

Probabilidad

EJERCICIOS

001 Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas.

- a) Extraer una carta de una baraja.
- b) Pesar un litro de mercurio.
- c) Preguntar a tus compañeros un número.
- d) Lanzar tres monedas y anotar el número de caras.
- e) Restar dos números conocidos.

Los experimentos de a), c) y d) son aleatorios, y los de b) y e) son deterministas.

002 En una bolsa hay 10 bolas de 3 colores diferentes. Escribe un experimento aleatorio y otro determinista.

Aleatorio: extraer una bola de la bolsa.

Determinista: hallar el peso de las tres bolas.

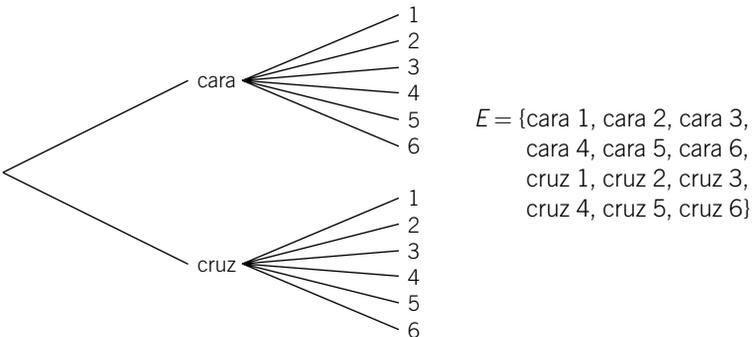
003 Propón dos experimentos aleatorios. Determina sus sucesos elementales y dos sucesos compuestos.

- Experimento 1: preguntar un número del 1 al 10.
Sucesos elementales: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}.
Suceso compuesto: obtener un número par.
- Experimento 2: acertar en la Quiniela.
Sucesos elementales: {0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9}, {10}, {11}, {12}, {13}, {14}.
Suceso compuesto: acertar las apuestas suficientes para obtener premio.

004 Escribe los posibles resultados que se pueden obtener en el experimento aleatorio de lanzar dos monedas al aire.

Si llamamos c = cara, x = cruz, los posibles resultados serían: (c, c) , (c, x) , (x, c) y (x, x) .

005 Lanzamos una moneda y un dado de seis caras. ¿Cuál es el espacio muestral? Ayúdate con un diagrama de árbol.



006 Determina dos sucesos compatibles y otros dos incompatibles en el ejercicio anterior.

Compatibles: cruz y múltiplo de 3, cruz y par.

Incompatibles: cara y par, cruz y menor que 3.

007 ¿Existe algún suceso incompatible con todos los demás? ¿Y compatible?

Un suceso incompatible con todos los demás es el suceso imposible y el compatible con todos es el suceso seguro.

008 Dados los sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, calcula su unión e intersección.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

009 Al extraer una carta de la baraja española, expresa en forma de uniones e intersecciones los siguientes sucesos.

- a) «Que salga un número menor que 5 y mayor que 2».
 b) «Que salga una figura y sea de bastos».
 c) «Que no salga un as».

a) $\{\text{Salir número menor que 5}\} \cap \{\text{Salir número mayor que 2}\}$

b) $\{\text{Salir figura}\} \cap \{\text{Salir bastos}\}$

c) $\{\text{Salir número mayor o igual que 2}\} \cup \{\text{Salir figura}\}$

Otra forma de hacerlo sería utilizando el suceso complementario:
 si $A = \{\text{Salir as}\} \rightarrow \bar{A} = \{\text{No salir as}\}$.

010 Extraemos una carta de la baraja. Halla la unión y la intersección de las parejas de sucesos.

- a) $A = \text{«Sacar oros»}$ y $B = \text{«Sacar copas»}$
 b) $C = \text{«Sacar as»}$ y $D = \text{«No sacar as»}$
 c) $F = \text{«Sacar bastos»}$ y $G = \text{«Sacar as»}$

a) $A \cup B = \{\text{Sacar oros o copas}\} \rightarrow A \cap B = \emptyset$

b) $C \cup D = E \rightarrow A \cap B = \emptyset$

c) $F \cup G = \{\text{Sacar bastos o as}\} \rightarrow A \cap B = \{\text{Sacar as de bastos}\}$

011 ¿Puede coincidir la unión de dos sucesos con uno de ellos? Si es así, ¿qué sucede con su intersección?

La unión de dos sucesos coincide con uno de ellos cuando uno está incluido en el otro; en este caso, la unión de los dos sucesos es el suceso mayor y la intersección es el menor.

Probabilidad

012 Al lanzar un dado de 8 caras consideramos los siguientes sucesos.

$$A = \{2, 4, 5, 8\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 7\}$$

Calcula.

a) $A \cup B$

d) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cap B$

e) $\overline{A \cup B}$

c) $\overline{A \cap B}$

f) $\overline{A} \cap \overline{B}$

¿Qué observas en los resultados c) y d)? ¿Y en los resultados e) y f)?

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

b) $A \cap B = \{2\}$

c) $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $\overline{A} = \{1, 3, 6, 7\}$ $\overline{B} = \{4, 5, 6, 8\}$ \rightarrow $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

e) $\overline{A \cup B} = \{6\}$

f) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{6\}$

Se cumple que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

013 Considera el experimento aleatorio de lanzar una moneda.

Calcula el espacio muestral y todos los sucesos que puedas, clasificándolos en elementales y compuestos. Halla, para cada uno de los sucesos anteriores, su complementario.

$$E = \{\text{cara, cruz}\}$$

Suceso	Complementario
\emptyset	E
{cara}	{cruz}
{cruz}	{cara}
E	\emptyset

014 Si un suceso A está contenido en otro suceso B , ¿qué sucede con sus complementarios?

El complementario de A contiene al complementario de B .

015 Lanzamos 2 dados y sumamos los puntos que salen. Determina:

a) Un suceso seguro.

b) Un suceso imposible.

¿Cuál será la probabilidad de estos dos sucesos?

a) Suceso seguro: «Sacar más de un punto». Probabilidad 1.

b) Suceso imposible: «Sacar más de 12 puntos». Probabilidad 0.

016 En una urna hay 5 bolas blancas y 4 bolas rojas. Escribe:

a) Un suceso imposible.

b) Un suceso seguro.

a) Suceso imposible: «Sacar bola verde».

b) Suceso seguro: «No sacar bola azul».

Probabilidad

020 De una baraja española extraemos una carta. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caballo? ¿Y una figura? ¿Y oros? ¿Y una sota que no sea de copas?

$$P(\text{caballo}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{sota no de copas}) = \frac{3}{40}$$

021 En una caja hay 5 bolas amarillas y 7 bolas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola amarilla? ¿Y una bola roja?

$$P(\text{bola amarilla}) = \frac{5}{12} \qquad P(\text{bola roja}) = \frac{7}{12}$$

022 Piensa en un experimento cuyos sucesos elementales sean equiprobables, pero en el que sea imposible aplicar la regla de Laplace.

Por ejemplo, al elegir un punto de un intervalo de la recta real, no se puede aplicar la regla de Laplace porque el número de casos posibles es infinito.

023 Se ha lanzado una moneda 85 veces, obteniéndose 43 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso «Salir cruz»?

- a) $\frac{43}{85}$ b) 42 c) $\frac{42}{85}$ d) 0,42

Si las caras son 43, las cruces serán 42. La frecuencia es c) $\frac{42}{85}$.

024 Se lanza un dado de 4 caras y se anotan las veces que no aparece la cara 1.

Lanzamientos	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27

- a) Obtén la tabla de frecuencias relativas.
b) ¿Hacia qué valor tiende?
c) ¿Qué probabilidad le asignarías?

a)

Lanzamientos	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,28	0,25	0,23	0,27

b) Tiende hacia 0,25.

c) $P(\text{no salir cara 1}) = \frac{1}{4}$

- 025** En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos 5.000 veces una bola, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Estos han sido los resultados.

Bola	1	2	3	4	5
f_i	1.200	800	700	1.300	1.000

Calcula la probabilidad de obtener múltiplo de 2.

Si en la bolsa hay 100 bolas, ¿cuántas son de cada clase? Justifica tu respuesta.

$$P(\text{sacar par}) = \frac{800 + 1.300}{5.000} = 0,42$$

Bola	f_i	h_i
1	1.200	0,24
2	800	0,16
3	700	0,14
4	1.300	0,26
5	1.000	0,20
Total	5.000	1

Como la probabilidad se aproxima con las frecuencias relativas, aplicando la regla de Laplace cuando el número de casos posibles es 100, tenemos que: 1-24, 2-16, 3-14, 4-26, 5-20.

- 026** Una máquina fabrica tornillos. ¿Cómo harías para calcular la probabilidad de que, escogido un tornillo al azar, sea defectuoso?

Tomaría una muestra de tornillos al azar, contaría los que están defectuosos y dividiría el número de tornillos defectuosos entre el tamaño de la muestra.

- 027** Se lanzan 2 dados y se suman sus puntos. Halla la probabilidad de que la suma sea:

a) 3 b) Mayor que 10. c) 7 d) 4 o 5

Al lanzar 2 dados se pueden dar 36 combinaciones posibles:

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

a) Hay 2 combinaciones que dan suma 3: (1, 2) y (2, 1).

$$P(\text{suma 3}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) Hay 3 combinaciones que dan suma mayor que 10: (5, 6), (6, 5) y (6, 6).

$$P(\text{suma mayor que 10}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) Hay 6 combinaciones que dan suma 7: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4) y (4, 3).

$$P(\text{suma 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d) Hay 7 combinaciones que dan suma 4 o 5: (2, 2), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3) y (3, 2).

$$P(\text{suma 4 o 5}) = \frac{7}{36}$$

Probabilidad

028 De una baraja española se extrae una carta. Obtén la probabilidad de que sea:

a) Espadas.

c) Sota u oros.

b) Espadas y rey.

d) Distinta a una figura.

$$a) P(\text{espadas}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$c) P(\text{sota u oros}) = \frac{3 + 10}{40} = \frac{13}{40}$$

$$b) P(\text{espadas y rey}) = \frac{1}{40}$$

$$d) P(\text{no figura}) = \frac{40 - 12}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

029 Una urna tiene 4 bolas blancas, 2 rojas y 5 negras. Calcula la probabilidad de sacar una bola:

a) Blanca.

b) Roja.

c) Blanca o negra.

$$a) P(\text{blanca}) = \frac{4}{11}$$

$$c) P(\text{blanca o negra}) = \frac{9}{11}$$

$$b) P(\text{roja}) = \frac{2}{11}$$

030 Si en un experimento aleatorio $P(B) = 0,2$ y, además, $P(A \cup B) = P(A)$, ¿son A y B incompatibles? ¿Y complementarios?

Como $P(A \cup B) = P(A)$, tenemos que: $P(A \cap B) = P(B) = 0,2$; por tanto, A y B no son incompatibles ni complementarios.

ACTIVIDADES

031 Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.

- a) Extraer una carta de la baraja española.
- b) Medir la hipotenusa en un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm.
- c) Lanzar 3 monedas y anotar el número de caras.
- d) Lanzar una chincheta y observar en qué posición queda.
- e) Apretar un pulsador que enciende una bombilla en un circuito eléctrico.
- f) Elegir al azar una ficha de dominó.
- g) Medir la altura de una clase.
- h) Lanzar una piedra al vacío y medir la aceleración.
- i) Averiguar el resultado de un partido antes de que se juegue.

Son aleatorios: a), c), d), f) e i).

Son deterministas: b), e), g) y h).

032 Escribe dos experimentos aleatorios y otros dos que no lo sean.

- Justifica tu respuesta.

Aleatorios: el peso de un alumno y el número que va a salir en la lotería.

No aleatorios: la edad de un alumno de 1.º de Educación Infantil y los años a los que se alcanza la mayoría de edad en España.

033 Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

- a) Extraer una carta de la baraja española.
 - b) Lanzar una chincheta y anotar la posición de caída.
 - c) Sacar una bola de una urna con 5 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes.
 - d) Lanzar 2 dados y restar las caras superiores.
 - e) Lanzar 2 dados y multiplicar las caras superiores.
 - f) Considerar las espadas de la baraja española y extraer una carta de ese grupo.
 - g) Escoger al azar un país de la Unión Europea.
- a) $E = \{\text{as, dos, ..., rey de oros, as, dos, ..., rey de copas, as, dos, ..., rey de espadas, as, dos, ..., rey de bastos}\}$
- b) $E = \{\text{hacia arriba, hacia abajo}\}$
- c) $E = \{\text{roja, azul, verde}\}$
- d) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- e) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$
- f) $E = \{\text{as, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, sota, caballo, rey}\}$
- g) $E = \{\text{Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Chipre, Dinamarca, Eslovaquia, Eslovenia, España, Estonia, Finlandia, Francia, Grecia, Hungría, Irlanda, Italia, Letonia, Lituania, Luxemburgo, Malta, Países Bajos, Polonia, Portugal, Reino Unido, República Checa, Rumanía, Suecia}\}$

034 Se lanzan 2 dados, uno rojo y otro azul.

- ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$



035 Se lanzan 2 dados y se multiplica el número de puntos obtenido en cada uno. ¿Cuántos resultados se pueden obtener? Describe el espacio muestral e indica dos sucesos que no sean elementales.

Hay 18 resultados diferentes.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{12\}, \{15\}, \{16\}, \{18\}, \{20\}, \{24\}, \{25\}, \{30\}, \{36\}$

Sucesos no elementales: «Par», «Menor que 20».

036 Elegimos una ficha de dominó al azar. Determina los elementos de:

- a) El espacio muestral.
 - b) $A = \{\text{«Elegir una ficha cuyos números sumen 6»}\}$
 - c) $B = \{\text{«Elegir una ficha cuyos números multiplicados den 12»}\}$
- Los sucesos A y B , ¿son compatibles o incompatibles?

a) El juego del dominó no diferencia entre (a, b) y (b, a) . $E = \{(0, 0), \dots, (6, 6)\}$

b) $A = \{(6, 0), (1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$

c) $B = \{(2, 6), (3, 4)\}$

$A \cap B = \emptyset \rightarrow$ Son incompatibles.

- c) $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
 Suceso compatible \longrightarrow «Sacar múltiplo de 7»
 Suceso incompatible \rightarrow «Sacar menor que 3»
 $\bar{C} = \text{«Menor o igual que 4»} = \{1, 2, 3, 4\}$
- d) $D = \{4, 5, 6, 7\}$
 Suceso compatible \longrightarrow «Sacar múltiplo de 5»
 Suceso incompatible \rightarrow «Sacar mayor que 12»
 $\bar{D} = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- e) $E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
 Suceso compatible \longrightarrow «Sacar múltiplo de 7»
 Suceso incompatible \rightarrow «Sacar par mayor que 10»
 $\bar{E} = \text{«No impar»} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

040 Al lanzar un dado de 6 caras, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Calcula.

- a) $A \cap B$ c) ¿Son A y B compatibles?
 b) $A \cup B$ d) Obtén el contrario de los sucesos A , B , $A \cap B$ y $A \cup B$.

Encuentra, entre los sucesos anteriores, una pareja de sucesos compatibles, otra de incompatibles y otra de contrarios.

- a) $A \cap B = \{2\}$
 b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
 c) $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow$ Son compatibles.
 d) $\bar{A} = \{1, 3, 5, 6\}$ $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$ $\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
 $\overline{A \cup B} = \{5, 6\}$
 A y B son compatibles $\rightarrow A \cap B \neq \emptyset$
 $A \cap B$ y \bar{B} son incompatibles $\rightarrow (A \cap B) \cap \bar{B} = \emptyset$
 A y \bar{A} son contrarios.

041 Se lanza un dado de 6 caras y se consideran los sucesos $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ y $C = \{3, 4\}$. Calcula.

- a) \bar{A} d) $A \cup B$ g) $\overline{A \cup B}$
 b) \bar{B} e) $A \cap B$ h) $\bar{A} \cap \bar{B}$
 c) \bar{C} f) $B \cup C$ i) $\bar{A} \cup \bar{B}$
- a) $\bar{A} = \{2, 4\}$ f) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 b) $\bar{B} = \{3, 6\}$ g) $\overline{A \cup B} = \emptyset$
 c) $\bar{C} = \{1, 2, 5, 6\}$ h) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$
 d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$ i) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 3, 4, 6\}$
 e) $A \cap B = \{1, 5\}$

Probabilidad

042 Sacamos dos cartas de una baraja española. Un suceso imposible es:

- a) «Sacar dos oros»
- b) «Sacar dos caballos de copas»
- c) «Sacar dos cartas de distinto palo»
- d) «Sacar dos figuras iguales del mismo palo»

Hay dos sucesos imposibles: b) «Sacar dos caballos de copas» y d) «Sacar dos figuras iguales del mismo palo». Por tanto, no pueden ser las dos cartas iguales.

043 Ordena, de menor a mayor grado, la probabilidad de obtener los siguientes sucesos al lanzar un dado.

- a) «Número impar»
- b) «Número igual o mayor que 5»
- c) «Número menor que 7»
- d) «Número mayor que 7»

$$P(d) = 0 < P(b) < P(a) < P(c) = 1$$

044 De una baraja de 40 cartas se extrae una carta. Calcula las probabilidades de estos sucesos.

- a) $A =$ «Obtener oros»
- b) $B =$ «Obtener el rey de oros»
- c) $C =$ «Obtener espadas o copas»

$$a) P(A) = \frac{10}{40} = 0,25$$

$$b) P(B) = \frac{1}{40} = 0,025$$

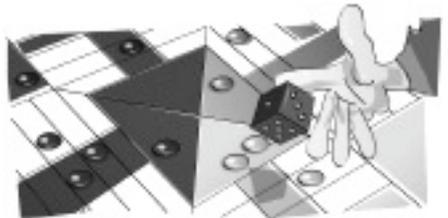
$$c) P(C) = \frac{20}{40} = 0,5$$

045 Se lanza un dado al aire y se suman los puntos de todas las caras menos la de arriba. Obtén el espacio muestral y la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3.



$$E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\} \quad P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$$

046 En el juego del parchís se ha trucado el dado para que la probabilidad de que salga 5 sea cinco veces la probabilidad de que salga cualquier otra cara. ¿Qué afirmación es cierta?



a) $P(\text{cara 5}) = \frac{2}{3}$

c) $P(\text{cara 5}) = \frac{5}{6}$

b) $P(\text{cara 5}) = \frac{1}{2}$

d) $P(\text{cara 1}) = \frac{1}{6}$

Como la suma de las probabilidades es 1, siendo x la probabilidad de que salga cualquiera de las caras distintas de 5 y $5x$ la de 5:
 $x + x + x + x + x + 5x = 1 \rightarrow x = 0,1$ y $5x = 0,5$.

Por tanto, la solución es b) $P(\text{cara 5}) = \frac{1}{2}$.

047 En el caso del dado anterior, la probabilidad de sacar cara impar es:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{10}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{7}{10}$

$P(\text{impar}) = P(\{1, 3, 5\}) = P(1) + P(3) + P(5) = 0,7$. La solución es d) $\frac{7}{10}$.

048 Al lanzar una chincheta, puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo.



a) ¿Es un experimento aleatorio o determinista?

b) ¿Cuáles son los sucesos elementales?

c) ¿Son estos sucesos equiprobables?

a) Es aleatorio.

b) Los sucesos elementales son «Punta hacia arriba» y «Punta hacia abajo».

c) No son equiprobables, pues es más probable que caiga con la punta hacia abajo.

049 Para comprobar si los sucesos elementales de la actividad anterior son equiprobables, realiza el experimento 100 veces (toma 10 chinchetas y lánzalas 10 veces). ¿Es mayor la frecuencia relativa del suceso «Punta hacia arriba»?

Compara tu resultado con el obtenido por tus compañeros, y formad una tabla juntando todos los resultados.

Es mayor la frecuencia relativa del suceso «Punta hacia abajo».

Probabilidad

050



En un bombo hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla. Los resultados son:

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11

Dados los siguientes sucesos: $A = \text{«Múltiplo de 3»}$, $B = \text{«Número impar»}$ y $C = \text{«Divisor de 6»}$, calcula:

- a) La frecuencia relativa de A , B y C .
 b) La frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cup C$.

¿Qué probabilidad le asignarías a cada suceso?

$$A = \{3, 6, 9\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad C = \{1, 2, 3, 6\}$$

- a) Frecuencia de $A = 12 + 12 + 11 = 35$
 Frecuencia de $B = 13 + 12 + 10 + 6 + 11 = 52$
 Frecuencia de $C = 13 + 11 + 12 + 12 = 48$
- b) Frecuencia de $A \cup B = 13 + 11 + 12 + 10 + 12 + 6 + 11 = 75$
 Frecuencia de $A \cap B = 12 + 11 = 23$
 Frecuencia de $A \cup C = 13 + 11 + 12 + 12 + 11 = 59$

$$P(A) = \frac{35}{100} = 0,35 \quad P(B) = \frac{52}{100} = 0,52 \quad P(C) = \frac{48}{100} = 0,48$$

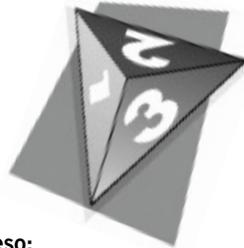
$$P(A \cup B) = \frac{75}{100} = 0,75 \quad P(A \cap B) = \frac{23}{100} = 0,23 \quad P(A \cup C) = \frac{59}{100} = 0,59$$

051



Se lanza 100 veces un dado tetraédrico y se anota el número de la cara oculta, obteniéndose:

Cara	1	2	3	4
f_i	28	22	30	20



Halla la frecuencia relativa del suceso:

- a) Múltiplo de 3. c) Cara mayor que 1.
 b) Múltiplo de 2. d) Cara menor que 1.

¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los sucesos anteriores?

- a) Frecuencia 30 $\rightarrow P = \frac{30}{100} = 0,3$
 b) Frecuencia $22 + 20 = 42 \rightarrow P = \frac{42}{100} = 0,42$
 c) Frecuencia $22 + 30 + 20 = 72 \rightarrow P = \frac{72}{100} = 0,72$
 d) Frecuencia 0 $\rightarrow P = 0$

052 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN PROBABILIDADES CON AYUDA DE UN DIAGRAMA DE ÁRBOL?

Lanzamos tres monedas. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

A = «Sacar 3 caras»

D = «Sacar 1 cruz»

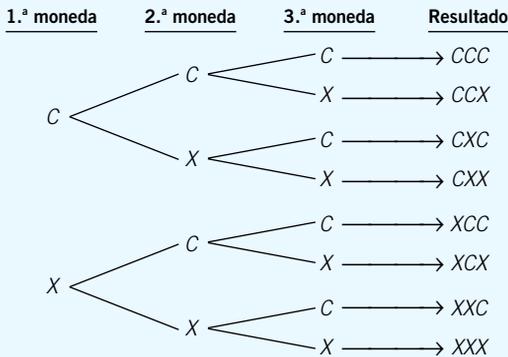
B = «Sacar 2 caras»

E = «Sacar a lo sumo 1 cara»

C = «No sacar ninguna cara»

F = «Sacar más de 1 cara»

PRIMERO. Se aplica la técnica del diagrama de árbol para encontrar los sucesos elementales.



$$E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$

SEGUNDO. Se calculan las probabilidades utilizando la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{1}{8} \qquad P(C) = \frac{1}{8} \qquad P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{8} \qquad P(D) = \frac{3}{8} \qquad P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

053 Se lanzan 4 monedas iguales.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 caras?

b) ¿Y de no obtener ninguna cara?

c) ¿Qué suceso es más probable, obtener 2 caras u obtener, al menos, 3 cruces?

Hay 16 sucesos elementales equiprobables.

$$a) P(4 \text{ caras}) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$b) P(0 \text{ caras}) = P(4 \text{ cruces}) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

c) «Obtener 2 caras» = {CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC}

$$P(2 \text{ caras}) = \frac{6}{16} = 0,375$$

«Obtener al menos 3 cruces» = {+++C, ++C+, +C++, C+++, +++++}

$$P(\text{al menos 3 cruces}) = \frac{5}{16} = 0,3125. \text{ La probabilidad de obtener 2 caras}$$

es mayor que la de obtener al menos 3 cruces.

Probabilidad

054

Un examen de tipo test consta de 5 preguntas, cada una de las cuales tiene tres posibles respuestas.

a) Calcula la probabilidad de acertar 3 preguntas si contestas al azar.

b) Si para aprobar el examen hay que contestar al menos 3 preguntas correctamente, halla la probabilidad de aprobar y de suspender.

$$P(\text{acertar una pregunta}) = \frac{1}{3} \quad P(\text{no acertar una pregunta}) = \frac{2}{3}$$

a) «Acertar 3 preguntas» = {AAANN, AANAN, AANNA, ANAAN, ANANA, ANNAA, NAAAN, NAANA, NANAA, NNAAA}

$$P(\text{suceso elemental}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$$

$$P(\text{acertar 3 preguntas}) = 10 \cdot \frac{4}{243} = \frac{40}{243}$$

b) «Acertar 4 preguntas» = {AAAAAN, AAANA, AANAA, ANAAA, NAAAA}

$$P(\text{suceso elemental}) = \frac{2}{243}$$

$$P(\text{acertar 4 preguntas}) = 5 \cdot \frac{2}{243} = \frac{10}{243}$$

«Acertar 5 preguntas» = {AAAAA}

$$P(\text{acertar 5 preguntas}) = \frac{1}{243}$$

$$P(\text{aprobar}) = \frac{1 + 10 + 40}{243} = \frac{51}{243}$$

$$P(\text{suspender}) = 1 - P(\text{aprobar}) = 1 - \frac{51}{243} = \frac{192}{243}$$

055

La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

056

Si en un dado $P(1) = P(2) = P(3) = 0,14$ y $P(4) = P(5) = P(6) = x$, ¿cuál es el valor de x ?

$$\frac{3}{7} + 3x = 1 \rightarrow x = \frac{4}{21}$$

057

En un dado trucado, la probabilidad de que salga cada una de las 6 caras es:

Cara	1	2	3	4	5	6
f_i	0,1	0,1	0,1	a	b	0,4

Sabiendo que $P(4) = 2P(5)$, ¿cuánto valen a y b ?

$$a = 2b \rightarrow 0,1 + 0,1 + 0,1 + 2b + b + 0,4 = 1 \rightarrow b = 0,1 \text{ y } a = 0,2$$

058 Se extrae una carta de la baraja española.

●● Halla la probabilidad de:

- a) Obtener un caballo.
 b) No salir una figura.
 c) No salir oros ni bastos.
 d) Sacar el rey de oros o de espadas.



$$a) P(\text{caballo}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$b) P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3 \rightarrow P(\text{no figura}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$c) P(\text{no oros ni bastos}) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$d) P(\text{rey de oros o de espadas}) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0,05$$

059 Elegimos al azar un número del 1 al 30. Sean los sucesos $A = \text{«Obtener un número par menor o igual que 14»}$, $B = \text{«Obtener un múltiplo de 3 menor o igual que 10»}$ y $C = \text{«Obtener un múltiplo de 10»}$.
 ●● Calcula la probabilidad de:

a) $A \cup B$

c) $A \cup \bar{B}$

e) $B \cap C$

b) $A \cup C$

d) $C \cup B$

f) $\bar{A} \cap B$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \quad B = \{3, 6, 9\} \quad C = \{10, 20, 30\}$$

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$

$$P(A \cup B) = 0,3$$

b) $A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30\}$

$$P(A \cup C) = 0,3$$

c) $A \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{28}{30} = 0,93$$

d) $C \cup B = B \cup C = \{3, 6, 9, 10, 20, 30\}$

$$P(C \cup B) = \frac{6}{30} = 0,2$$

e) $B \cap C = \emptyset \rightarrow P(B \cap C) = 0$

f) $\bar{A} \cap B = \{3, 9\} \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{30} = 0,06$

Probabilidad

060



En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Sacamos una bola cuyo número sea n y definimos estos sucesos.

$$\begin{aligned} A &= \text{«}n \text{ es múltiplo de 5} \text{»} & D &= \text{«}n \text{ es divisible por 10} \text{»} \\ B &= \text{«}n \text{ es múltiplo de 3} \text{»} & E &= \text{«}n \text{ es divisible por 1} \text{»} \\ C &= \text{«}n \text{ es divisible por 2} \text{»} \end{aligned}$$

a) ¿Cuántos sucesos elementales componen cada suceso?
¿Cuál es la probabilidad de cada uno?

b) ¿Hay dos sucesos incompatibles?

c) ¿Hay dos sucesos compatibles? ¿Y contrarios?

d) Halla la probabilidad de $A \cap B$, $B \cup C$ y D .

$$\begin{aligned} a) \quad A = 20 &\longrightarrow P(A) = 0,2 \\ B = 33 &\longrightarrow P(B) = 0,33 \\ C = 50 &\longrightarrow P(C) = 0,5 \\ D = 10 &\longrightarrow P(D) = 0,1 \\ E = 100 &\longrightarrow P(E) = 1 \end{aligned}$$

b) No los hay.

c) Todas las parejas son compatibles. No hay sucesos contrarios.

$$\begin{aligned} d) \quad P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,33 = 0,6 \\ P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,33 + 0,5 - 0,165 = 0,665 \\ P(D) &= 0,1 \end{aligned}$$

061



Considera un juego en el que lanzas dos dados y ganas si la suma de puntos es 11 o 7.

a) Describe el espacio muestral de este experimento.

b) Calcula la probabilidad de ganar.

$$a) \quad E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), (3, 1), \dots, (3, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (5, 1), \dots, (5, 6), (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

$$b) \quad P(7 \text{ u } 11) = \frac{8}{36} = \frac{4}{9}$$

062



En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto pescado. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de estos sucesos.



- a) Sea hombre.
 b) Haya tomado pescado.
 c) Sea hombre y tome pescado.

	Carne	Pescado	Total
Hombres	16	12	28
Mujeres	20	12	32
Total	36	24	60

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{hombre}) &= \frac{28}{60} = \frac{7}{15} = 0,46 \\ \text{b) } P(\text{pescado}) &= \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ \text{c) } P(\text{hombre y pescado}) &= \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

- 063** En una guardería hay 20 niños y 16 niñas. La mitad de los niños y tres cuartas partes de las niñas son morenos y el resto son rubios. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, sea niño o tenga el pelo moreno?

Niños → morenos = 10, rubios = 10

Niñas → morenas = $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$, rubias = 4

$P(\text{niño o moreno}) = P(\text{niño}) + P(\text{moreno}) - P(\text{niño y moreno})$

$$P(\text{niño o moreno}) = \frac{20}{36} + \frac{22}{36} - \frac{10}{36} = \frac{32}{36} = 0,89$$

- 064** En una ciudad leen el periódico *A* el 30 % de los habitantes, el periódico *B* el 20 % de los habitantes, leyendo el 7 % los dos periódicos.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que, escogido alguien al azar, lea alguno de los dos periódicos?
 b) ¿Y de que no lea ningún periódico?
 ¿Y de que lea uno?

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{lea } A \text{ o } B) &= P(\text{lea } A) + P(\text{lea } B) - P(\text{lea } A \text{ y } B) \\ P(\text{lea } A \text{ o } B) &= 0,3 + 0,2 - 0,07 = 0,43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{no lea } A \text{ ni } B) &= 1 - P(\text{lea } A \text{ o } B) \\ P(\text{no lea } A \text{ ni } B) &= 1 - 0,43 = 0,57 \end{aligned}$$

$$P(\text{lea solo uno}) = 1 - [P(\text{lea } A \text{ y } B) + P(\text{ninguno})]$$

$$P(\text{lea solo uno}) = 1 - [0,07 + 0,57] = 1 - 0,64 = 0,36$$



Probabilidad

065



Luis y Juan tienen que recoger la habitación que comparten. Luis pone en una bolsa 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul, y le propone a su hermano sacar una. Si es roja, recoge Juan, y si es azul, recoge él.

a) ¿Cuál es la probabilidad de cada bola?

b) ¿Es justo lo que propone Luis?

c) Juan no acepta el trato y propone que si sale rojo, recogerá él, y si sale azul o verde, recogerá Luis. ¿Es justo este trato? ¿Por qué?

$$a) P(\text{roja}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad P(\text{azul}) = \frac{1}{6} = 0,16$$

b) No, ya que es el triple de probable que le toque a Juan.

c) Sí, porque $P(\text{azul o verde}) = 0,5 = P(\text{roja})$.

066



Si tengo 3 llaves que abren las 3 cerraduras de una puerta, pero no sé cuál es la que abre cada una, ¿cuál es la probabilidad de que acierte con la combinación a la primera oportunidad? ¿Y si tuviera 3 llaves y solo 2 cerraduras? (Una de las llaves no abre ninguna cerradura.)



Si tengo tres llaves, $E = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$.

La combinación adecuada es solo una de las seis: $P(\text{acertar a la primera}) = \frac{1}{6}$.

Si tengo dos llaves: $E = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$.

La combinación adecuada es solo una de las seis: $P(\text{acertar a la primera}) = \frac{1}{6}$.

067



Paula va a una tienda 2 veces por semana, y Roberto trabaja en esa tienda 4 días a la semana. Si el viernes es el único día que no acude ninguno de los dos, ¿cuál es la probabilidad de que coincidan dos días? (La tienda cierra los domingos.)

Como Roberto trabaja cuatro de los cinco días posibles (lunes, martes, miércoles, jueves y sábado), solo hay un día que no trabaja, por lo que al menos coinciden un día. El suceso «Coincidir un día» se da cuando el día que no trabaja Roberto es uno de los dos que trabaja Paula, y su probabilidad es: $\frac{2}{5} = 0,4$ (casos favorables = 2 días, casos posibles = 5 días).

Como el suceso «Coincidir dos días» es el contrario de «Coincidir un día», su probabilidad es: $1 - 0,4 = 0,6$.

068

En el Oeste, tres vaqueros tienen que realizar una acción arriesgada, cortan tres palitos de distinta longitud, los tapan de forma que muestren la misma altura y cada vaquero elige uno. El que coge el más corto, pierde. ¿Por qué nunca discuten quién elige primero?

$A = \text{«Vaquero primero coge el palo más corto»}$

$B = \text{«Vaquero segundo coge el palo más corto»}$

$C = \text{«Vaquero tercero coge el palo más corto»}$

Son incompatibles, por lo que cada suceso está incluido en el complementario de los otros.

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(C) = \frac{1}{3}$$

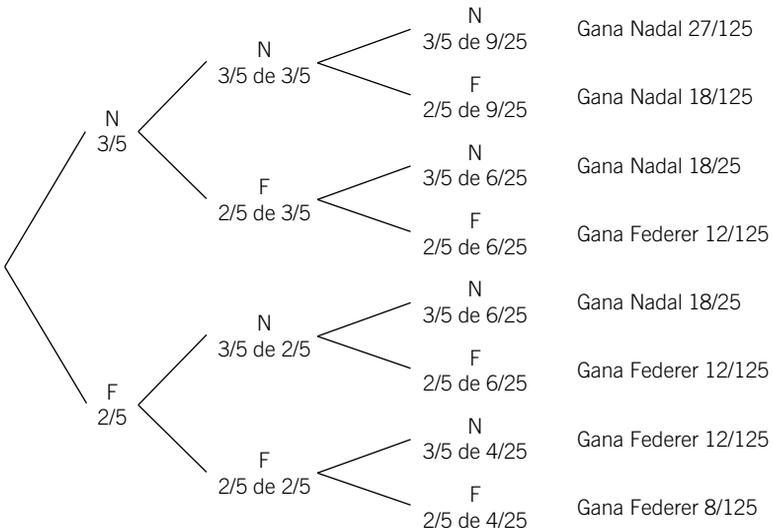
Luego los tres vaqueros tienen la misma probabilidad de sacar el palo más corto.

069

Nadal es mejor que Federer en tierra batida y la probabilidad que tiene de ganarle un set es 3/5. Si el cansancio los afecta a ambos por igual, explica por qué Nadal prefiere jugar al mejor de 5 sets que al mejor de 3 sets.



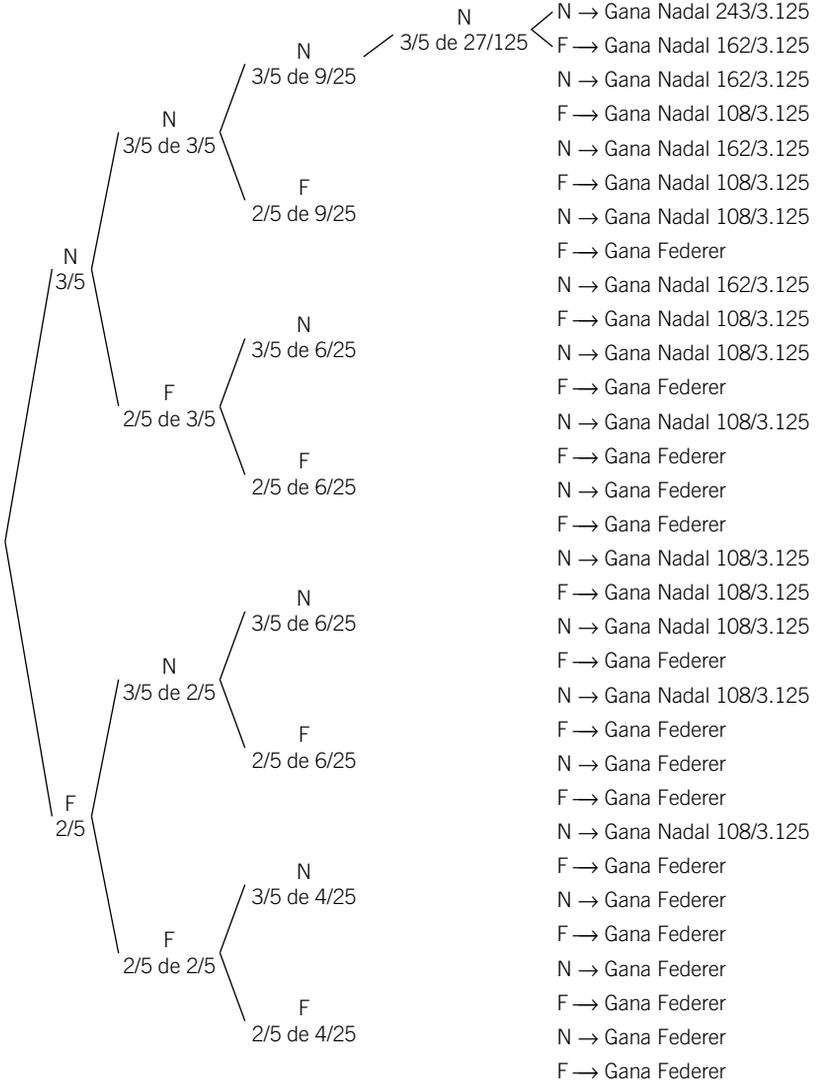
Realizamos el diagrama de árbol con la frecuencia de victorias para cada caso.



Probabilidad

Se observa que la probabilidad de ganar Nadal es:

$$P(\text{Nadal}) = \frac{27}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} = \frac{81}{125} = 0,65$$



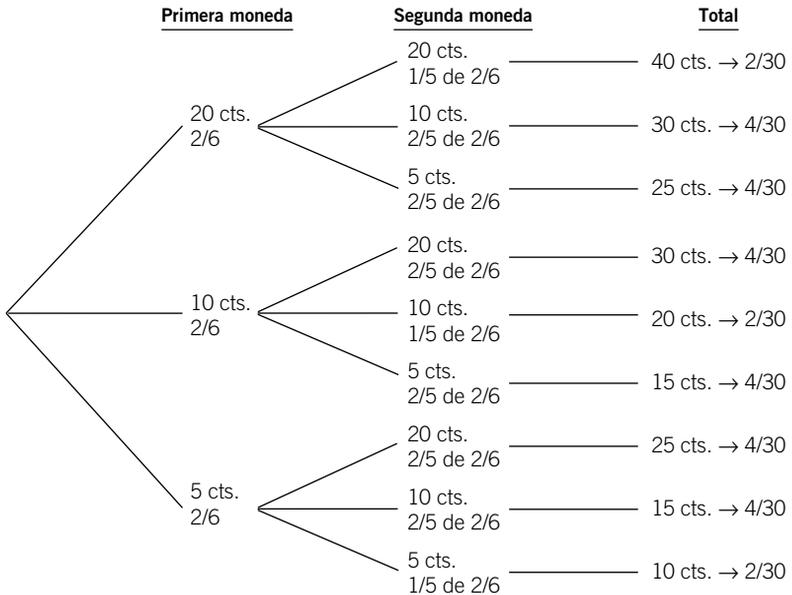
$$P(\text{Nadal}) = \frac{243 + 162 + 162 + 162 + 108 + 162 + 108 + 108 + 162 + 108 + 108 + 108 + 162 + 108 + 108 + 108}{3.125} = \frac{2.295}{3.125} = 0,73$$

Por tanto, Nadal tiene mayor probabilidad de ganar en 5 sets.

070

Tengo en el bolsillo dos monedas de 20 céntimos, dos de 10 céntimos y dos de 5 céntimos. Si saco dos monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cantidad superior o igual a 20 céntimos?

Realizamos el diagrama de árbol que representa la extracción de las monedas:



La probabilidad de sacar al menos 20 céntimos con dos monedas es:

$$P(> 20 \text{ cts.}) = \frac{2 + 4 + 4 + 4 + 2 + 4}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

071

En una clase de 23 alumnos, el tutor revisa las fichas de sus alumnos y comprueba que dos alumnos cumplen años el mismo día del mismo mes. Al comentárselo al profesor de Matemáticas, este le dice que eso es más habitual que lo contrario, es decir, que no haya ninguna coincidencia. Comprueba que el profesor de Matemáticas tiene razón.

Cuando son dos alumnos, la probabilidad de que no hayan nacido

en la misma fecha es $\frac{364}{365}$. La probabilidad de que tres alumnos

no hayan nacido en la misma fecha es: $\frac{363}{365}$ de $\frac{364}{365} = \frac{363 \cdot 364}{365^2}$.

La probabilidad de cuatro alumnos es: $\frac{362}{365}$ de $\frac{363 \cdot 364}{365^2} = \frac{362 \cdot 363 \cdot 364}{365^3}$.

Así, la probabilidad de que en 23 alumnos no haya coincidencias de fechas

de nacimiento es: $\frac{362 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 363 \cdot 364}{365^{22}} = 0,46$.

Por tanto, la probabilidad de que exista una coincidencia es 0,54, por lo que es más probable.

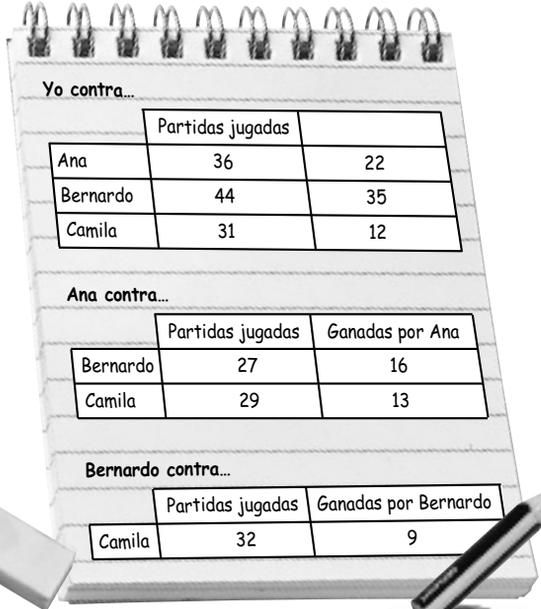
072



EN LA VIDA COTIDIANA

Con motivo de la semana cultural del instituto, se ha celebrado un campeonato de dardos. Tras varias eliminaciones hemos quedado como finalistas Ana, Bernardo, Camila y yo.

Desde hace tiempo he ido apuntando las partidas que hemos jugado y quiénes han sido los ganadores.



La final consiste en una liga en la que jugaremos todos contra todos. Cada victoria otorgará 1 punto al ganador y 0 puntos al perdedor.

Al finalizar la liga ganará el concursante con mayor puntuación.

Según los datos que tengo anotados, ¿qué probabilidad tengo de ganar el campeonato? ¿Y de perderlo?



Si consideramos que ganar es tener más puntos en solitario, sin empates, la única manera de hacerlo es ganar las tres partidas, ya que si solo se ganan dos, en las otras cuatro partidas de la liga siempre habrá un jugador que gane al menos dos, por lo que empataría.

La probabilidad de ganar las tres partidas, si realizamos el diagrama de árbol, es:

$$\begin{array}{l} \text{Ganar a Ana} \text{ ————— } \text{Ganar a Bernardo} \text{ ————— } \text{Ganar a Camila} \\ 22/36 = 11/18 \qquad 35/44 \text{ de } 11/18 = 35/72 \qquad 12/31 \text{ de } 35/72 = 35/186 \end{array}$$

La probabilidad de ganar el campeonato es $\frac{35}{186} = 0,18$.

Del mismo modo que la victoria, si consideramos que perder es conseguir el menor número de puntos, la única opción posible es perder todas las partidas, ya que si ganamos una de las cinco partidas restantes es imposible que todos ganen dos.

La probabilidad de perder las tres partidas, si realizamos el diagrama de árbol, es:

$$\begin{array}{l} \text{Perder con Ana} \text{ ————— } \text{Perder con Bernardo} \text{ ————— } \text{Perder con Camila} \\ 14/36 = 7/18 \qquad 9/44 \text{ de } 7/18 = 7/88 \qquad 9/31 \text{ de } 7/88 = 63/2.728 \end{array}$$

La probabilidad de perder el campeonato es: $\frac{63}{2.728} = 0,02$.

073

La Dirección General de Tráfico (DGT) va a llevar a cabo una campaña para reducir la siniestralidad en las carreteras.

Un elevado número de accidentes con víctimas mortales es debido a dos factores:



- No utilizar el cinturón de seguridad.
- No respetar la distancia de seguridad.

Para determinar la incidencia de estas infracciones, se han realizado múltiples controles de tráfico. Estos son los datos recogidos.

En cada control, los agentes han inspeccionado a 500 vehículos:

- Una media de 60 conductores no llevaba cinturón.
- De estos 60 conductores, 40 no respetaban la distancia de seguridad.
- Y 410 circulaban correctamente.



A los conductores que no llevaban cinturón se les sancionó con la pérdida de 2 puntos, y a los que no respetaban la distancia de seguridad, con 3 puntos. Ante estos datos, la DGT se plantea hacer controles persuasivos. ¿Cuántos vehículos, aproximadamente, se deben inspeccionar en cada control para no sobrepasar los 10 conductores sancionados con la penalización máxima, es decir, la pérdida de 5 puntos?

La frecuencia de conductores que no llevan el cinturón y no respetan

la distancia de seguridad es: $\frac{40}{500} = \frac{2}{25}$, por lo que para no sobrepasar

los 10 conductores que son sancionados con 5 puntos debemos inspeccionar menos de 125 vehículos.

$$x \cdot \frac{2}{25} < 10 \rightarrow x < 125$$