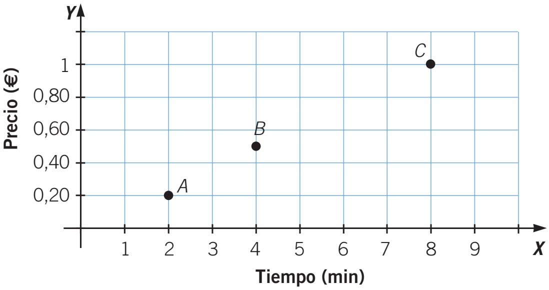


040 ● **Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:**

$A(2, 2)$	$E(-3, 6)$
$B(-5, -2)$	$F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$
$C(1, 2)$	$G(8, -6)$
$D\left(\frac{3}{2}, 5\right)$	$H\left(\frac{2}{5}, 0\right)$



041 ● **La gráfica relaciona el tiempo de una llamada telefónica con su precio. Indica el precio y el tiempo de las llamadas *A*, *B* y *C*.**



a) ¿Qué unidad tomamos en cada eje?

b) Halla la tabla de valores que relaciona ambas magnitudes.

a) En el eje de abscisas, la unidad es 1 minuto. Y en el eje de ordenadas, la unidad es 0,20 €.

b)

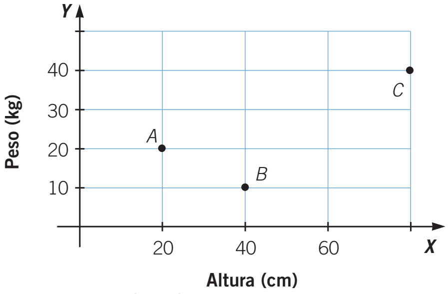
Tiempo (min)	2	4	8
Precio (€)	0,20	0,50	1

042 ● **A partir de la gráfica, indica si las siguientes afirmaciones son ciertas.**

a) *B* pesa más que *C*.

b) *C* es el más alto y el que pesa más.

c) *B* es el más bajo y el menos pesado.

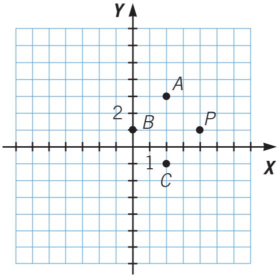


Son ciertas las afirmaciones de los apartados b) y c).

043 ●

Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos *A*(2, 3), *B*(0, 1) y *C*(2, −1). Halla las coordenadas de otro punto que, junto con ellos, forme los vértices de un cuadrado.

El nuevo punto tiene de coordenadas *P*(4, 1).



044 ●

Decide si estas relaciones son funciones.

a) A cada número natural le asociamos sus divisores.

b) A cada número natural le hacemos corresponder su doble más 3.

a) No es una función, pues un número natural puede tener más de un divisor.

b) Es una función.

045 ●

El precio del kilogramo de cerezas es de 2,75 €.

a) Haz una tabla de valores donde figuren el peso y el precio.

b) Define las variables independiente y dependiente.

c) Obtén su expresión algebraica.

d) Evalúa si es o no una función.

a)

Peso (kg)	1	2	4	6
Precio (€)	2,75	5,50	11	16,50

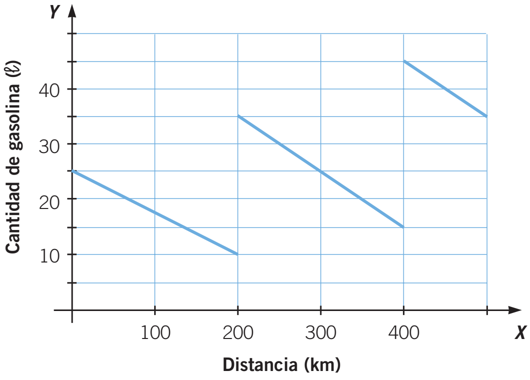
b) La variable independiente es el peso y la dependiente es el precio.

c) La expresión algebraica es $y = 2{,}75x$.

d) Es una función, pues a cada valor del peso solo le corresponde un precio.

046 ●●

La gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en el depósito de un coche durante un viaje.



a) ¿Cuántos litros hay en el depósito en el momento de la salida? ¿Y en la llegada?

b) ¿En qué kilómetros se repostó gasolina?

c) ¿Cuántos litros se repostaron durante el viaje?

d) Identifica las variables dependiente e independiente.

a) Hay 25 litros en la salida y 35 litros en la llegada.

b) Se repostó gasolina en los kilómetros 200 y 400.

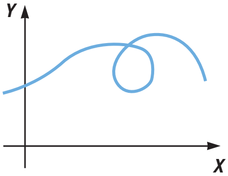
c) Se repostaron 55 litros en total: 25 litros la primera vez y 30 litros la segunda.

d) La variable independiente es la distancia recorrida, en km, y la variable dependiente es la cantidad de gasolina, en ℓ.

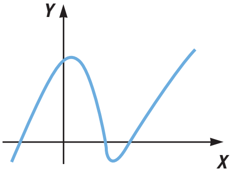
047 ●

Indica cuáles de las siguientes gráficas pertenecen a una función.

a)



b)



a) No es una función. Existen puntos con la misma abscisa y con dos valores diferentes en las ordenadas.

b) Es una función. Cada punto tiene una única ordenada para cada valor de abscisa.

048 ●●

Si en una cafetería hemos pagado 15 € por 6 cafés:

a) Haz una tabla de valores donde figuren el número de cafés y el precio.

b) Señala cuál es cada variable.

a)

N.º de cafés	1	2	4	6
Precio (€)	2,50	5	10	15

b) La variable independiente es el número de cafés y la variable dependiente es el precio, en €.

049 ●

Expresa estas relaciones mediante una tabla de cinco valores como mínimo.

a) Un número y su mitad.

b) El lado de un cuadrado y su área.

c) Un número y su inverso.

d) Un número y su triple.

a)

x	2	4	6	8	10
y	1	2	3	4	5

b)

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

c)

x	1	2	3	4	5
y	1	1/2	1/3	1/4	1/5

d)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	6	9	12	15	18

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE EXPRESAN ALGEBRAICAMENTE ALGUNAS RELACIONES NUMÉRICAS?

¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona un número entero con su cuadrado?

PRIMERO. Se construye la tabla de valores.

Número	1	2	3	4	5	6	7	…
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	…

SEGUNDO. Se escribe de forma algebraica el resultado.

$$x \rightarrow y = x^2$$

Dando un valor a la variable independiente, x, obtenemos el cuadrado de ese valor, que es la variable dependiente, y.

051 ●● **Dada la función que asocia a cada número su mitad más 2 unidades:**

a) Construye una tabla de valores.

b) Encuentra su expresión algebraica.

c) Halla $f(-5)$ y $f(4)$.

a)

x	−2	−1	0	1	2
y	1	1,5	2	2,5	3

b) La expresión algebraica de la función es: $y = \frac{x}{2} + 2$

c) $f(-5) = \frac{-5}{2} + 2 = -0{,}5$ $\qquad f(4) = \frac{4}{2} + 2 = 4$

052 ●● **Dada la función que asocia a cada número su opuesto más 5:**

a) Halla su expresión algebraica.

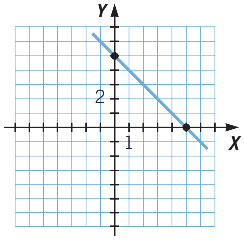
b) Calcula $f(2)$ y $f(-2)$.

c) Representa la función.

a) $f(x) = -x + 5$

b) $f(2) = -2 + 5 = 3$
$f(-2) = -(-2) + 5 = 2 + 5 = 7$

c)



053 ●●

Escribe la expresión algebraica.

a) A cada número le asignamos su quinta parte.

b) A cada número le hacemos corresponder el cubo de su doble.

c) A cada número se le asocia el cuadrado de su tercera parte.

a) $y = \frac{x}{5}$ b) $y = (2x)^3$ c) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$

054 ●●

En cada apartado se describe la relación entre dos magnitudes. Escribe esta relación mediante una expresión algebraica definiendo, previamente, las variables independiente y dependiente.

a) El precio del kilo de café es de 12,40 €.

b) El precio de los artículos de una tienda está rebajado en un 30 %.

c) El valor de un coche se deprecia un 10 % cada año.

d) La distancia recorrida por un ciclista que circula a 20 km/h.

e) El tiempo que tarda un autobús en realizar su recorrido completo es de 20 minutos.

a) $x =$ kilos de café e $y =$ precio → $y = 12{,}40x$

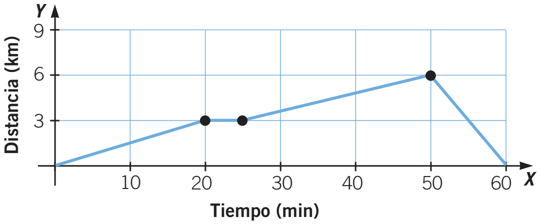
b) $x =$ precio original e $y =$ precio rebajado → $y = \frac{70x}{100}$

c) $x =$ antigüedad del coche e $y =$ depreciación → $y = 10x$

d) y e) $x =$ distancia recorrida e $y =$ tiempo → $y = 20x$

055 ●●

La siguiente gráfica expresa la relación entre el tiempo, en minutos, y el espacio, en kilómetros, recorrido por una persona durante una hora.



a) Exprésalo en una tabla de valores.

b) ¿Cuánto tiempo ha estado parada?

c) ¿Y cuánto tiempo ha caminado?

a)

Tiempo (min)	0	20	25	50	60
Distancia (km)	0	3	3	6	0

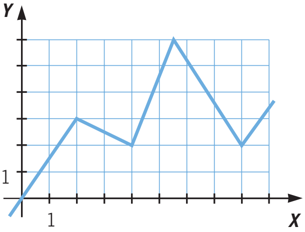
b) 5 minutos

c) 55 minutos

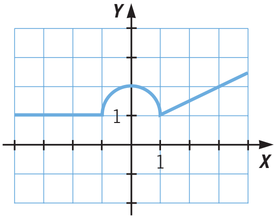
056 ●●

Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las gráficas de las siguientes funciones.

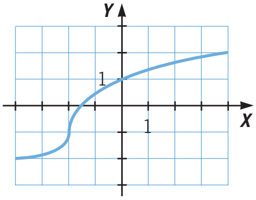
a)



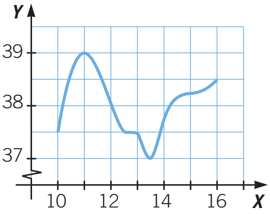
c)



b)



d)



a) Crece desde $x = 0$ hasta $x = 2$, desde $x = 4$ hasta $x = 5{,}5$ y desde $x = 8$ hasta $x = 9$.

Decrece desde $x = 2$ hasta $x = 4$ y desde $x = 5{,}5$ hasta $x = 8$.

b) Crece desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Nunca decrece.

c) Crece desde $x = -1$ hasta $x = 0$ y desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

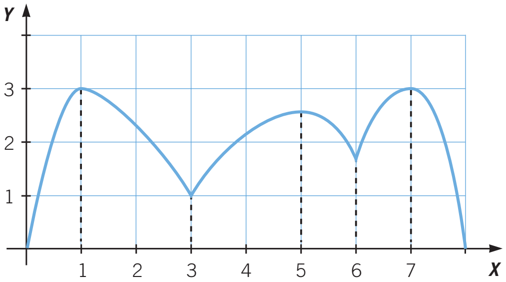
Decrece desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

d) Crece desde $x = 10$ hasta $x = 11$ y desde $x = 13{,}5$ hasta $x = 16$.

Decrece desde $x = 11$ hasta $x = 13{,}5$.

057 ●

Indica los máximos y mínimos.

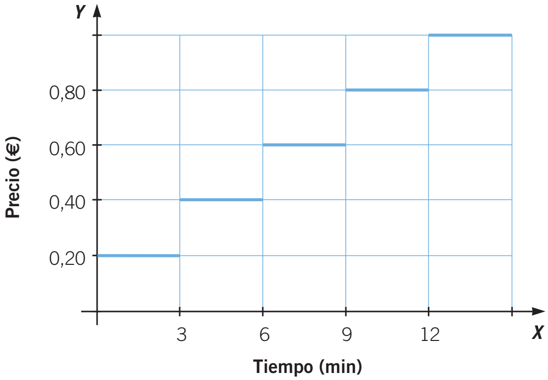


Los máximos son: (1, 3), (5; 2,5) y (7, 3)

Los mínimos son: (3, 1) y (6; 1,75)

058 ●●

La gráfica muestra el precio de una llamada telefónica con un determinado contrato.



a) Identifica las variables. ¿Es una función?

b) Averigua si es una función creciente o decreciente.

c) ¿Tiene máximos y mínimos?

d) ¿Cuánto costará una llamada de 8 minutos? ¿Y una de 7 minutos? ¿Y una de 2 minutos?

e) Si solo quiero gastar 1 €, ¿cuánto tiempo podré hablar?

f) ¿Es una función continua?

a) La variable dependiente es el tiempo y la independiente es el precio. Es una función.

b) Es una función constante a intervalos (escalonada) y creciente en los puntos de salto.

c) No tiene máximos ni mínimos.

d) Una llamada de 8 minutos costará 0,60 €; una de 7 minutos, 0,60 €, y otra de 2 minutos, 0,20 €.

e) Con 1 € podré hablar durante 15 minutos.

f) No es una función continua.

059 ●●

La velocidad de un motorista varía según se indica en la gráfica.

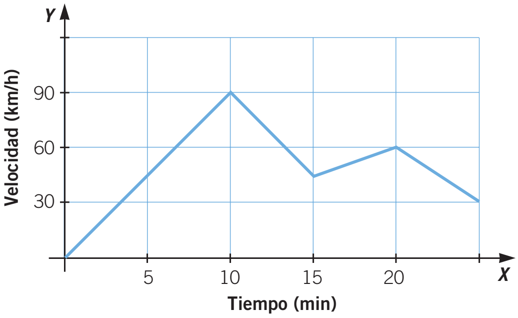
a) Indica los tramos donde la función crece.

b) Indica los tramos donde la función decrece.

c) Halla los máximos absolutos y relativos.

d) ¿Cuáles son los mínimos absolutos o relativos?

e) ¿Es una función continua?



a) Crece desde $x = 0$ hasta $x = 10$ y desde $x = 15$ hasta $x = 20$.

b) Decrece desde $x = 10$ hasta $x = 15$ y desde $x = 20$ hasta $x = 25$.

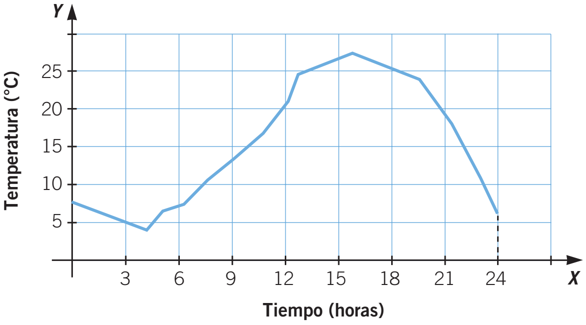
c) Los máximos relativos son: (10, 90) y (20, 60), y el máximo absoluto es: (10, 90)

d) Hay un mínimo relativo en (15, 45) y un mínimo absoluto en (0, 0).

e) Es una función continua.

060 ●●

La gráfica muestra la temperatura de una ciudad durante 24 horas seguidas.



Analiza su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

La temperatura decrece desde las 0 hasta las 4 horas y desde las 16 hasta las 24 horas.

La temperatura crece desde las 4 hasta las 16 horas.

La temperatura mínima se da a las 4 horas con 4 °C y la máxima a las 16 horas con 27 °C.

061 ●●

Esta tabla muestra las temperaturas de una localidad a lo largo de un día.

Hora	2	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (°C)	−9	−6	−3	3	8	9	7	4	−3	−3	−5

a) Identifica las variables.

b) Representa la gráfica.

c) Halla los máximos relativos.

d) Halla los mínimos relativos.

e) ¿Es una función continua?

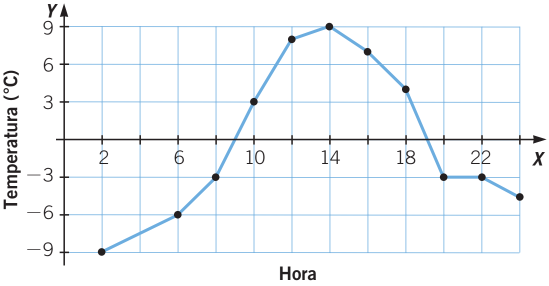
f) ¿Durante cuántas horas la temperatura ha superado los 0 °C?

g) ¿A qué hora se midió la temperatura mínima? ¿Y máxima?

h) ¿A qué horas la temperatura fue de 0 °C?

a) La variable independiente es la hora del día y la dependiente es la temperatura.

b)



c) Hay un máximo relativo en (14, 9).

d) Hay mínimos relativos en todos los puntos comprendidos entre 20 y 22.

e) Es una función continua.

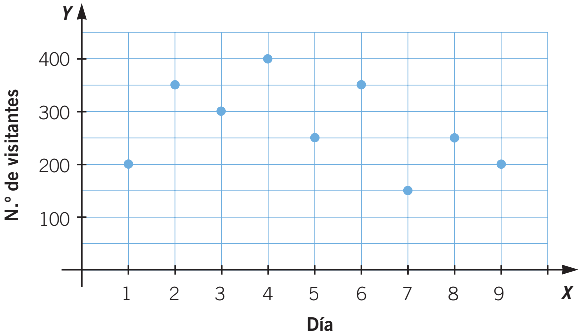
f) La temperatura ha superado los 0 °C desde las 9 hasta las 19 horas.

g) La temperatura mínima se midió a las 2 horas y la máxima a las 14 horas.

h) A las 9, 19 y 23 horas, respectivamente.

062 ●●

La gráfica registra el número de visitantes a un museo durante 9 días. Señala cuáles de las afirmaciones son verdaderas.



a) Hay un máximo en $x = 4$, porque el cuarto día se registró el mayor número de visitantes.

b) El número de visitantes fue distinto cada día.

c) Acudieron 250 visitantes en dos días.

d) Los últimos cinco días hubo en total más visitantes que en los cuatro primeros días.

a) Verdadera

b) Falsa: Hay varios días en los que coincidió el número de visitantes.

c) Verdadera

d) Falsa: En los cuatro primeros días acudieron 1 250 visitantes y en los cinco últimos días, 1 200 visitantes.

063 **Elena sale del kilómetro 0 de una carrera con una velocidad de 3 km/h.**

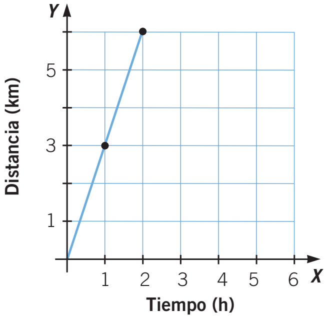
a) Copia y completa la tabla y dibuja su gráfica.

b) Halla la expresión algebraica de esta función.

c) En el momento en que pasa por el kilómetro 11, ¿cuánto tiempo hace que ha salido?

a)

Tiempo (h)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Distancia al km 0	**0**	**3**	6	9	12	15



b) $y = 3x$

c) $y = 3x \rightarrow 11 = 3x \rightarrow x = \dfrac{11}{3} = 3$ h 40 min

064 **Los datos de la tabla son medidas de espacios y tiempos que se tardan en recorrerlos.**

a) Copia y completa los datos de la tabla.

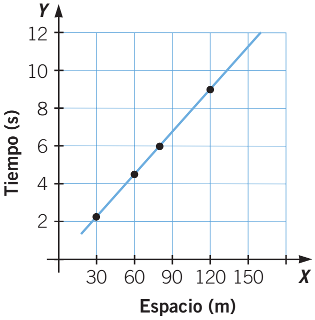
b) Representa los datos gráficamente.

c) Halla la expresión algebraica de esta función.

a) Se trata de una función de proporcionalidad directa.

Espacio (m)	**120**	**30**	**60**	80
Tiempo (s)	**9**	2,25	4,5	**6**

b)



c) $y = \dfrac{9}{120}x \rightarrow y = \dfrac{3}{40}x$

065 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA CONOCIENDO UN PUNTO QUE LE PERTENECE?

Determina la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto (2, −2).

PRIMERO. En la ecuación $y = mx$ se sustituye x por la primera coordenada e y por la segunda.

$$y = mx \xrightarrow{x = 2,\, y = -2} -2 = m \cdot 2$$

SEGUNDO. Se calcula m.

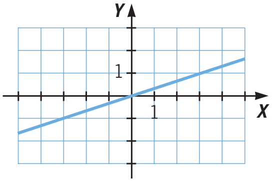
$$-2 = 2m \rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

Por tanto, la ecuación de la función es $y = -x$.

066 ●● **Determina la ecuación y representa la función que verifica estas dos condiciones:**

- **Es una función de proporcionalidad directa.**
- **$f(3) = 1$**

$$y = \frac{x}{3}$$



067 ●● **Determina la ecuación de la función de proporcionalidad directa que pasa por:**

a) (1, −1) **b) (3, −4)** **c) (−2, −1)**

¿Pasa alguna de estas funciones por el punto (7, 2)? ¿Y por el punto (0, −2)?

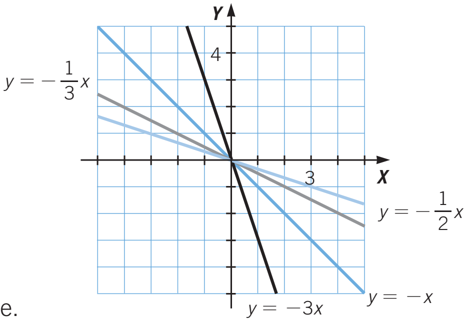
a) $y = -x$ b) $y = -\frac{4x}{3}$ c) $y = 2x$

Ninguna de las funciones pasa por (7, 2) ni por (0, −2).

068 ●● **Representa en un mismo sistema de coordenadas estas funciones. Explica las diferencias que encuentres entre ellas.**

a) $y = -x$ **c) $y = -3x$**

b) $y = -\frac{1}{2}x$ **d) $y = -\frac{1}{3}x$**



La diferencia está en la pendiente.

069 ●●

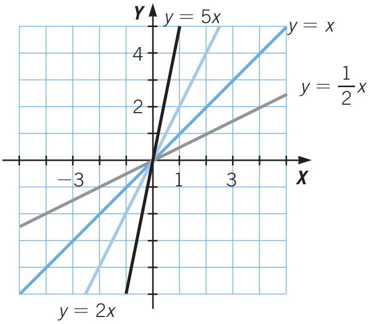
Representa en un mismo sistema de coordenadas estas funciones. Explica las diferencias que encuentres entre ellas.

a) $y = x$

b) $y = \frac{1}{2}x$

c) $y = 2x$

d) $y = 5x$

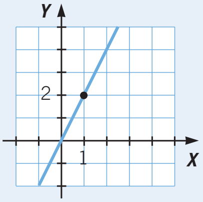


La diferencia está en la pendiente.

070 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE DETERMINA LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA CONOCIENDO SU GRÁFICA?

Determina la ecuación de esta función.



PRIMERO. Si la función es una recta y pasa por el origen de coordenadas, es una función de proporcionalidad directa y, por tanto, su ecuación es del tipo $y = mx$.

SEGUNDO. Se determina un punto por el que pasa.

La gráfica pasa por (1, 2).

TERCERO. Se calcula m.

$$y = mx \xrightarrow{x=1,\ y=2} 2 = m \cdot 1 \rightarrow m = 2$$

Por tanto, la ecuación de la función es $y = 2x$.

071 ●●

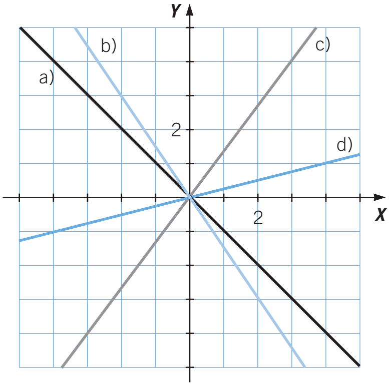
Determina las ecuaciones de estas funciones:

a) $y = -x$

b) $y = -\frac{3}{2}x$

c) $y = \frac{4}{3}x$

d) $y = \frac{1}{4}x$



072 La siguiente tabla corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

a) Copia y completa la tabla.

b) Escribe la expresión algebraica de la función.

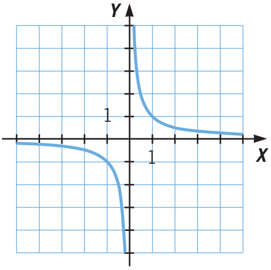
c) Representa la función.

a)

x	1	2	3	4	5	…
y	2	1/2	1/3	**1/4**	1/5	…

b) $y = \dfrac{1}{x}$

c)



073 La relación entre dos números positivos viene establecida por la siguiente tabla:

x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2	…
y	300	60	30	12	6	3	…

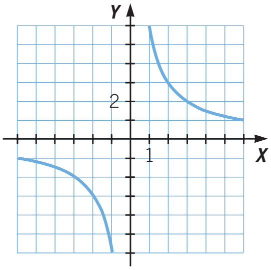
a) ¿Cuál es la expresión algebraica de esta relación?

b) Represéntala gráficamente.

c) Da valores a *x* muy próximos a cero. ¿Qué ocurre con los valores de *y*?

a) $y = \dfrac{6}{x}$

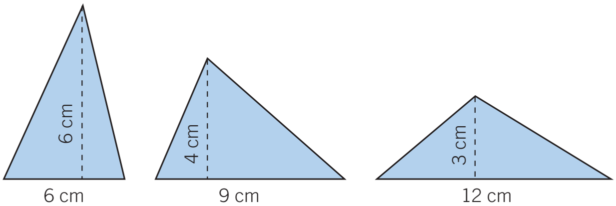
b)



c) Los valores de *y* crecen rápidamente cuando *x* se aproxima a cero.

074 El área de un triángulo es de 18 cm^2.

a) Construye una tabla con diferentes valores de la base y la altura.

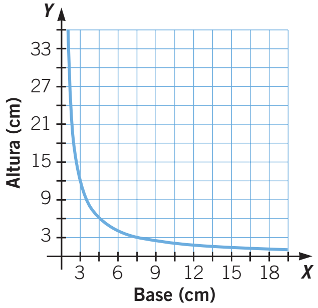


b) Determina la expresión algebraica que nos da la altura en función de la base, y represéntala gráficamente.

a)

Base (cm)	1	2	3	4	6	9	12	36	18
Altura (cm)	36	18	12	9	6	4	3	1	2

b) La expresión algebraica es: $y = \frac{36}{x}$



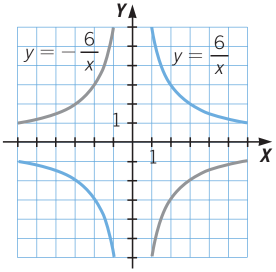
075 ●●

Dadas las funciones $y = \frac{6}{x}$ e $y = -\frac{6}{x}$.

a) Represéntalas gráficamente.

b) Escribe las características que las diferencian.

a)



b) Son gráficas simétricas respecto de los dos ejes, siendo una positiva y la otra negativa.

076 ●●

Dada la función $y = -\frac{5}{x}$:

a) ¿Para qué valores es decreciente la función?

b) ¿Tiene máximos o mínimos?

c) Haz una tabla de valores, dando valores a x de -1 a 0 y de 1 a 0, y tomando valores cada vez más cercanos a 0. ¿A qué valores se acerca la función?

a) La función nunca es decreciente, excepto en $x = 0$.

b) No tiene máximos ni mínimos.

c)

x	−1	−0,5	−0,1	−0,01	−0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	1
y	5	10	50	500	5 000	−5 000	−500	−50	−10	−5

Cuando la función se acerca a cero por la izquierda se aproxima a $-\infty$, y cuando lo hace por la derecha se aproxima a ∞.

077 ●●

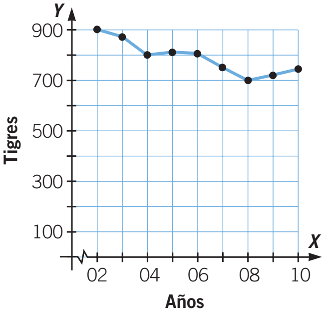
La siguiente tabla, publicada por una ONG dedicada a la conservación de las especies, representa la población de tigres de Bengala en la India desde 2002 hasta 2010.

Año	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Tigres	900	870	800	810	805	750	700	720	750

a) Representa los pares de valores gráficamente.

b) Interpreta los resultados obtenidos.

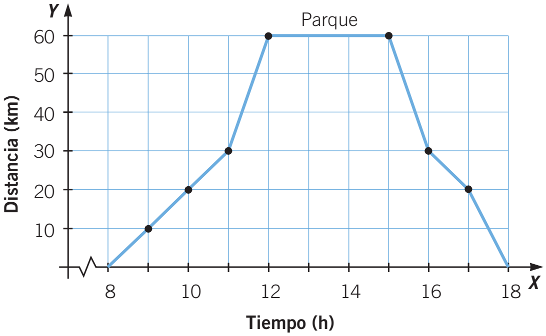
a)



b) El número de tigres ha disminuido en los períodos de 2002 a 2004 y de 2005 a 2008, incrementándose de 2004 a 2005 y de 2008 a 2010.

078 ●●

Hacemos una excursión en bicicleta a un parque situado a 60 km. Para llegar hay que recorrer un camino con subidas y bajadas. Después, descansamos y regresamos.



a) ¿Qué significado tienen los números situados en el eje de abscisas? ¿Y los del eje de ordenadas?

b) ¿A qué hora salimos?

c) ¿Cuántos kilómetros hay desde el comienzo de la primera cuesta hasta la cima?

d) ¿Cuánto tiempo tardamos en subirla? ¿Y en bajarla?

e) ¿Cuánto tiempo estamos en el parque?

f) ¿Cómo es el camino de regreso?

g) ¿En qué tramo crece la función? ¿Dónde decrece?

h) ¿Es una función continua?

a) Los números del eje de abscisas son las horas que han transcurrido y los que están en el eje de ordenadas indican los kilómetros recorridos.

b) Salimos a las 8 horas.

c) Hay 60 km.

d) Tardamos 4 horas en subirla y 3 horas en bajarla.

e) Estamos 3 horas.

f) Tiene un primer tramo de 30 km de pendiente más favorable, otro de llano o pendiente desfavorable de 10 km y los últimos 20 km son también favorables.

g) Crece de 8 a 12 horas y decrece de 15 a 18 horas.

h) Es continua.

079 ●●

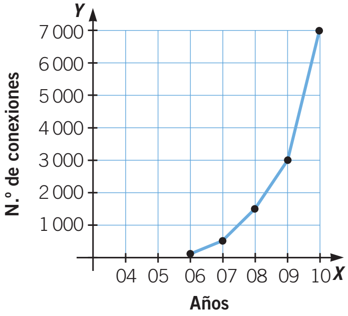
Se ha hecho un estudio en una ciudad del número de familias que se conectan a Internet cada año.

Años	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**
N.º de conexiones	**100**	**500**	**1 500**	**3 000**	**7 000**

a) Representa los pares de valores gráficamente.

b) Interpreta los resultados.

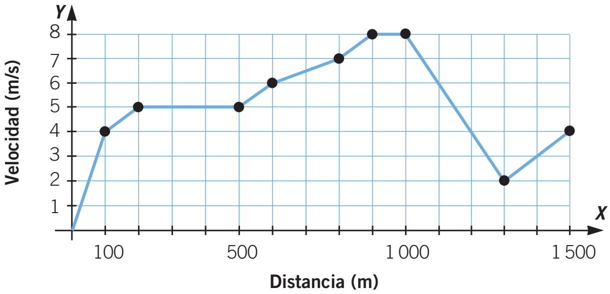
a)



b) Cada año se conecta a Internet un mayor número de familias, ya que al menos se duplica cada año.

080 ●●

La siguiente gráfica muestra la variación de la velocidad de un atleta en una carrera de 1 500 m.



a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Por qué?

c) ¿En qué momentos de la carrera su velocidad es de 6 m/s?

d) ¿Cuándo crece la velocidad?

e) ¿Y cuándo decrece?

f) ¿En qué momentos mantiene constante la velocidad?

g) ¿Es una función continua?

h) ¿Cuál es la velocidad máxima?

i) ¿Tiene algún mínimo relativo esta función?

j) ¿Qué velocidad lleva a los 300 m?

a) La variable independiente es la distancia recorrida, y se encuentra en el eje de abscisas.

b) La variable dependiente es la velocidad, depende de la distancia recorrida, y está en el eje de ordenadas.

c) La velocidad es de 6 m/s a los 600 m y a los 1 100 m.

d) Crece de 0 a 200 m, de 500 a 900 m y de 1 300 a 1 500 m.

e) Decrece de 1 000 a 1 300 m.

f) Es constante desde 200 hasta 500 m, con una velocidad de 5 m/s, y desde 900 hasta 1 000 m, con una velocidad de 8 m/s.

g) Sí, es continua.

h) Su velocidad máxima es de 8 m/s.

i) Sí, tiene un mínimo en $x = 1\,300 \rightarrow m_1 = (1\,300, 2)$

j) 5 m/s

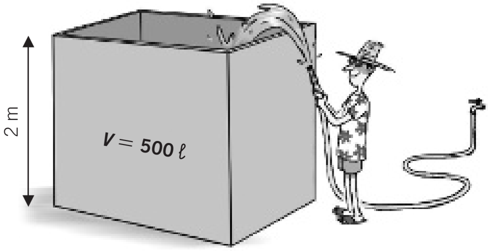
El corredor comenzó aumentando su velocidad rápidamente hasta 4 m/s, y después aumentó más lentamente hasta alcanzar 5 m/s. Durante 300 m mantuvo esta velocidad constante, y luego volvió a aumentar la velocidad progresivamente hasta alcanzar 8 m/s a 900 m de la salida. Mantuvo esta velocidad durante 100 m, pero después su velocidad disminuyó hasta 2 m/s en los siguientes 300 m. Finalmente, en los últimos 200 m aumentó la velocidad hasta alcanzar 4 m/s y terminó la carrera.

081 ●●●

Queremos construir un depósito prismático con estas medidas.

a) Haz una tabla con los diferentes valores de las dimensiones que puede tener.

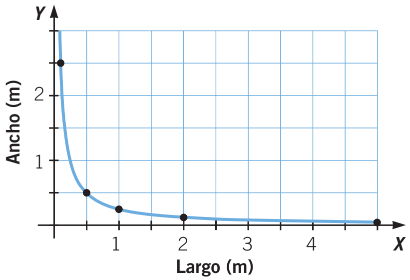
b) Escribe la función correspondiente y represéntala.



a)

Largo (m)	0,1	0,5	1	2	5
Ancho (m)	2,5	0,5	0,25	0,125	0,05

b) $y = \dfrac{0{,}250}{x}$



082 ●●● **Los alumnos de 2.º ESO quieren ir de viaje de estudios. Para obtener fondos acuerdan vender polvorones. Deciden comprar 360 cajas que venderán entre todos los que vayan de viaje.**

a) Haz una tabla que relacione el número de alumnos que van a viajar con el número de cajas que ha de vender cada uno.

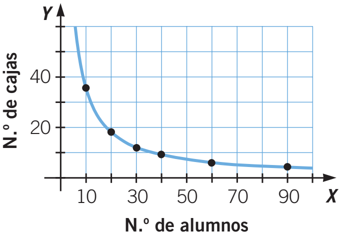
b) Escribe su expresión algebraica y representa la función.

c) Comprueba que el producto del número de alumnos por el de cajas es constante. ¿Qué significa esto?

a)

N.º de alumnos	10	20	30	40	60	90
N.º de cajas por alumno	36	18	12	9	6	4

b) $y = \dfrac{360}{x}$

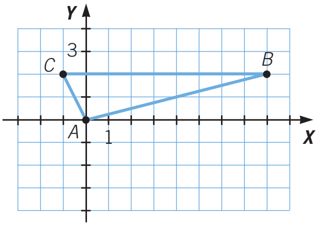


c) Esto significa que las dos variables están en proporcionalidad inversa.

083 ●●● **Un triángulo tiene por vértices los puntos $A(0, 0)$, $B(8, 2)$ y $C(-1, 2)$. Calcula el área de este triángulo.**

Tomando el lado *BC* como base, la altura será el eje de ordenadas, por lo que la base mide 9 u y la altura 2 u.

El área es: $A = \dfrac{9 \cdot 2}{2} = 9 \text{ u}^2$



084 ●●●

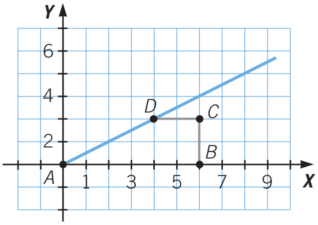
Un trapecio, de lados paralelos *AB* y *CD*, tiene por vértices los puntos *A*(0, 0), *B*(6, 0), *C*(6, 2) y *D*. Calcula la ecuación de la función que determina el lado *AD* para que el área del trapecio sea 8 u^2.

El lado *AB* es una de las bases que mide 6 u.

La altura es *BC* y mide 2 u.

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h \rightarrow 8 = \frac{6 + b}{2} \cdot 2 \rightarrow b = 2 \rightarrow D(4, 2)$$

Por tanto, la recta que pasa por (0, 0) y (4, 2) es $y = 2x$.

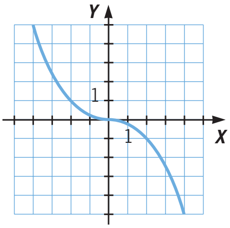


085 ●●●

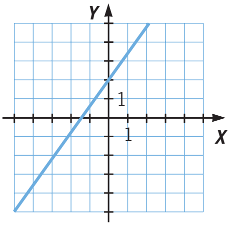
Se dice que una función es par si $f(-x) = f(x)$ para cualquier valor de x, y que es impar si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier valor de x.

Determina si estas funciones son pares, impares o no son pares ni impares.

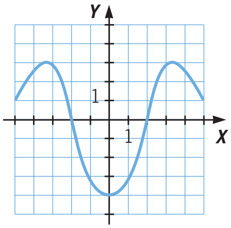
a)



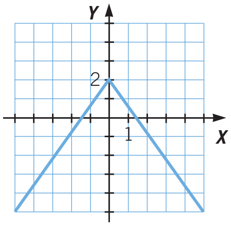
b)



c)



d)



a) Es impar.

b) No es par ni impar.

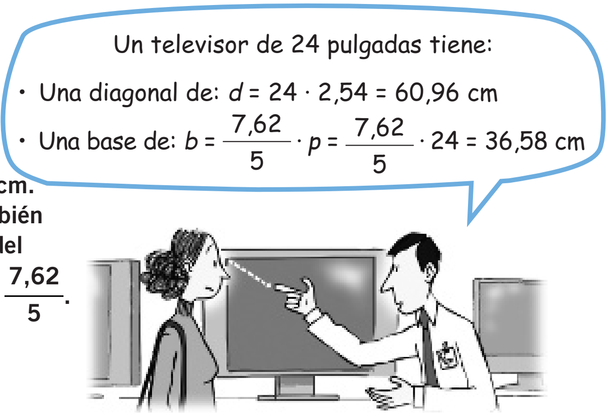
c) Es par.

d) Es par.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

086 ●●●

El tamaño de un televisor se expresa en pulgadas. El número de pulgadas indica la longitud de su diagonal, siendo 1 pulgada = 2,54 cm. Mediante esta medida también se puede calcular la base del televisor multiplicando por $\frac{7{,}62}{5}$.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuánto mide la diagonal y la base de un televisor de 32 pulgadas?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) Según las recomendaciones de la Asociación Nacional de Ópticos, el tamaño del televisor ha de mantener cierta relación con la distancia a la que nos debemos situar del mismo.

La distancia mínima aconsejable se halla multiplicando por 5 las pulgadas que tiene el televisor. ¿Cuántas pulgadas puede tener el televisor?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Si el largo de la mesa donde se va a situar es de 20 cm, ¿crees que cabrá el televisor?

a) Diagonal: $d = 32 \cdot 2{,}54 = 81{,}28$ cm Base: $b = \frac{7{,}62}{5} \cdot 32 = 48,77$ cm

b) La función que relaciona el tamaño de la pantalla y la distancia es $y = 5x$.

Como máximo, la distancia al televisor es de: 1,80 m = 180 cm = 70,87 p

$$y = 5x \rightarrow 70{,}87 = 5x \rightarrow x = 14{,}17 \text{ p}$$

El tamaño máximo del televisor debe ser de 14,17 pulgadas.

Como mínimo, la distancia al televisor es de: 1,40 m = 140 cm = 55,12 p

$$y = 5x \rightarrow 55{,}12 = 5x \rightarrow x = 11{,}02 \text{ p}$$

El tamaño mínimo del televisor es de 11,02 pulgadas, al que le corresponde $b = \frac{7{,}62 \cdot 11{,}02}{5} = 16{,}8$ cm, que será, como mínimo, el largo de la mesa.

c) $20 = \dfrac{7{,}62}{5} \cdot p \rightarrow p = 13{,}12$ cm

En una mesa que tiene de largo 20 cm, se puede situar, como máximo, una televisión de 13 pulgadas.

No puede colocar una televisión de 14 pulgadas, tamaño máximo según el apartado anterior, pero sí de 13 pulgadas.

087 ●●●

La principal noticia de los medios de comunicación es la constatación del incremento de gases contaminantes vertidos a la atmósfera durante los últimos años. Los tres periódicos de máxima tirada han informado utilizando una gráfica que refleja este preocupante aumento.

Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuántos millones de m^3 de gases se emitieron a la atmósfera en el primer año según estos periódicos? ¿Y en el tercer año?

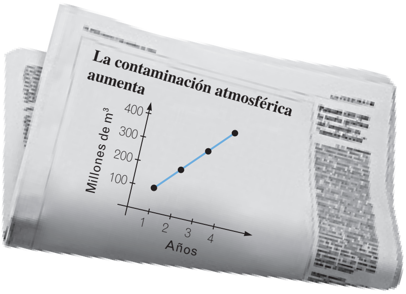
Eres capaz de… Resolver

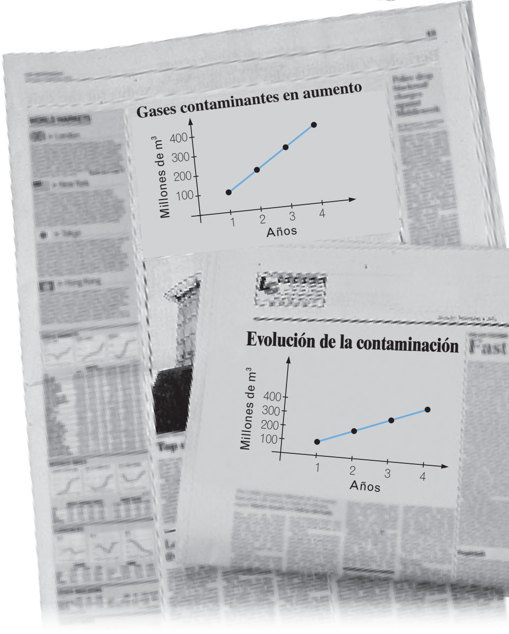
b) Si la emisión de gases sigue la misma trayectoria según cada periódico, ¿cuántos millones de m^3 se emitirán dentro de 10 años?

Eres capaz de… Decidir

c) A la vista de los resultados obtenidos, ¿crees que están bien elaboradas las gráficas?

d) ¿Qué diferencias encuentras entre ellas?





a) En el primer año se emitieron 100 millones de m^3, y en el tercero, 300 millones de m^3.

b) Según las tres gráficas, la emisión de gases es de 100 m^3 cada año. Dentro de 10 años se emitirán 10 millones de m^3.

c) Las tres gráficas reflejan los mismos datos, por lo tanto son correctas.

d) La diferencia está en las escalas de los ejes horizontal y vertical. Según se quiera hacer mayor o menor la pendiente de la gráfica, se aumenta o disminuye la escala de los ejes.

14 Estadística

La *Pax Augusta*

El día se mostraba luminoso, como queriendo sumarse a la celebración de la victoria en la última batalla. Hacía diez años que las guerras civiles habían terminado, olvidadas ya ante una prosperidad que parecía no tener fin.

El mismo César Augusto hablaría ante el Senado. Corrillos de senadores esperaban su llegada elucubrando sobre el carácter de su discurso.

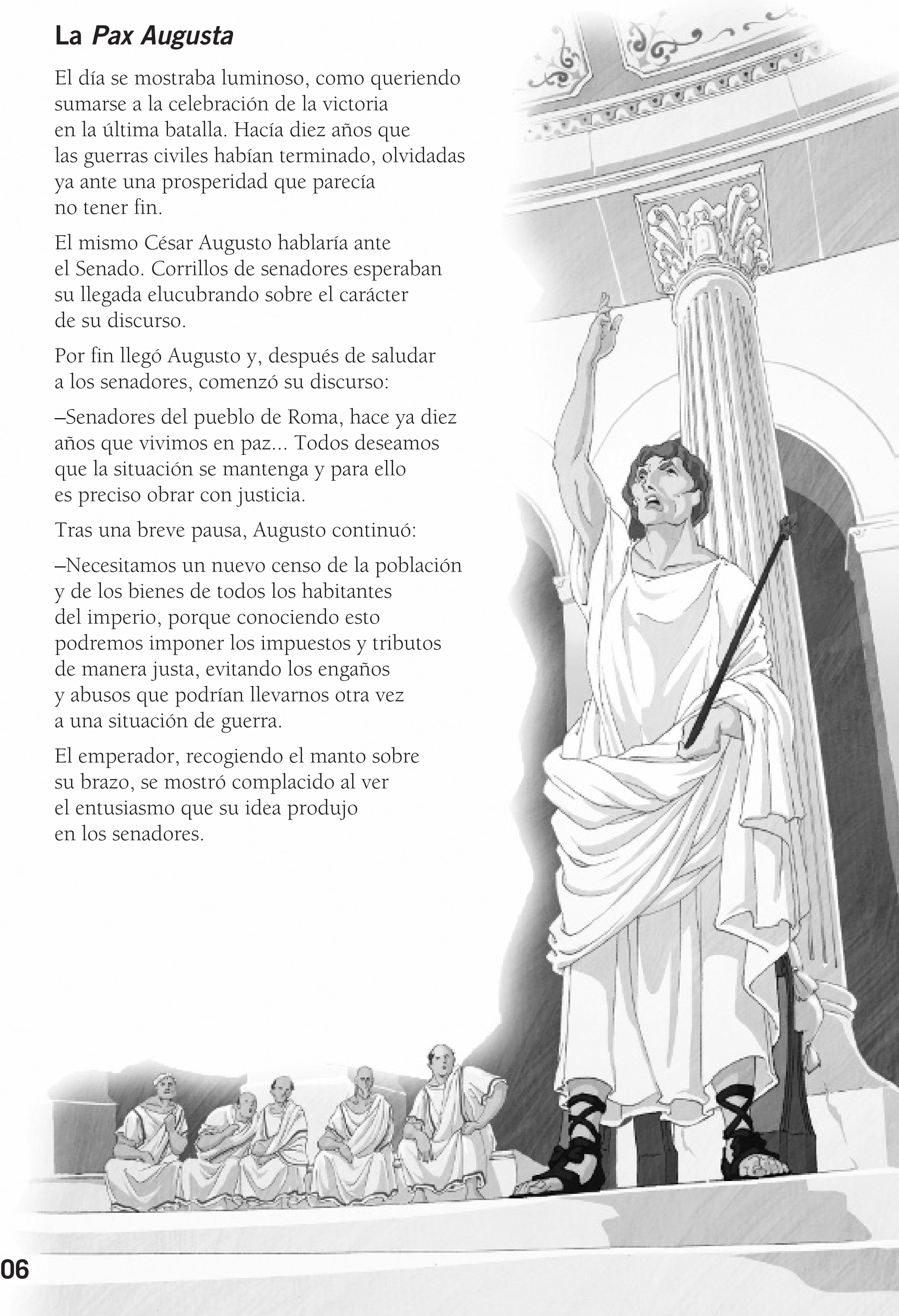
Por fin llegó Augusto y, después de saludar a los senadores, comenzó su discurso:

–Senadores del pueblo de Roma, hace ya diez años que vivimos en paz... Todos deseamos que la situación se mantenga y para ello es preciso obrar con justicia.

Tras una breve pausa, Augusto continuó:

–Necesitamos un nuevo censo de la población y de los bienes de todos los habitantes del imperio, porque conociendo esto podremos imponer los impuestos y tributos de manera justa, evitando los engaños y abusos que podrían llevarnos otra vez a una situación de guerra.

El emperador, recogiendo el manto sobre su brazo, se mostró complacido al ver el entusiasmo que su idea produjo en los senadores.



DESCUBRE LA HISTORIA…

1 **César Augusto es considerado el más importante emperador romano. Busca información sobre su vida y la época en que vivió.**

Se puede encontrar información sobre la vida de César Augusto en esta página:
http://www.artehistoria.jcyl.es/historia/personajes/4403.htm

En la siguiente página se puede completar esta información:
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/augusto.htm

2 **Investiga sobre el primer censo que César Augusto mandó realizar.**

En esta página web se puede obtener información sobre el primer censo que César Augusto mandó realizar:
http://www.aciprensa.com/navidad/comentario.htm

3 **¿Qué aportaciones a las matemáticas se pueden atribuir a la civilización romana?**

En la siguiente página web se puede encontrar información sobre cómo la civilización romana contribuyó al desarrollo de las matemáticas:
http://blogs.que.es/lengua-/2008/11/11/matematicas-roma

En este otro enlace también se pueden encontrar datos sobre las aportaciones a las matemáticas que se pueden atribuir a la civilización romana:
http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/3/3_ocaso_matematica_helena.pdf

EVALUACIÓN INICIAL

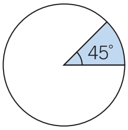
1 **Copia y completa la tabla:**

Factor	Factor	Producto
1	**5**	5
7	**4**	28
3	7	**21**
5	**6**	**30**

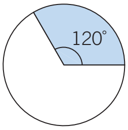
2 **Dibuja, en una circunferencia de 3 cm de radio, estos sectores circulares.**

a) De amplitud 45°. **b) De amplitud 120°.**

a)



b)



3 **Calcula los siguientes porcentajes.**

a) 70 % de 2 400 **b) 18 % de 540**

a) $70\ \% \text{ de } 2\,400 = \frac{70}{100} \cdot 2\,400 = \frac{70 \cdot 2\,400}{100} = 1680$

b) $18\ \% \text{ de } 540 = \frac{18}{100} \cdot 540 = \frac{18 \cdot 540}{100} = 97{,}2$

Estadística

EJERCICIOS

001 **En un estudio sobre el deporte que se practica, se ha elegido a 250 personas de una ciudad. Determina la población, la muestra y la variable estadística.**

- Población: todos los habitantes de la ciudad.
- Muestra: las 250 personas elegidas.
- Variable estadística: el deporte que se practica.
  Se trata de una variable cualitativa.

002 **Escribe tres variables cualitativas, tres cuantitativas continuas y otras tres cuantitativas discretas.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Cualitativas: equipo de fútbol favorito, país de nacimiento e idioma.
- Cuantitativas continuas: pluviosidad de una región, velocidad de un automóvil y tiempo que se tarda en recorrer 100 metros.
- Cuantitativas discretas: número de hijos de una familia, corredores de una maratón y vehículos que cruzan la frontera en un día.

003 **Decide si es más conveniente estudiar la población o la muestra en cada caso.**

a) La estatura de los alumnos de un instituto.
b) El peso de los jugadores de un equipo de fútbol.
c) El modelo de teléfono móvil que utilizan los alumnos de una clase de 2.º ESO.
d) Los gustos musicales de los habitantes de una ciudad.

a) Una muestra, ya que la población es muy grande.
b) La población, ya que está formada por pocos individuos.
c) La población, ya que está formada por pocos individuos.
d) Una muestra, ya que la población puede ser grande.

004 **Realiza un recuento de estas edades:**

13 12 17 11 19 15 13 14 15 16 17 18 14
17 14 15 17 13 16 18 19 17 15 15 16

Edades	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Recuento	1	1	3	3	5	3	5	2	2

005 **Después de lanzar 20 veces una moneda, los resultados (C = cara, + = cruz) han sido:**

C C + C + + + + + + C C
C + C C + C C C + C + +

Efectúa un recuento y organiza los datos.

Cara	12
Cruz	12

006 **Lanza un dado 30 veces y anota los resultados. Después, haz un recuento y organiza los datos obtenidos. ¿Cuál es la variable que estás estudiando?**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Cara	1	2	3	4	5	6
Recuento	3	5	6	4	5	7

La variable estudiada es el número que sale al lanzar el dado.

007 **Vuelve a realizar el experimento anterior, y clasifica los resultados en números pares o impares. ¿De qué tipo es ahora la variable?**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Pares	14
Impares	16

La variable es cualitativa.

008 **En una clase de 20 alumnos de 2.º ESO, el número de horas dedicadas a realizar un trabajo de Matemáticas han sido:**

4 6 7 3 6 8 5 9 8 7

5 4 7 8 4 6 5 8 10 7

Forma una tabla con el recuento de datos, y calcula las frecuencias de los valores que toma su variable.

x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i
3	1	0,05
4	3	0,15
5	3	0,15
6	3	0,15
7	4	0,2
8	4	0,2
9	1	0,05
10	1	0,05

009 **Anota el color de los ojos de tus compañeros, y realiza una tabla de frecuencias.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i
Azules	3	0,15
Marrones	10	0,5
Verdes	5	0,25
Negros	2	0,1
	20	1

Estadística

010 **Copia y completa la siguiente tabla, sabiendo que el número de suspensos es 4.**

Nota	**S**	**A**	**N**	**Sb**	**Total**
Frecuencia f_i	4	**8**	**6**	4	**22**

011 **Organiza estos datos en una tabla de frecuencias.**

164 168 170 170 168 170 174 170 168 172

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
164	1	1	0,1	0,1
168	3	4	0,3	0,4
170	4	8	0,4	0,8
172	1	9	0,1	0,9
174	1	10	0,1	1

012 **Haz una tabla de frecuencias con las edades de los socios de un club deportivo.**

19 21 24 24 24 25 24 21 26 19
20 22 29 23 28 27 22 23 24 19

¿Qué porcentaje tiene menos de 20 años?

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
19	3	3	0,15	0,15
20	1	4	0,05	0,2
21	2	6	0,1	0,3
22	2	8	0,1	0,4
23	2	10	0,1	0,5
24	5	15	0,25	0,75
25	1	16	0,05	0,8
26	1	17	0,05	0,85
27	1	18	0,05	0,9
28	1	19	0,05	0,95
29	1	20	0,05	1

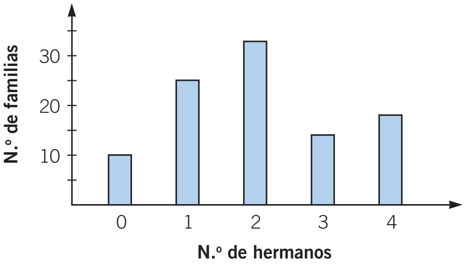
Los socios menores de 20 años son los que tienen 19 años, es decir, el 15 % del total.

013 **Copia y completa la siguiente tabla de frecuencias. Construye también una tabla de frecuencias acumuladas.**

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
1	**3**	3	**0,15**	0,15
2	4	7	**0,2**	0,35
3	2	9	0,1	0,45
4	6	15	**0,3**	0,75
5	**5**	20	0,25	1

014 **Realiza un diagrama de barras con el número de hermanos que hay en 100 familias de una ciudad.**

N.º de hermanos	0	1	2	3	4
N.º de familias	10	25	33	14	18

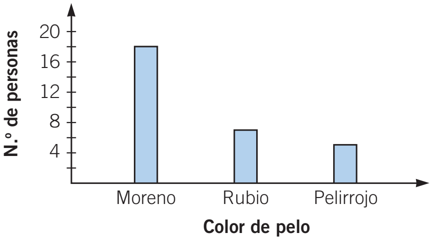


015 **El color de pelo de 30 personas es:**

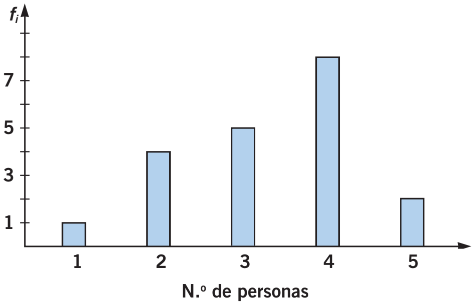
M = moreno R = rubio P = pelirrojo

M R P M M M M R R P P M M M M
M M P R R R P M M M M R M M M

Organiza los datos en un diagrama de barras.



016 **Este gráfico representa el número de veces que utiliza el transporte público en una semana un grupo de personas.**



a) ¿Qué tipo de variable estamos estudiando?

b) Construye la tabla correspondiente.

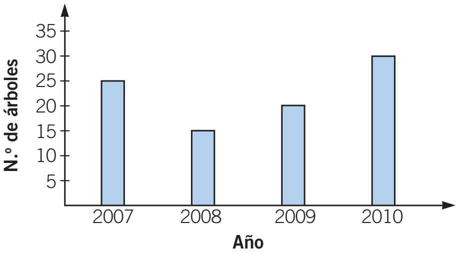
a) Variable cuantitativa discreta b)

N.º de personas	1	2	3	4	5
N.º de veces	1	4	5	8	2

017 **La tabla muestra el número de árboles plantados en un parque en los últimos años.**

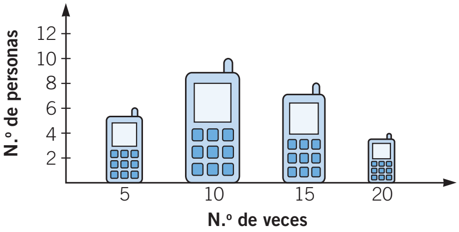
Año	2007	2008	2009	2010
N.º de árboles	25	15	20	30

Representa los datos mediante un diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondiente.

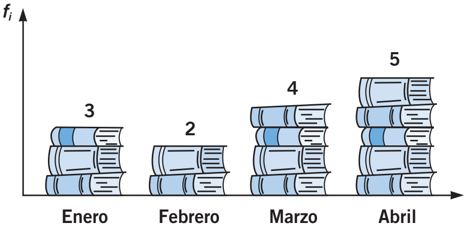


018 **Recoge datos sobre el número de veces que utilizan el móvil tus compañeros en un día y represéntalo mediante un pictograma.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



019 **Este pictograma muestra los libros que toma prestados de una biblioteca Miguel durante cuatro meses.**



a) Construye la tabla de frecuencias.

b) ¿Qué mes tomó prestados más libros?

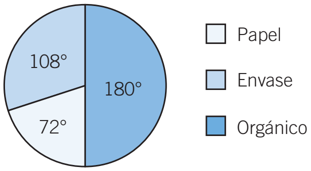
a)

Mes	N.º de libros
Enero	3
Febrero	2
Marzo	4
Abril	5

b) Tomó prestados más libros en Abril.

020 **Haz un diagrama de sectores con estos datos:**

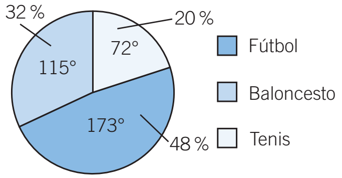
Tipo de residuos	Papel	Envase	Orgánico
Cantidad (t)	100	150	250

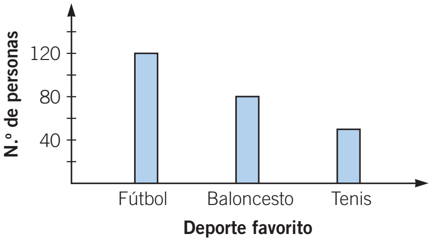


021 **Dibuja un diagrama de barras y otro de sectores con los siguientes datos:**

Deporte favorito	Fútbol	Baloncesto	Tenis
N.º de personas	120	80	50

¿Cuál de las dos representaciones te parece más adecuada? ¿Por qué?



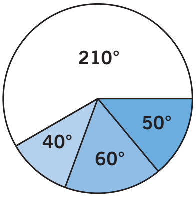


El diagrama de sectores representa mejor el porcentaje de personas que eligen cada deporte.

022 **Este diagrama de sectores muestra las respuestas de un grupo de personas sobre el color de vehículo que prefieren.**

a) ¿Cuál es el color que prefiere la mayoría?

b) Si hemos entrevistado a 720 personas, ¿cuántas prefieren cada color?



a) El color preferido es el blanco.

b) Blanco: 420 Verde: 80 Azul: 120 Rojo: 100

023 **La nota de la evaluación es la media de los cinco exámenes realizados en el trimestre:**

4 5 8 7 7

¿Cuál es la nota media de la evaluación?

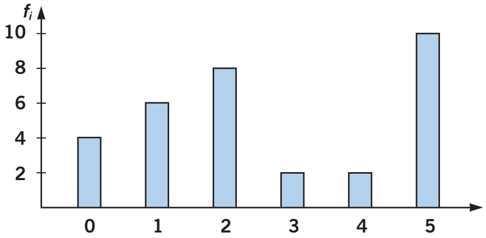
La nota media es: $\overline{x} = \frac{4 + 5 + 8 + 7 + 7}{5} = 6{,}2$

024 **En la tabla aparece el número de ordenadores que tienen los trabajadores de una empresa. Copia y completa la tabla, y halla la media.**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
0	**2**	0
1	**25**	25
2	**65**	130
3	**8**	24
	100	179

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 8}{100} = \frac{179}{100} = 1{,}79 \text{ ordenadores}$$

025 **Este diagrama de barras muestra el número de llamadas telefónicas recibidas por un grupo de personas.**



Realiza la tabla de frecuencias y complétala para calcular la media aritmética.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
0	4	0
1	6	6
2	8	16
3	2	6
4	2	8
5	10	50
	32	86

$$\overline{x} = \frac{86}{32} = 2{,}6875 \text{ llamadas}$$

026 **Las edades de un grupo de 8 amigas son: 16, 15, 17, 15, 17, 14, 15 y 16 años, respectivamente. Calcula la media de edad y la mediana.**

$$\overline{x} = \frac{14 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 17}{8} = 15{,}625 \text{ años}$$

$$14,\ 15,\ 15,\ \underbrace{15,\ 16,}\ 16,\ 17,\ 17$$

$$Me = \frac{15 + 16}{2} = 15{,}5 \text{ años}$$

027 **Las temperaturas diarias, en °C, obtenidas en una ciudad, durante un mes son:**

18 19 22 16 21 20 19 18 17 22 21 23 25 19 20
19 22 21 20 24 23 21 19 14 23 19 18 19 20 21

Compara la temperatura media y la mediana del mes.

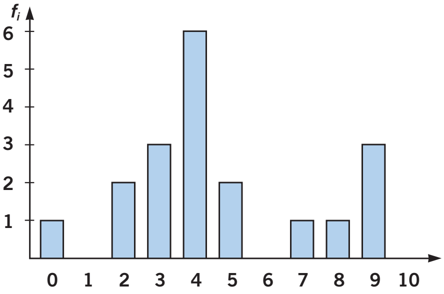
14, 16, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 20, $\underbrace{20, 20,}$ 20, 21, 21, 21, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 25

$$\overline{x} = \frac{603}{30} = 20{,}1\ °\text{C} \qquad Me = \frac{20 + 20}{2} = 20\ °\text{C}$$

La media es ligeramente mayor que la mediana.

028 **Los datos sobre los libros leídos por un grupo de personas en el último año se representan en este diagrama de barras:**

¿Cuál es la mediana? ¿Y la media?



0, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, $\underbrace{4}$, **4**, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 9, 9

$$\overline{x} = \frac{89}{19} = 4{,}68 \text{ libros} \qquad Me = 4 \text{ libros}$$

029 **Halla la moda de los datos que se presentan en esta tabla de frecuencias:**

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	2	1	5	4	2	1	2	2	1	1

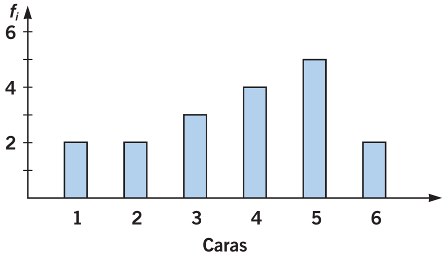
Mo = 3, que se repite 5 veces.

030 **Se ha lanzado 18 veces un dado de parchís, obteniéndose estos resultados:**

1 4 5 5 6 2 3 5 2 3 4 4 5 6 3 1 5 4

Representa gráficamente los datos y calcula la moda.

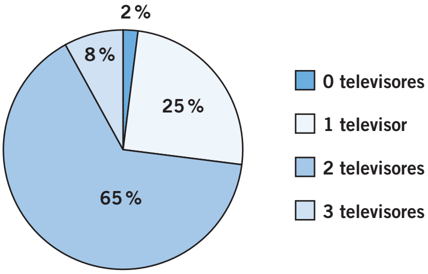
x_i	f_i
1	2
2	2
3	3
4	4
5	5
6	2



Mo = 5

031 **El siguiente diagrama de sectores muestra el número de televisores que hay en cada una de las 100 viviendas de una urbanización.**

Calcula las medidas de centralización.



x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	F_i
0	2	0	2
1	25	25	27
2	65	130	92
3	8	24	100
	100	179	

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 8}{100} = 1{,}79 \text{ televisores}$$

$Me = 4$ televisores $\qquad$ $Mo = 2$ televisores

ACTIVIDADES

032 ●

Indica cuáles son la población, la muestra y los individuos de estos estudios estadísticos referidos a los alumnos de tu centro educativo.

a) Número de asignaturas aprobadas.

b) Altura de la madre de cada alumno.

c) Marca del coche de los padres de cada alumno.

En los tres casos tenemos que:

- Población: todos los habitantes del centro.
- Muestra: los alumnos elegidos para realizar el estudio.
- Individuos: cada uno de los alumnos a los que se les pregunta.

033 ●●

Se quiere realizar un estudio sobre el número de piezas de fruta consumidas a lo largo del día por los jóvenes de edades entre los 12 y 14 años. Para ello se eligen 10 alumnos de 2.º ESO de cada uno de los 15 centros educativos de una ciudad.

Corrige las siguientes afirmaciones.

a) La población que se va a estudiar es los habitantes de la ciudad.

b) La muestra es los 10 alumnos escogidos de un centro.

c) La variable estadística es el conjunto de los alumnos de 2.º ESO escogidos.

d) El tamaño de la muestra es 15.

e) La muestra es el conjunto de alumnos de 2.º ESO.

f) La población se calcula multiplicando los 10 alumnos escogidos por los 15 centros.

a) La población que se va a estudiar es los alumnos de 2º ESO de los 15 centros educativos de la ciudad.
b) La muestra es los 10 alumnos escogidos de cada uno de los 15 centros.
c) La variable estadística es el número de piezas de fruta consumidas.
d) El tamaño de la muestra es 150.
e) La población es el conjunto de alumnos de 2.º ESO de los 15 centros.
f) La muestra se calcula multiplicando los 10 alumnos escogidos por los 15 centros.

034 ●

Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas cada una de las siguientes características referidas a la población.

a) Medida del pie.
b) Lugar de nacimiento.
c) Profesión.
d) Deporte que se practica.
e) Número de días de vacaciones al año.
f) Comida preferida.
g) Tiempo dedicado al sueño diario.

Decide si las cuantitativas son discretas o continuas.

a) Cuantitativa continua
b) Cualitativa
c) Cualitativa
d) Cualitativa
e) Cuantitativa discreta
f) Cualitativa
g) Cuantitativa continua

035 ●●

Una variable estadística toma los siguientes valores:

2 3 1 2 2 2   4 3 4 5 2 1

a) Realiza un recuento.
b) Calcula las frecuencias absolutas.
c) Halla las frecuencias relativas.
d) Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

a)

Dato	Recuento	
1	||	2
2	𝍸	5
3	||	2
4	||	2
5	|	1

b), c) y d)

Dato	f_i	h_i
1	2	0,17
2	5	0,41
3	2	0,17
4	2	0,17
5	1	0,08

036 ●

Construye una tabla de frecuencias, incluyendo frecuencias absolutas, relativas y acumuladas a partir de estos datos.

a)

Dato	**1**	**3**	**4**	**6**	**10**
Frecuencia absoluta	**2**	**4**	**3**	**1**	**5**

b)

Dato	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**
Frecuencia absoluta	**3**	**2**	**13**	**2**	**5**

a)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
1	2	2	0,13	0,13
3	4	6	0,27	0,4
4	3	9	0,2	0,6
6	1	10	0,07	0,67
10	5	15	0,33	1

b)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
0	3	3	0,12	0,12
3	2	5	0,08	0,2
6	13	18	0,52	0,72
9	2	20	0,08	0,8
12	5	25	0,2	1

037 ●●

Las notas obtenidas en un examen por los alumnos de una clase han sido:

5 4 3 6 8 5   4 9 6 7 8 10

4 3 2 5 5 6   7 9 6 8 6 5

a) Realiza una tabla de frecuencias con las notas obtenidas.

b) Construye otra tabla de frecuencias agrupando los datos en insuficiente (1, 2, 3, 4), suficiente (5), bien (6), notable (7, 8), sobresaliente (9, 10).

a)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
2	1	1	0,0417	0,0417
3	2	3	0,0833	0,125
4	3	6	0,125	0,25
5	5	11	0,2083	0,4583
6	5	16	0,2083	0,6666
7	2	18	0,0833	0,7499
8	3	21	0,125	0,8749
9	2	23	0,0833	0,9582
10	1	24	0,0417	1

b)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
Insuficiente	6	6	0,25	0,25
Suficiente	5	11	0,2083	0,4583
Bien	5	16	0,2083	0,6666
Notable	5	21	0,2083	0,8749
Sobresaliente	3	24	0,125	1

038 **La estatura, en cm, de cada uno de los 24 alumnos de una clase es:**

147 148 149 149
152 153 153 154
158 158 159 159
150 150 151 151
156 157 157 158
160 160 160 161

a) Realiza el recuento de datos.

b) Construye una tabla de frecuencias incluyendo el porcentaje de cada dato.

a)

Dato	Recuento	
147	I	1
148	I	1
149	II	2
150	II	2
151	II	2
152	I	1
153	II	2
154	I	1
156	I	1
157	II	2
158	III	3
159	II	2
160	III	3
161	I	1

b)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
147	1	1	0,0417	0,0417
148	1	2	0,0417	0,0834
149	2	4	0,0833	0,1667
150	2	6	0,0833	0,25
151	2	8	0,0833	0,3333
152	1	9	0,0417	0,375
153	2	11	0,0833	0,4583
154	1	12	0,0417	0,5
156	1	13	0,0417	0,5417
157	2	15	0,0833	0,625
158	3	18	0,125	0,75
159	2	20	0,0833	0,8333
160	3	23	0,125	0,9583
161	1	24	0,0417	1

039 ●●

Copia y completa esta tabla de frecuencias:

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2	8	**0,25**
3	**7**	0,2188
7	4	**0,125**
20	**13**	0,4062
	32	1

040 ●

La estatura, en cm, de un grupo de jóvenes es:

158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**
158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**
158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**
158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**
158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**
158	**158**	**158**	**158**	**159**	**159**	**160**	**162**

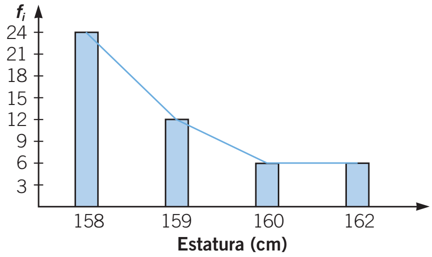
a) Construye una tabla de frecuencias, incluyendo las frecuencias acumuladas.

b) Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias correspondiente.

a)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
158	24	24	0,5	0,5
159	12	36	0,25	0,75
160	6	42	0,125	0,875
162	6	48	0,125	1

b)



041 ●

Los resultados de lanzar 50 veces un dado son:

1	**3**	**2**	**5**	**3**	**2**	**1**	**6**	**4**	**3**
3	**2**	**2**	**5**	**6**	**6**	**1**	**3**	**2**	**1**
2	**4**	**3**	**1**	**2**	**4**	**3**	**1**	**5**	**5**
6	**2**	**1**	**2**	**6**	**5**	**4**	**4**	**4**	**2**
3	**6**	**6**	**2**	**1**	**5**	**3**	**4**	**1**	**5**

a) Construye la tabla de frecuencias.

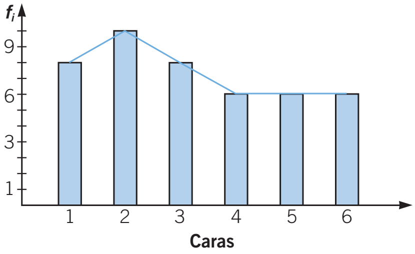
b) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas.

c) Representa el diagrama de sectores con los porcentajes de cada dato.

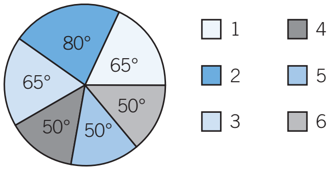
a)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
1	9	9	0,18	0,18
2	11	20	0,22	0,4
3	9	29	0,18	0,58
4	7	36	0,14	0,72
5	7	43	0,14	0,86
6	7	50	0,14	1

b)



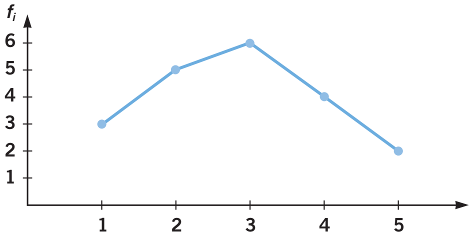
c)



042

●●

Observa este polígono de frecuencias:



Indica, razonadamente, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) La frecuencia absoluta de 5 es 0,3.

b) La frecuencia absoluta acumulada de 4 es 4.

c) La frecuencia relativa de 5 es 2.

d) El porcentaje de 4 es 20 %.

a) Falsa: La frecuencia absoluta de 5 es 2.

b) Falsa: La frecuencia absoluta acumulada de 4 es 18.

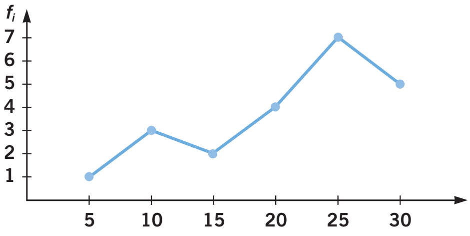
c) Falsa: La frecuencia relativa de 5 es 0,1.

d) Cierta

043

●●

Construye la tabla de frecuencias a partir del siguiente polígono de frecuencias:



Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
5	1	1	0,0454	0,0454
10	3	4	0,1363	0,1817
15	2	6	0,0909	0,2726
20	4	10	0,1818	0,4544
25	7	17	0,3182	0,7726
30	5	22	0,2273	1

044 ●

Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a cada tabla.

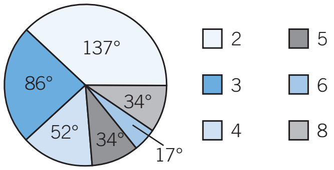
a) X **= N.º de hermanos**

X	2	3	4	5	6	8
f_i	8	5	3	2	1	2

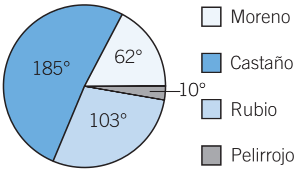
b) X **= Color del pelo**

X	Moreno	Castaño	Rubio	Pelirrojo
f_i	6	18	10	1

a)



b)

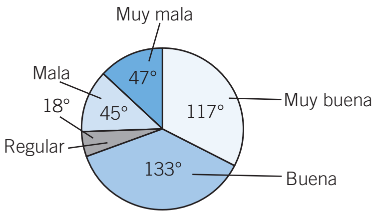


045 ●●

En una población de 100 000 habitantes se realiza una encuesta a 2 000 personas sobre la opinión que tienen de la construcción de un aparcamiento, obteniéndose estos resultados:

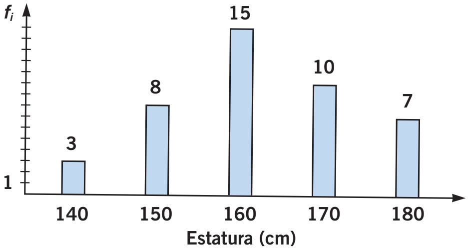
Valoración	N.º de personas
Muy buena	650
Buena	740
Regular	100
Mala	250
Muy mala	260

Realiza el gráfico estadístico que creas más adecuado para esta información e interprétalo.



046 ●●

En el diagrama de barras aparecen representada la estatura de un grupo de personas.



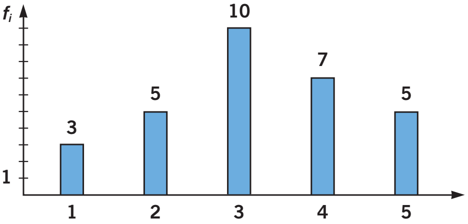
Razona qué afirmación es cierta:

- **30 miden más de 160 cm.**
- **26 miden entre 140 y 160 cm.**
- **35 miden menos de 180 cm.**
- **3 miden más de 130 cm.**

Es cierta la afirmación que indica que 26 personas miden entre 140 y 160 cm.

047 ●●

Construye la tabla de frecuencias a partir del siguiente diagrama de barras:



Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
1	3	3	0,1	0,1
2	5	8	0,17	0,27
3	10	18	0,33	0,6
4	7	25	0,23	0,83
5	5	30	0,17	1

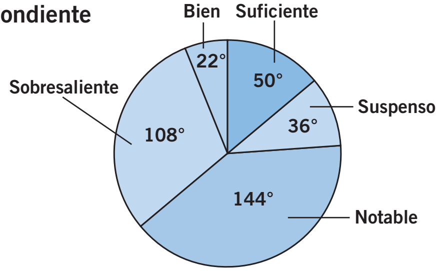
048 ●●

Este es el diagrama de sectores correspondiente a las notas de 40 alumnos.

a) Construye la tabla de frecuencias correspondiente.

b) Calcula los porcentajes de cada calificación.

c) ¿Cuántos alumnos han aprobado la asignatura?



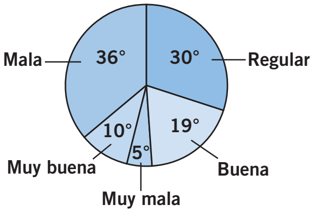
a) y b)

Dato	Ángulo	f_i	h_i	%
Suspenso	36°	4	0,1	10 %
Suficiente	50°	6	0,14	14 %
Bien	22°	2	0,06	6 %
Notable	144°	16	0,4	40 %
Sobresaliente	108°	12	0,3	30 %

c) Han aprobado la asignatura: $6 + 2 + 16 + 12 = 36$ alumnos

049 ●●

Observa el siguiente diagrama de sectores, en el que se representan los resultados de una encuesta realizada a 5 000 personas sobre la calidad del agua de su localidad:



a) Construye una tabla con las frecuencias absolutas y relativas de cada opinión. Incluye también las frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántas personas consideran el agua es muy mala?

c) ¿Cuántas personas creen que el agua es mala o regular?

d) ¿Y cuántas creen que es buena o muy buena?

a)

Dato	%	f_i	F_i	h_i	H_i	Ángulo
Muy mala	5 %	250	250	0,05	0,05	18°
Mala	36 %	1806	2056	0,36	0,41	130°
Regular	30 %	1500	3556	0,3	0,71	108°
Buena	19 %	944	4500	0,19	0,9	68°
Muy buena	10 %	500	5000	0,1	1	36°

b) Consideran que el agua es muy mala 250 personas.

c) Consideran que es mala o regular $1806 + 1500 = 3306$ personas

d) Creen que es buena 944 personas.

050 ●

Calcula la media de los siguientes conjuntos de datos.

a) 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 2 **b) 2, 3, 2, 4, 5, 6, 5, 6, 6, 5**

a) $$\overline{x} = \frac{1+1+2+1+3+2+1+2+2+1+1+3+1+1+2}{15} = 1{,}6$$

b) $$\overline{x} = \frac{2+3+2+4+5+6+5+6+6+5}{10} = 4{,}4$$

051 ●

Determina la media, la mediana y la moda de estos datos.

a) 11, 11, 12, 11, 13, 12, 11, 12, 12, 11, 11

b) 20, 23, 27, 24, 25, 26, 25, 26, 26, 25

c) 5, 10, 5, 10, 15, 10, 5, 10, 15, 20, 10

d) 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2

a) $\overline{x} = \dfrac{11 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 13}{11} = 11{,}5 \quad Me = 11 \quad Mo = 11$

b) $\overline{x} = \dfrac{20 + 23 + 24 + 25 \cdot 3 + 26 \cdot 3 + 27}{10} = 24{,}7$

$Me = 25$ Hay dos modas, 25 y 26.

c) $\overline{x} = \dfrac{5 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 20}{11} = 10{,}45 \quad Me = 10 \quad Mo = 10$

d) $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 2}{18} = 1{,}67 \quad Me = 2$ Hay dos modas, 1 y 2.

052 ●●

El año pasado las entradas a un país de visitantes procedentes del extranjero, expresadas en miles, fueron:

Enero	3 002
Febrero	2 920
Marzo	3 523
Abril	4 223
Mayo	5 041
Junio	5 064
Julio	9 060
Agosto	10 401
Septiembre	6 506
Octubre	4 778
Noviembre	3 126
Diciembre	3 782

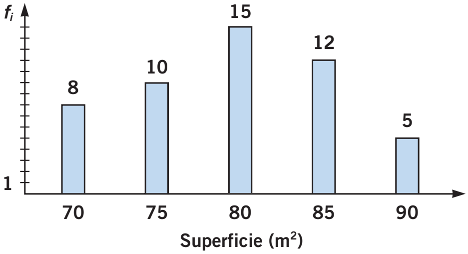
¿Cuál fue la media de visitantes? ¿Y la mediana?

$$\overline{x} = \frac{61\,426}{12} = 5\,118{,}8 \text{ visitantes}$$

$$Me = \frac{4\,223 + 4\,778}{2} = 4\,500{,}5 \text{ visitantes}$$

053 ●●

En el siguiente diagrama de barras se muestran los metros cuadrados de la vivienda habitual de un grupo de familias.



a) ¿A cuántas familias se ha encuestado?
b) ¿Cuántos viven en una casa de más de 80 m^2?
c) ¿Cuál es la superficie media de las viviendas?
d) ¿Cuál es la mediana de los datos representados? ¿Y la moda?

a) Se ha encuestado a 50 familias.
b) De las familias encuestadas, 17 familias viven en una casa de más de 80 m^2.
c) La superficie media de las viviendas es de 79,6 m^2.
d) La mediana es 80, y la moda, 80.

054 ●●

El número de restaurantes en 20 ciudades es:

60 50 50 61 51 64 62 65 53 68
70 70 71 56 60 58 60 59 69 54

a) ¿Qué porcentaje de ciudades tienen más de 60 restaurantes?

b) Calcula la media, mediana y moda de los restaurantes.

a) El 45 % de las ciudades estudiadas tienen más de 60 restaurantes.

b) $\overline{x} = \frac{1211}{20} = 60{,}55$ restaurantes

$Me = 60$ restaurantes $\quad Mo = 60$ restaurantes

055 ●●

Las edades de los padres de 20 alumnos de 2.º ESO de un instituto son:

43 40 44 46 50 51 52 46 47 45
40 43 44 46 44 46 48 49 48 46

a) Construye una tabla de frecuencias.

b) Calcula media, mediana y moda.

a)

Dato	f_i	F_i	h_i	H_i
40	2	2	0,1	0,1
43	2	4	0,1	0,2
44	3	7	0,15	0,35
45	1	8	0,05	0,4
46	5	13	0,25	0,65
47	1	14	0,05	0,7
48	2	16	0,1	0,8
49	1	17	0,05	0,85
50	1	18	0,05	0,9
51	1	19	0,05	0,95
52	1	20	0,05	1

b) $\overline{x} = \frac{918}{20} = 45{,}9$ años

$Me = 46$ años $\quad Mo = 46$ años

056 ●●

Un frutero tiene sacos de cebollas de 2 kg, 5 kg y 10 kg. Durante un día ha vendido 10 sacos de 2 kg, 5 sacos de 5 kg y 2 sacos de 10 kg.

a) ¿Cuál es el número medio de kilogramos de cebollas que ha vendido?

b) ¿Qué saco de cebollas ha sido el más vendido?

a) $\overline{x} = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 10 \cdot 2}{17} = \frac{65}{17} = 3{,}82$ kg

b) El saco de 2 kg ha sido el más vendido.

057 ●●

Las edades, en años, de los 10 primeros visitantes a una exposición son las siguientes:

22 30 34 22 18 10 41 22 21 20

a) Calcula la media de las edades de los 10 primeros visitantes.

b) ¿Qué edad se repite con mayor frecuencia?

a) $\overline{x} = \dfrac{22 + 30 + 34 + 22 + 18 + 10 + 41 + 22 + 21 + 20}{10} = 20{,}8$ años

b) La edad que más se repite es 22 años.

058

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA E INTERPRETA LA MODA?

Calcula la moda de las notas obtenidas en un examen por nueve estudiantes:

7 8 4 3 4 5 7 9 6

Notas	f_i
3	1
4	2
5	1
6	1
7	2
8	1
9	1

PRIMERO. Se organizan los datos en una tabla de frecuencias.

SEGUNDO. Se estudia la columna de las frecuencias obtenidas y se elige el número o los números mayores.

En este caso, es el 2.

Hay dos modas, que son las notas 4 y 7.

TERCERO. Se interpretan los resultados.

Lo más frecuente en este grupo es encontrar alumnos que han obtenido un 4 o un 7.

059 ●●

En el servicio de urgencias de un hospital han ingresado 26 pacientes de estas edades:

87 14 52 65 74 43 28
31 18 10 21 28 49 53
9 12 17 25 93 42
64 75 34 41 18 3

a) ¿Cuál es la edad media de los pacientes?

b) ¿Cuál es la mediana? ¿Y la moda?

3, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 18, 21, 25, 28, 28, $\underbrace{31, 34,}$ 41, 42, 43, 49, 52, 53, 64, 65, 74, 75, 87, 93

a) $\overline{x} = \dfrac{1\,006}{26} = 38{,}7$ años

b) $Me = \dfrac{31 + 34}{2} = 32{,}5$ años

Hay dos modas: 18 y 28

060 ●●●

Esta es la tabla que resume un estudio sobre el número de hijos de las familias de una ciudad.

N.º de hijos	Porcentaje
0	12,5 %
1	30 %
2	30 %
3	15 %
4	12,5 %

Sabiendo que se preguntó a un número de familias comprendido entre 620 y 650, ¿puedes deducir a cuántas familias se entrevistó?

Todos los porcentajes deben corresponder a un número entero de respuestas.

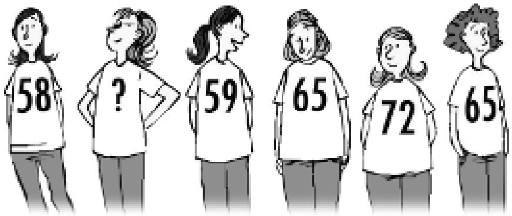
Si el 12,5 % del total es un número entero, esto significa que al multiplicar por 0,125; el resultado tiene que ser un número entero múltiplo de 8, por lo que puede ser 624, 632, 640 o 648.

De la misma manera, si el 30 % del total es un número entero, esto significa que, al multiplicar por 0,3; el resultado es un número entero, por lo que debe ser múltiplo de 10.

Por tanto, la única solución posible es 640 familias.

061 ●●●

El peso medio de 6 amigas es 62 kg. Si los pesos de 5 de ellas son: 58, 65, 59, 65 y 72 kg, ¿cuánto pesa la sexta amiga?



Si el peso medio es 62 kg, la suma de los pesos es $62 \cdot 6 = 372$ kg, por lo que el peso de la sexta amiga es:

$$372 - (58 + 65 + 59 + 65 + 72) = 372 - 319 = 53 \text{ kg}$$

062 ●●●

Si en una tabla conocemos las frecuencias relativas, ¿podrías calcular las frecuencias absolutas?

Para conocer las frecuencias absolutas necesitamos, además de las frecuencias relativas, el tamaño de la muestra o alguna de las frecuencias absolutas.

063 ●●● **¿Puede existir una serie de datos que no tenga media? ¿Y que no tenga mediana? ¿Y moda? Razona tu respuesta.**

Si los datos corresponden a una variable cualitativa no tendrá media ni mediana, ya que los valores de la variable no son numéricos.

La moda existe siempre, aunque puede no ser única.

064 ●●● **Si a todos los datos obtenidos en un estudio estadístico:**

a) Les sumamos una cierta cantidad.

b) Los multiplicamos por un mismo número.

¿Qué le sucede a la media de la nueva serie?

***Sugerencia*: elige un ejemplo con pocos datos y calcula la media. Realiza las operaciones que se indican y vuelve a calcular la media. Después, compara las dos medias obtenidas y generaliza el resultado.**

a) La media resultante es la media original más la cantidad sumada.

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \ldots + (x_N + a)}{N} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N + a \cdot N}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} + a = \overline{x}_1 + a$$

b) La media resultante es la media original multiplicada por la cantidad.

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{(x_1 \cdot a) + (x_2 \cdot a) + \ldots + (x_N \cdot a)}{N} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_N) \cdot a}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \cdot a = \overline{x}_1 \cdot a$$

065 ●●● **Inventa una situación con seis datos en la que se cumpla que:**

$$\overline{x} = 6 \qquad Me = 4 \qquad Mo = 5$$

Como $Me = 4$ y es una cantidad par de datos, la suma de los dos datos intermedios será 8.

Teniendo en cuenta que hay un 5, los dos datos son 3 y 5, y habrá dos números por encima y otros dos por debajo.

La suma de los 6 datos será 36 porque la media es 6.

Además, como 5 aparece 3 veces, serán los tres números mayores, por lo que la media no es 6.

Por ser $Mo = 5$, tenemos que 5 es el dato que más se repite.

Si 5 aparece 2 veces, la suma de los 3 datos desconocidos será 23, los números menores que 3 serán 1 y 2 (ya que no se pueden repetir, por ser la moda 5), y el número mayor será 20.

Solución: 1, 2, 3, 5, 5, 20

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

066 ●●●

En la asignatura de Matemáticas, el profesor nos ha dicho que a lo largo de la evaluación vamos a realizar dos trabajos, un examen parcial y un examen global. Además, todas las pruebas van a ser calificadas con notas del 1 al 10.

Para obtener la calificación final, el profesor nos ha explicado que las puntuaciones se van a repartir de este modo:

- **Los dos trabajos tienen el mismo valor.**
- **El examen parcial vale el doble que cada uno de los trabajos.**
- **El examen global vale cuatro veces más que los trabajos.**

A esto el profesor lo ha llamado *media ponderada*.

ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) Teniendo en cuenta el reparto de puntuación en los trabajos y los exámenes, ¿cuál será la calificación final de Irene?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

b) ¿Qué nota debe sacar Iván en el examen global?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

c) Marta ha sacado 9 en el examen parcial y 8 en el examen global. Ella está convencida de que su calificación final será 9. ¿Crees que es posible?

a) $$\text{Media ponderada} = \frac{\text{Trabajo 1} + \text{Trabajo 2} + 2 \cdot \text{Parcial} + 4 \cdot \text{Final}}{8}$$

$$\overline{x} = \frac{8{,}5 + 6{,}5 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 8{,}25}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

Irene tendrá un 8 como nota final.

b) $$7 = \frac{6{,}5 + 5{,}5 + 2 \cdot 5{,}5 + 4x}{8} = 56 = 23 + 4x$$

$$\rightarrow 4x = 33 \rightarrow x = 8{,}25$$

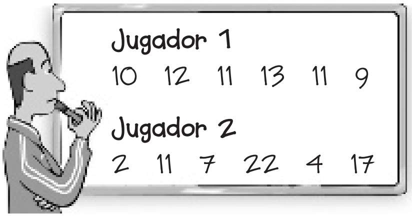
Para sacar un 7 de media, Iván necesita sacar, al menos, un 8,25 en el examen final.

c) $$9 = \frac{x + y + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8}{8} \rightarrow 22 = x + y$$

Para que Marta saque un 9, tendría que sacar más de 10 en los trabajos. Por tanto, no es posible que su calificación final sea 9.

067 **La liga de baloncesto de una ciudad está en su fase final, y los partidos que faltan por disputar son importantes para decidir quién será el campeón este año. En uno de los equipos participantes hay dudas sobre la elección de alguno de sus jugadores.**

En los últimos partidos de este equipo dos de sus jugadores han obtenido estas puntuaciones, respectivamente.



ERES CAPAZ DE… COMPRENDER

a) ¿Cuántos han sido los puntos máximos de cada uno de los jugadores?

b) ¿Y los puntos mínimos?

ERES CAPAZ DE… RESOLVER

c) ¿Cuánto tienen que encestar en el próximo partido para que ambos jugadores consigan obtener la misma media de puntos?

ERES CAPAZ DE… DECIDIR

d) En los últimos minutos de un partido, ambos jugadores están en el banquillo. El entrenador no está seguro de a quién debe sacar para conseguir la victoria.
Si tú fueras el entrenador, ¿a cuál de ellos elegirías para jugar el final de ese partido?

a) Los puntos máximos del jugador 1 han sido 13, y los del jugador 2, han sido 22.

b) Los puntos mínimos del jugador 1 han sido 9, y los del jugador 2, han sido 2.

c) • Media del jugador 1:

$$\overline{x} = \frac{10 + 12 + 11 + 13 + 11 + 9}{6} = \frac{66}{6} = 11 \text{ puntos}$$

• Media del jugador 2:

$$\overline{x} = \frac{2 + 14 + 7 + 22 + 4 + 17}{6} = \frac{66}{6} = 11 \text{ puntos}$$

Hasta este partido, los dos jugadores han obtenido la misma media, por tanto, en el próximo partido tendrían que obtener los mismos puntos para que la media siga siendo la misma.

d) Sería preferible sacar a jugar al segundo jugador, ya que aunque las medias coinciden, los resultados son más extremos y puede ser un revulsivo para el equipo.

Dirección de arte: **José Crespo**

Proyecto gráfico:
Portada: **Pep Carrió**
Interiores: **Rosa María Barriga**

Ilustración: **Lincel, Enrique Cordero, Ignacio Galilea, José María Valera**

Fotografía de cubierta: **Antonio Fernández**

Jefa de proyecto: **Rosa Marín**
Coordinación de ilustración: **Carlos Aguilera**
Jefe de desarrollo de proyecto: **Javier Tejeda**
Desarrollo gráfico: **Rosa María Barriga, José Luis García, Raúl de Andrés, Jorge Gómez**

Dirección técnica: **Ángel García Encinar**

Coordinación técnica: **Lourdes Román**
Confección y montaje: **Alfonso García, Hilario Simón, Marisa Valbuena**

Corrección: **Livia Villaluenga, Gerardo Z. García**
Documentación y selección fotográfica: **Nieves Marinas**

Fotografías: A. Toril; D. López; GARCÍA-PELAYO/Juancho/CSIC/ INSTITUTO DE FILOLOGÍA; J. Jaime; J. L. G. Grande; Krauel; M.ª A. Ferrándiz; S. Enríquez; A. G. E. FOTOSTOCK; COMSTOCK; GETTY IMAGES SALES SPAIN/Photos.com Plus; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. Preysler; ISTOCKPHOTO; PHOTODISC; STOCK PHOTOS; MATTON-BILD; Samsung; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; ARCHIVO SANTILLANA

Torrelaguna, 60. 28043 Madrid
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España por

ISBN: 978-84-680-0019-0
CP: 280854
Depósito legal: