



BLOQUE IV

Geometría

11. Semejanza. Teorema de Thales y Pitágoras
12. Cuerpos en el espacio
13. Áreas y volúmenes



1. Figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA

Si la Torre del Oro mide aproximadamente 20 m de alto, ¿cuánto mide aproximadamente de alto la Giralda de Sevilla?



Solución:

Si la Torre de Oro mide 1 cm en el libro, en la realidad mide aproximadamente 20 m; y si la Giralda en el libro mide 5 cm, su altura en la realidad será:

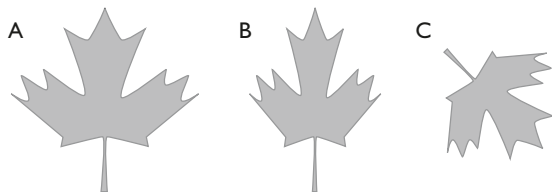
$$20 \cdot 5 = 100 \text{ m aproximadamente.}$$

Exactamente la Torre del Oro mide 20,79 m, y la Giralda, 97,5 m

Carné calculista 25,6 : 0,68 | C = 37,64; R = 0,0048

APLICA LA TEORÍA

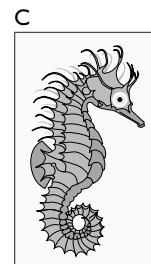
1 De las figuras siguientes, hay dos semejantes. ¿Cuáles son?



Solución:

Son semejantes la A y C porque tienen la misma forma.

2 De las figuras siguientes, A es la original. ¿Cuál de las siguientes es ampliación y cuál es reducción? Halla el tanto por ciento de ampliación y reducción correspondientes.



Solución:

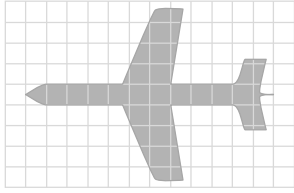
B es una reducción.

$$r = \frac{1,6}{2,2} = 0,73 = 73 \%$$

C es una ampliación.

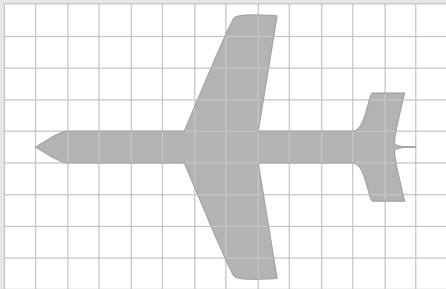
$$r = \frac{3,3}{2,2} = 1,5 = 150 \%$$

- 3** Mediante la técnica de cuadrículado, haz un avión semejante al siguiente, pero con el doble de tamaño.

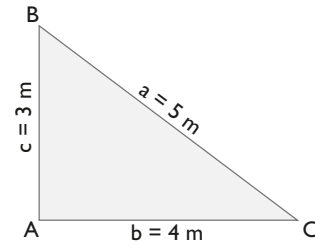


Solución:

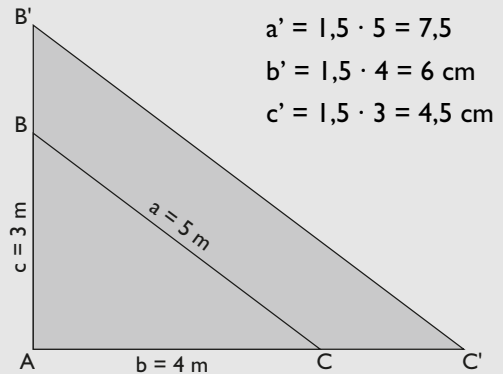
Hay que hacer un cuadrículado que tenga de lado el doble. El original mide 4 cm de largo; por tanto, el semejante, 8 cm y en cada casilla hay que hacer la misma forma.



- 4** Mediante una proyección que tenga como centro el vértice A, dibuja otro triángulo rectángulo que sea una ampliación al 150%. ¿Cuánto mide cada uno de los lados?



Solución:



2. Teorema de Thales

PIENSA Y CALCULA

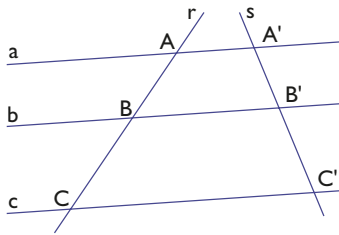
Si una persona que mide 1,75 m proyecta una sombra de 1,75 m, y en el mismo lugar, el mismo día y a la misma hora la sombra de un árbol mide 6,5 m, ¿cuánto mide la altura del árbol?

Solución:

Se observa que la altura de la persona es igual a la sombra; por tanto, lo mismo sucederá en el árbol. El árbol mide 6,5 m

Carné calculista $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} : \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$

- 5** Sabiendo que $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm y $A'B' = 7,5$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



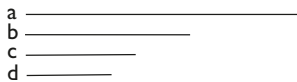
Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{7,5}{9} = \frac{B'C'}{12}$$

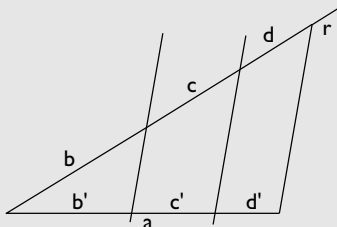
$$B'C' = 10 \text{ cm}$$

Hemos aplicado el teorema de Tales.

- 6** Divide el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b, c y d**

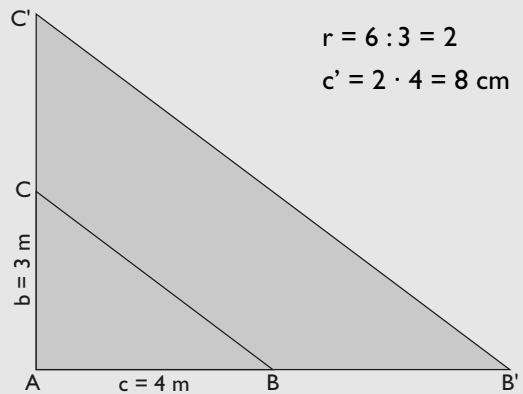


Solución:



- 7** Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Tales, de forma que el cateto menor mida 6 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:



- 8** Dos ángulos de un triángulo miden 55° y 65° , y dos ángulos de otro triángulo miden 55° y 60° . ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:

El tercer ángulo del 1^{er} triángulo mide:

$$180^\circ - (55^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Es decir, los ángulos del 1^{er} triángulo miden: 55° , 65° y 60°

El tercer ángulo del 2^o triángulo mide:

$$180^\circ - (55^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Es decir, los ángulos del 2^o triángulo miden: 55° , 60° y 65°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

- 9** En una fotografía están Pablo y su padre. Se sabe que Pablo mide en la realidad 1,50 m. Las medidas en la fotografía son: Pablo, 6 cm, y su padre, 7,2 cm. ¿Cuánto mide su padre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6}{150} = \frac{7,2}{x}$$

$$x = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$$

3. Relaciones en figuras semejantes

PIENSA Y CALCULA

Un cuadrado tiene 9 m^2 de área. Calcula el área de otro cuadrado cuyo lado mide el doble.

Solución:

El lado del 1^{er} cuadrado mide 3 m, luego el lado del 2^o cuadrado medirá 6 m
 Área del 2^o cuadrado: $6^2 = 36 \text{ m}^2$

Carné calculista 36,89 : 5,9 | C = 6,25; R = 0,015

APLICA LA TEORÍA

- 10** Un lado de un triángulo mide 3,5 m, y el lado correspondiente de otro triángulo semejante mide 8,75 cm. Si el perímetro del primer triángulo mide 12 m y el área mide $4,6 \text{ m}^2$:
- ¿cuánto mide el perímetro del triángulo semejante?
 - ¿cuánto mide el área del triángulo semejante?

Solución:

$$r = \frac{8,75}{3,5} = 2,5$$

$$\text{a) } \frac{P'}{P} = 2,5$$

$$P' = 2,5 \cdot 12 = 30 \text{ m}$$

$$\text{b) } \frac{A'}{A} = 2,5^2 = 6,25$$

$$A' = 6,25 \cdot 4,6 = 28,75 \text{ m}^2$$

- 11** Una arista de un ortoedro mide 2,5 m, y la arista correspondiente de otro ortoedro semejante mide 3,75 m. El área del primer ortoedro mide $71,5 \text{ m}^2$, y el volumen, $39,375 \text{ m}^3$. Halla en el ortoedro semejante:
- El área.
 - El volumen.

Solución:

$$r = \frac{3,75}{2,5} = 1,5$$

$$\text{a) } \frac{A'}{A} = 1,5^2 = 2,25$$

$$A' = 2,25 \cdot 71,5 = 160,875 \text{ m}^2$$

$$\text{b) } \frac{V'}{V} = 1,5^3 = 3,375$$

$$V' = 3,375 \cdot 39,375 = 132,89 \text{ m}^3$$

- 12** ¿Qué escala es mayor, 1:200 o 1:20 000? ¿Cuál corresponde a un mapa y cuál a un plano?

Solución:

$$1:200 = 0,005$$

$$1:20\ 000 = 0,00005$$

La 1^a es mayor.
 La 1^a corresponde a un plano.
 La 2^a corresponde a un mapa.

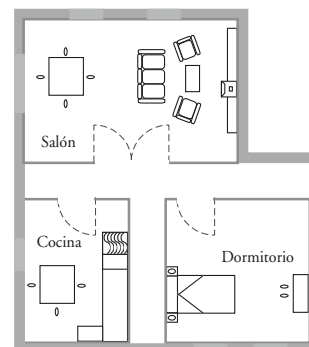
- 13** Un terreno tiene forma rectangular y mide 3 km de largo. Se dibuja un rectángulo semejante de 6 cm de longitud.
- Halla la escala.
 - ¿El objeto dibujado es un plano o un mapa?

Solución:

$$\text{a) } 6 \text{ cm} : 3 \text{ km} = 6 : 300\ 000 = 1:50\ 000$$

b) Es un mapa.

- 14** En el plano siguiente, el salón mide $3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones y el área en la realidad.



Escala 1:200

Solución:

Largo: $3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$

Ancho: $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

Área: $6 \cdot 4 = 24 \text{ m}^2$

15 Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Barcelona y La Coruña. b) Bilbao y Cádiz.
c) Huelva y Oviedo. d) Valencia y Madrid.



Escala 1:25 000 000

Solución:

a) $3,6 \times 25\,000\,000 = 90\,000\,000 \text{ cm} = 900 \text{ km}$

b) $3,3 \times 25\,000\,000 = 82\,500\,000 \text{ cm} = 825 \text{ km}$

c) $2,8 \times 25\,000\,000 = 70\,000\,000 \text{ cm} = 700 \text{ km}$

d) $1,2 \times 25\,000\,000 = 30\,000\,000 \text{ cm} = 300 \text{ km}$

16 Las dimensiones de una maqueta de un coche a escala 1:50 son $9 \text{ cm} \times 3,6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Solución:

Largo: $9 \cdot 50 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m}$

Ancho: $3,6 \cdot 50 = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$

Alto: $3 \cdot 50 = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$

4. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

Sustituye los puntos suspensivos por el signo de igualdad, =, o de desigualdad, \neq .

- a) $5^2 \dots 3^2 + 4^2$ b) $6^2 + 7^2 \dots 8^2$ c) $6^2 + 8^2 \dots 10^2$ d) $13^2 \dots 5^2 + 12^2$

Solución:

a) $5^2 = 3^2 + 4^2$

b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$

c) $6^2 + 8^2 = 10^2$

d) $13^2 = 5^2 + 12^2$

Carné calculista

$$\left(\frac{1}{5} - 2\right) : \frac{3}{10} = -6$$

APLICA LA TEORÍA

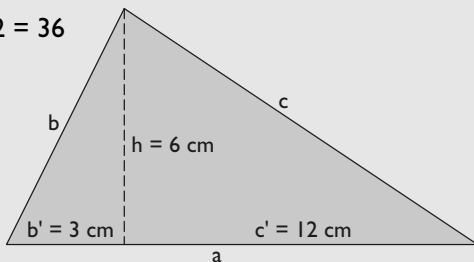
17 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos con longitudes de 3 cm y 12 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$h^2 = b' \cdot c'$

$h^2 = 3 \cdot 12 = 36$

$h = 6 \text{ cm}$



18 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 1,8 m. Halla:

- a) La longitud del cateto **b**
b) La longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
c) La longitud del cateto **c**
d) La longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**
e) Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

a) $b^2 = a \cdot b'$

$b^2 = 5 \cdot 1,8 = 9 \text{ m}$

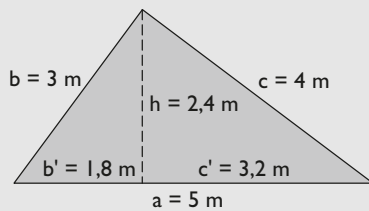
$b = 3 \text{ m}$

b) $c' = a - b'$
 $c' = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ m}$

c) $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 5 \cdot 3,2 = 16$
 $c = 4 \text{ m}$

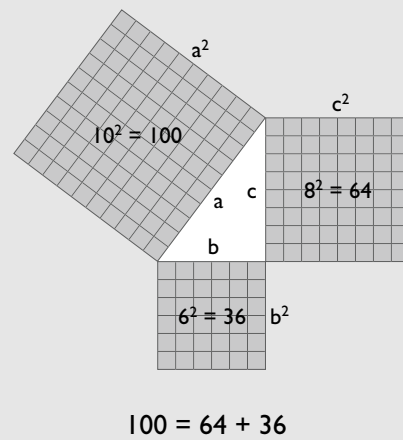
d) $h^2 = b' \cdot c'$
 $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76$
 $h = 2,4 \text{ m}$

e) Dibujo



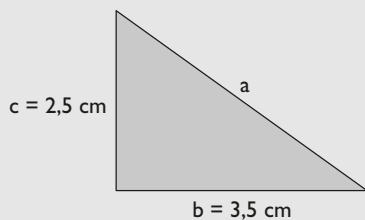
21 Dibuja la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm

Solución:



19 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3,5 cm y 2,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3,5^2 + 2,5^2$$

$$a = 4,30 \text{ cm}$$

22 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

- a) 2, 3 y 4
- b) 3, 4 y 5
- c) 4, 5 y 6
- d) 5, 12 y 13

Solución:

- a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No
- b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí
- c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No
- d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

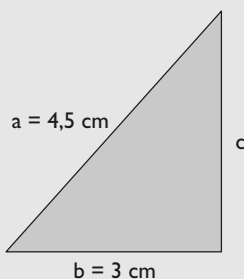
20 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 4,5 cm, y un cateto, 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

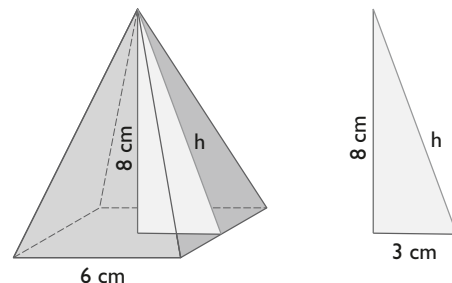
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$4,5^2 = 3^2 + c^2$$

$$c = 3,35 \text{ cm}$$



23 En una pirámide cuadrangular, la arista de la base mide 6 cm, y la altura, 8 cm. Calcula cuánto mide la apotema de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

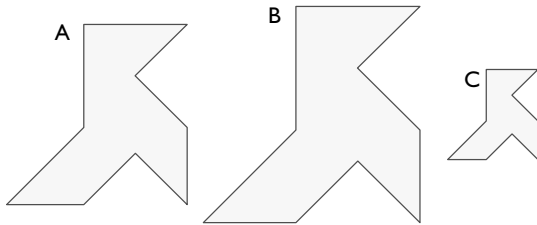
$$h^2 = 3^2 + 8^2$$

$$h = 8,54 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

1. Figuras semejantes

24 De las figuras siguientes, la A es la original. ¿Cuál de las otras es ampliación y cuál es reducción? Halla el tanto por ciento de ampliación y reducción correspondientes.



Solución:

Se mide la altura de cada una de las pajaritas y se busca la razón.

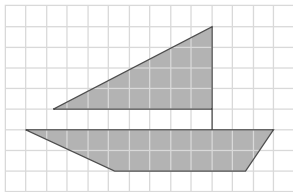
B es una ampliación.

$$r = \frac{3}{2,5} = 1,2 = 120\%$$

C es una reducción.

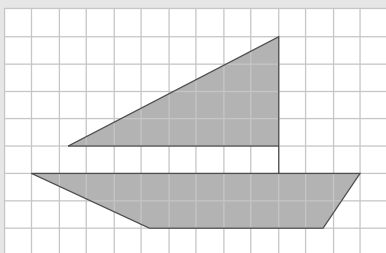
$$r = \frac{1,2}{2,5} = 0,48 = 48\%$$

25 Mediante la técnica de cuadrículado, haz un barco semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.

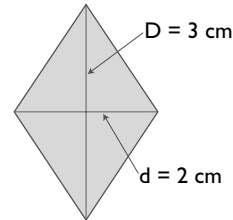


Solución:

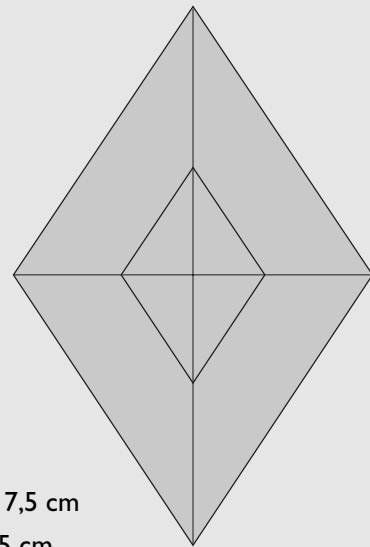
Hay que hacer una cuadrícula que tenga de lado el doble. El original tiene 4 cm de largo, por tanto, el semejante debe medir 8 cm, y en cada casilla hay que hacer la misma forma.



26 Mediante una proyección que tenga como centro el centro del rombo, dibuja otro rombo que sea una ampliación al 250%. ¿Cuánto miden las nuevas diagonales?



Solución:

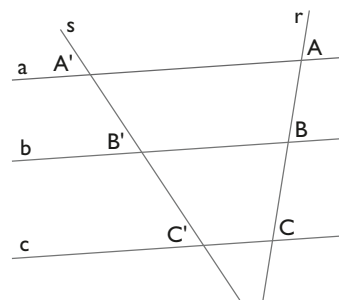


$$D' = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ cm}$$

$$d' = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}$$

2. Teorema de Tales

27 Sabiendo que $AB = 15 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$ y $B'C' = 24 \text{ cm}$, halla la longitud del segmento $A'B'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{A'B'}{15} = \frac{24}{20}$$

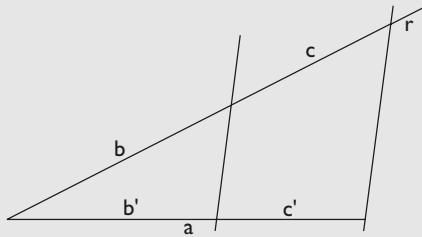
$$A'B' = 18 \text{ cm}$$

Se ha aplicado el teorema de Tales.

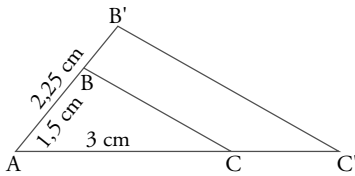
- 28** Divide el segmento **a** en partes proporcionales a los segmentos **b** y **c**



Solución:



- 29** Sabiendo que $AB = 1,5 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ y $AB' = 2,25 \text{ cm}$, halla la longitud del lado AC' . ¿Cómo están los triángulos ABC y $AB'C'$?



Solución:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{2,25}{1,5} = \frac{AC'}{3}$$

$$AC' = 4,5 \text{ cm}$$

Los triángulos ABC y $AB'C'$ están en posición de Tales.

- 30** Un ángulo de un triángulo mide 47° , y los lados que lo forman, $a = 5 \text{ cm}$ y $b = 7 \text{ cm}$. En otro triángulo semejante, se sabe que un ángulo mide 47° y que uno de los lados que lo forman mide $a' = 12 \text{ cm}$. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 47° ?

Solución:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{12}{5} = \frac{b'}{7}$$

$$b' = 16,8 \text{ cm}$$

- 31** Un árbol de $1,5 \text{ m}$ proyecta una sombra de 1 m . En el mismo lugar, el mismo día y a la misma hora, la sombra de un edificio mide 12 m . ¿Cuánto mide de alto el edificio?

Solución:

$$\frac{1}{1,5} = \frac{12}{x}$$

$$x = 18 \text{ m}$$

3. Relaciones en figuras semejantes

- 32** El perímetro de un pentágono regular mide 12 m , y el de otro pentágono regular mide 42 m .
- Calcula la razón de semejanza.
 - Si el área del primero es de $9,91 \text{ m}^2$, ¿cuál es el área del segundo?

Solución:

$$r = \frac{42}{12} = 3,5$$

$$\frac{A'}{A} = 3,5^2 = 12,25 \Rightarrow A' = 12,25 \cdot 9,91 = 121,40 \text{ m}^2$$

- 33** La arista de un tetraedro mide 3 cm , y la arista de otro tetraedro semejante mide $4,5 \text{ m}$. Si el área del primer tetraedro es $15,59 \text{ cm}^2$, y el volumen, $3,18 \text{ m}^3$, halla del segundo tetraedro:
- El área.
 - El volumen.

Solución:

$$r = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

$$a) \frac{A'}{A} = 1,5^2 = 2,25 \Rightarrow A' = 2,25 \cdot 15,59 = 35,08 \text{ m}^2$$

$$b) \frac{V'}{V} = 1,5^3 = 3,375 \Rightarrow V' = 3,375 \cdot 3,18 = 10,73 \text{ m}^3$$

- 34** ¿Qué escala es mayor, $1:500$ o $1:5\,000\,000$? Di cuál corresponde a un mapa y cuál a un plano.

Solución:

$$1:500 = 0,002$$

$$1:5\,000\,000 = 0,0000002$$

La 1^a es mayor.

La 1^a corresponde a un plano.

La 2^a corresponde a un mapa.

Ejercicios y problemas

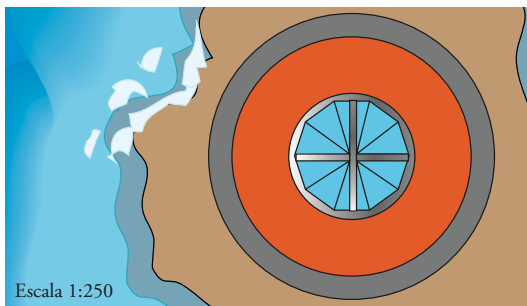
35 Un terreno tiene forma de trapezio rectángulo y la longitud de la base mayor mide 50 km. Se dibuja un trapezio semejante en el que la base mayor mide 5 cm de longitud.

- a) Halla la escala.
b) ¿El terreno dibujado es un plano o un mapa?

Solución:

- a) $5 \text{ cm} : 50 \text{ km} = 5 : 5\,000\,000 = 1 : 1\,000\,000$
b) Es un mapa.

36 El plano siguiente corresponde a la planta de un faro. Halla cuánto mide en la realidad el diámetro del faro.



Solución:

El diámetro mide 4 cm
 $D = 4 \cdot 250 = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$

37 Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Madrid y Bruselas.
b) Madrid y Roma.
c) Londres y Roma.
d) Londres y París.



Escala 1:100 000 000

Solución:

- a) $2,4 \cdot 100\,000\,000 = 240\,000\,000 \text{ cm} = 2\,400 \text{ km}$
b) $2,3 \cdot 100\,000\,000 = 230\,000\,000 \text{ cm} = 2\,300 \text{ km}$
c) $2,5 \cdot 100\,000\,000 = 250\,000\,000 \text{ cm} = 2\,500 \text{ km}$
d) $0,6 \cdot 100\,000\,000 = 60\,000\,000 \text{ cm} = 600 \text{ km}$

38 Las dimensiones de la maqueta de un vagón de un tren a escala 1:50 son $24 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

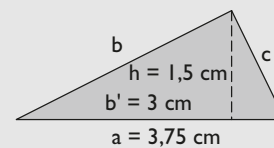
Solución:

Largo: $24 \cdot 50 = 1\,200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$
Ancho: $5 \cdot 50 = 250 \text{ cm} = 2,5 \text{ m}$
Alto: $6 \cdot 50 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$

4. Teorema de Pitágoras

39 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 3,75 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 3 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:



$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$b' = 3 \text{ cm}$$

$$c' = a - b' = 3,75 - 3 = 0,75 \text{ cm}$$

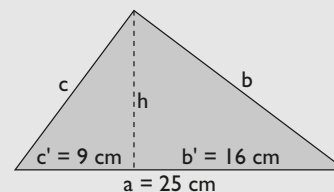
$$h^2 = 3 \cdot 0,75 = 2,25$$

$$h = 1,5 \text{ cm}$$

40 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 16 \text{ cm}$ y $c' = 9 \text{ cm}$. Halla:

- a) el cateto **b**
b) el cateto **c**

Solución:

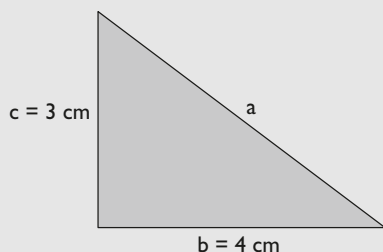


a) $b^2 = a \cdot b'$
 $a = b' + c' = 16 + 9 = 25$ cm
 $b^2 = 25 \cdot 16 = 400$
 $b = 20$ cm

b) $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 25 \cdot 9 = 225$
 $c = 15$ cm

41 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa.

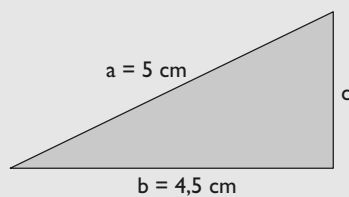
Solución:



$a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = 4^2 + 3^2$
 $a = 5$ cm

42 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm, y un cateto, 4,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$a^2 = b^2 + c^2$
 $5^2 = 4,5^2 + c^2$
 $c = 2,18$ cm

43 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

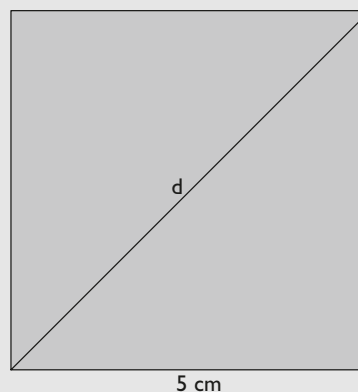
- a) 5, 7 y 9
- b) 6, 8 y 10
- c) 7, 9 y 11
- d) 10, 24 y 26

Solución:

- a) $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No.
- b) $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí.
- c) $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No.
- d) $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí.

44 Dibuja un cuadrado de 5 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal, redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

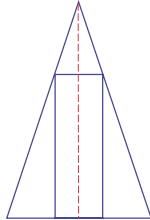
Solución:



$d^2 = 5^2 + 5^2$
 $d = 7,1$ cm

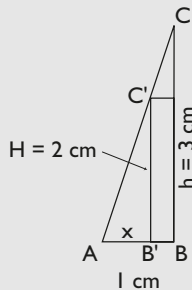
Para ampliar

- 45** Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es $b = 2$ cm, y la altura $h = 3$ cm, y que la altura del rectángulo es $H = 2$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

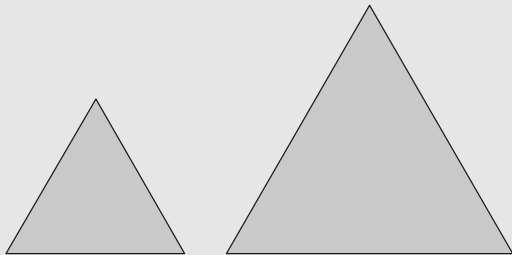
$$\frac{AB'}{1} = \frac{2}{3}$$

$$AB' = 0,67 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2(1 - 0,67) = 0,66 \text{ cm}$$

- 46** Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Sí, son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

- 47** Los lados de un triángulo miden $a = 7$ cm, $b = 8,5$ cm y $c = 12$ cm. Halla la medida de los lados a' , b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1,75$

Solución:

$$a' = 1,75 \cdot a$$

$$a' = 1,75 \cdot 7 = 12,25 \text{ cm}$$

$$b' = 1,75 \cdot b$$

$$b' = 1,75 \cdot 8,5 = 14,875 \text{ cm}$$

$$c' = 1,75 \cdot c$$

$$c' = 1,75 \cdot 12 = 21 \text{ cm}$$

- 48** Un palo de 1 m de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de 1 m. Sabiendo que el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la torre Eiffel de París mide 320 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la torre Eiffel.

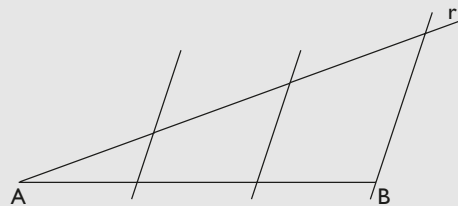
Solución:

La torre Eiffel mide lo mismo que su sombra, es decir, 320 m

- 49** Dibuja un segmento de 5 cm y divídelo en tres partes iguales.

Solución:

Sobre una recta oblicua r se toman tres medidas iguales.



- 50** El radio de una circunferencia mide x metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

$$\text{Longitud: } \frac{L'}{L} = 3$$

$$L' = 3L$$

La longitud es el triple.

Área:

$$\frac{A'}{A} = 3^2 = 9$$

$$A' = 9A$$

El área es nueve veces mayor.

- 51** La arista de un cubo mide x metros, y la arista de otro cubo mide $5x$ metros. Calcula cuántas veces son mayores el área y el volumen del segundo cubo respecto al primero.

Solución:

Área:

$$\frac{A'}{A} = 5^2 = 25$$

$$A' = 25A$$

El área es 25 veces mayor.

$$\frac{V'}{V} = 5^3 = 125$$

$$V' = 125V$$

El volumen es 125 veces mayor.

- 52** De los siguientes triángulos, ¿cuáles son rectángulos?

- a) $a = 1$ cm, $b = 1,5$ cm, $c = 2$ cm
- b) $a = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm
- c) $a = 2$ cm, $b = 2,5$ cm, $c = 3$ cm
- d) $a = 2,5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6,5$ cm

Solución:

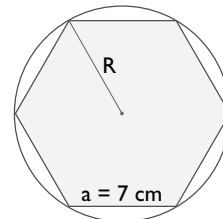
a) $1^2 + 1,5^2 \neq 2^2 \Rightarrow$ No.

b) $1,5^2 + 2^2 = 2,5^2 \Rightarrow$ Sí.

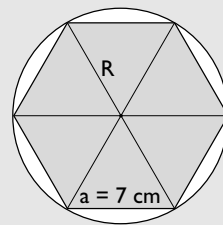
c) $2^2 + 2,5^2 \neq 3^2 \Rightarrow$ No.

d) $2,5^2 + 6^2 \neq 6,5^2 \Rightarrow$ Sí.

- 53** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



Solución:



En el hexágono coinciden la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, $R = 7$ m

Problemas

- 54** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un perro semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.

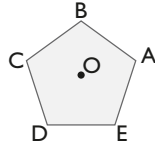


Solución:

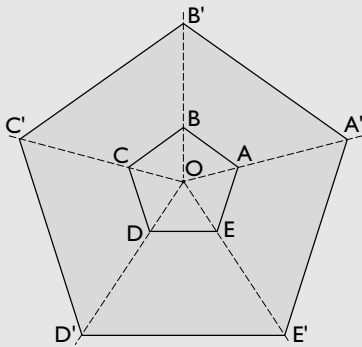


Ejercicios y problemas

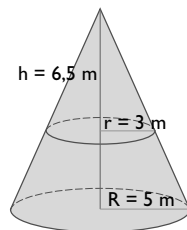
- 55** Dibuja un pentágono semejante al siguiente mediante una proyección que tenga como centro el centro de dicho pentágono, y cuya razón de semejanza sea 3



Solución:



- 56** Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{H}{6,5}$$

$$H = 10,83 \text{ m}$$

- 57** Los lados de un triángulo miden $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ y $c = 7 \text{ cm}$. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 6 \text{ cm}$, halla la medida de los lados b' y c'

Solución:

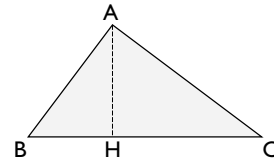
Razón de semejanza: $r = \frac{a'}{a}$

$$r = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$b' = 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ cm}$$

$$c' = 7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ cm}$$

- 58** En el siguiente dibujo, ¿cuántos triángulos semejantes hay? Nómbralos por las letras de los vértices y escribe los ángulos que son iguales.



Solución:

Hay tres triángulos semejantes: ABC, ABH y AHC

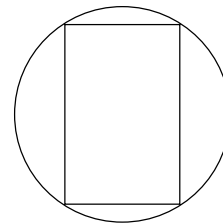
Los ángulos iguales son:

$$\angle BAC = \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ABH = \angle CAH$$

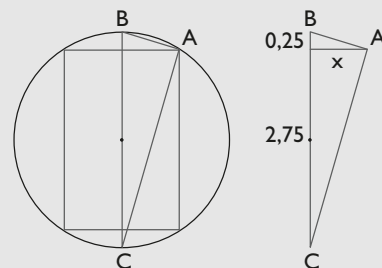
$$\angle ACB = \angle ACH = \angle BAH$$

- 59** Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $R = 3 \text{ cm}$ y que la altura del rectángulo es $h = 2,5 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

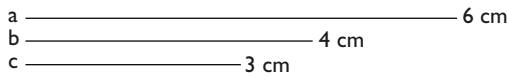
Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 2,75 \cdot 0,25$$

$$x = 0,83 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2x = 2 \cdot 0,83 = 1,66 \text{ cm}$$

60 Dados los segmentos **a**, **b** y **c**



resuelve los siguientes apartados:

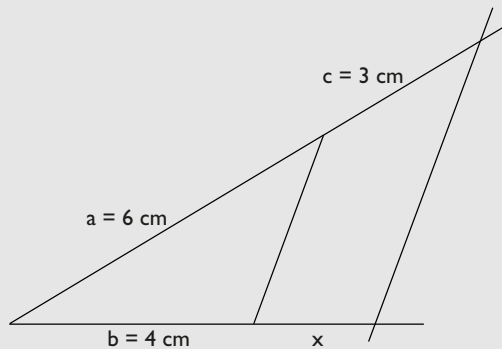
- Halla el cuarto proporcional de las medidas 6 cm, 4 cm y 3 cm
- Halla el cuarto proporcional geoméricamente.
- Mide con la regla el segmento cuarto proporcional y comprueba que su longitud es el valor obtenido en el apartado a)

Solución:

$$\text{a) } \frac{6}{4} = \frac{3}{x}$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

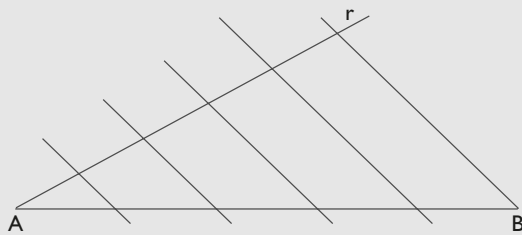
b)



c) Efectivamente, el segmento x mide 2 cm

61 Dibuja un segmento de 7 cm y divídelo en cinco partes iguales.

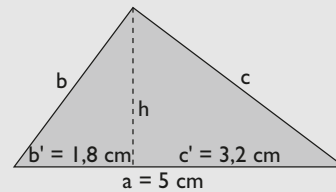
Solución:



62 En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 1,8 \text{ cm}$ y $c' = 3,2 \text{ cm}$. Halla:

- La longitud de la hipotenusa **a**
- La longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
- El cateto **b**
- El cateto **c**
- El área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



- $a = b' + c'$
 $a = 1,8 + 3,2 = 5 \text{ cm}$
- $h^2 = b' \cdot c'$
 $h^2 = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76$
 $h = 2,4 \text{ cm}$
- $b^2 = a \cdot b'$
 $b^2 = 5 \cdot 1,8 = 9$
 $b = 3 \text{ cm}$
- $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 5 \cdot 3,2 = 16$
 $c = 4 \text{ cm}$
- Área = $\frac{1}{2} b \cdot c$
Área = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$

63 Un rectángulo mide 40 m de perímetro y su área mide 100 m^2 . Halla el área de otro semejante en el que el perímetro mide 80 m

Solución:

$$r = \frac{P'}{P}$$

$$r = \frac{80}{40} = 2$$

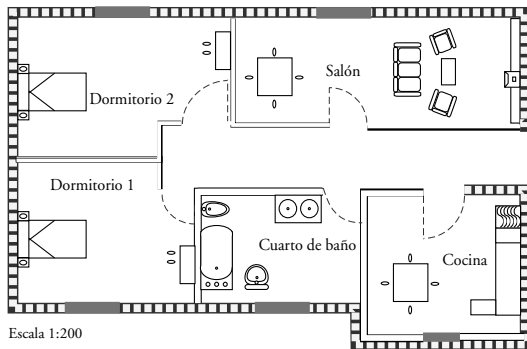
$$\frac{A'}{A} = r^2 = 4$$

$$A' = 4 \cdot A$$

$$A' = 4 \cdot 100 = 400 \text{ m}^2$$

Ejercicios y problemas

64 En el plano siguiente:



calcula la superficie:

- a) Del salón.
- b) De la cocina.
- c) Del cuarto de baño.
- d) Del dormitorio I
- e) Del dormitorio 2

Solución:

- a) $4 \cdot 200 = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$
 $1,5 \cdot 200 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$
 $\text{Área} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ m}^2$
- b) $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$
- c) $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $1,5 \cdot 200 = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$
 $\text{Área} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$
- d) $2,5 \cdot 200 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m}^2$
- e) $3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$
 $2 \cdot 200 = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$
 $\text{Área} = 6 \cdot 4 = 24 \text{ m}^2$

65 En el siguiente mapa de Andalucía:



calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Sevilla y Almería.
- b) Jaén y Huelva.
- c) Córdoba y Cádiz.
- d) Málaga y Granada.

Solución:

- a) $4,7 \cdot 8\,000\,000 = 37\,600\,000 \text{ cm} = 376 \text{ km}$
- b) $4,2 \cdot 8\,000\,000 = 33\,600\,000 \text{ cm} = 336 \text{ km}$
- c) $3 \cdot 8\,000\,000 = 24\,000\,000 \text{ cm} = 240 \text{ km}$
- d) $1,3 \cdot 8\,000\,000 = 10\,400\,000 \text{ cm} = 104 \text{ km}$

66 Se quiere hacer la maqueta de una urbanización en la que los 500 m de longitud de una calle equivalgan a 2 m en la maqueta.

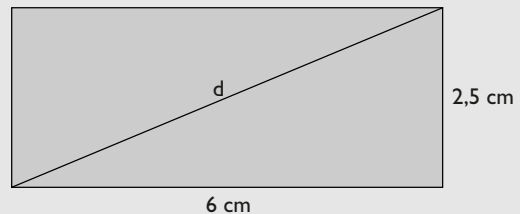
- a) Calcula la escala de la maqueta.
- b) Si un edificio mide 12 m de alto en la realidad, ¿cuánto medirá en la maqueta?
- c) Si una calle mide en la maqueta 3 cm de ancho, ¿cuánto medirá en la realidad?

Solución:

- a) Escala: $2:500 = 1:250$
- b) Altura: $12 \text{ m} : 250 = 0,048 \text{ m} = 4,8 \text{ cm}$
- c) Ancho: $3 \text{ cm} \cdot 250 = 750 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}$

67 Calcula la diagonal de un rectángulo en el que los lados miden 6 cm y 2,5 cm

Solución:



$$d^2 = 6^2 + 2,5^2$$

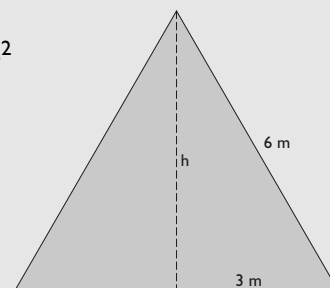
$$d = 6,5 \text{ cm}$$

68 Halla la altura de un triángulo equilátero de 6 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

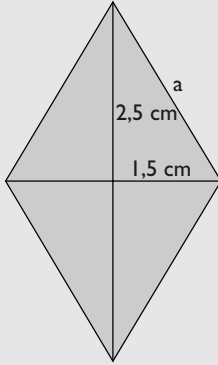
$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h = 5,20 \text{ m}$$



- 69** Halla la longitud del lado de un rombo sabiendo que las diagonales miden 3 cm y 5 cm. Redondea el resultado a dos decimales.

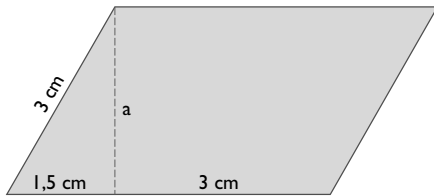
Solución:



$$a^2 = 1,5^2 + 2,5^2$$

$$a = 2,92 \text{ cm}$$

- 70** Halla el área del siguiente romboide:



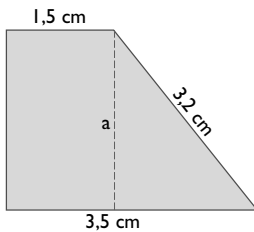
Solución:

$$a^2 + 1,5^2 = 3^2$$

$$a = 2,60 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } 4,5 \cdot 2,60 = 11,7 \text{ cm}^2$$

- 71** Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



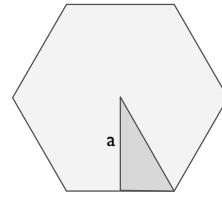
Solución:

$$a^2 + 2^2 = 3,2^2$$

$$a = 2,50 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{3,5 + 1,5}{2} \cdot 2,50 = 6,25 \text{ cm}^2$$

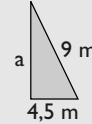
- 72** Halla la apotema de un hexágono regular de 9 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

$$a^2 + 4,5^2 = 9^2$$

$$a = 7,79 \text{ m}$$



- 73** Una escalera de bomberos que mide 20 m se apoya sobre la fachada de un edificio. La base de la escalera está separada 5 m de la pared. ¿A qué altura llegará?



Solución:

$$a^2 + 5^2 = 20^2$$

$$a = 19,36 \text{ m}$$

- 74** Una torre de telefonía móvil proyecta una sombra de 23 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Ana, que mide 1,72 m, proyecta una sombra de 2,10 m. Calcula la altura de la antena de telefonía móvil.

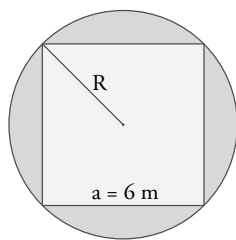
Solución:

$$\frac{2,10}{1,72} = \frac{23}{x}$$

$$x = 18,84 \text{ m}$$

- 75** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:

Ejercicios y problemas

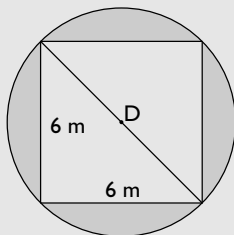


Solución:

$$D^2 = 6^2 + 6^2$$

$$D = 8,49 \text{ m}$$

$$R = D/2 = 4,245 \text{ m}$$

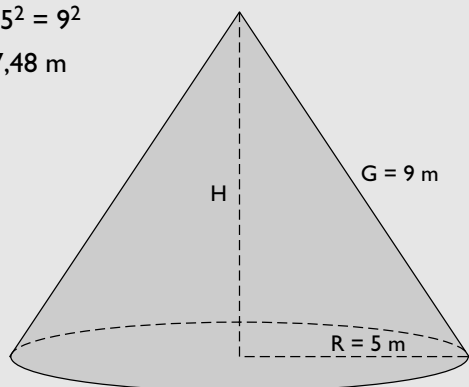


- 76** Halla la altura de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m, y la generatriz, 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

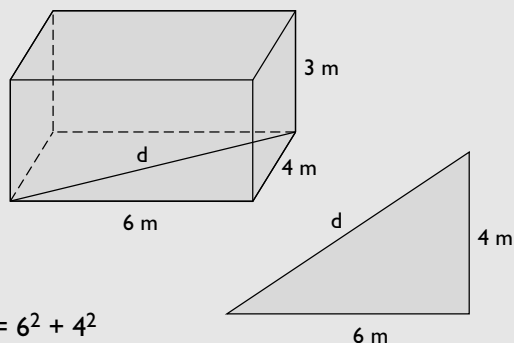
$$H^2 + 5^2 = 9^2$$

$$H = 7,48 \text{ m}$$



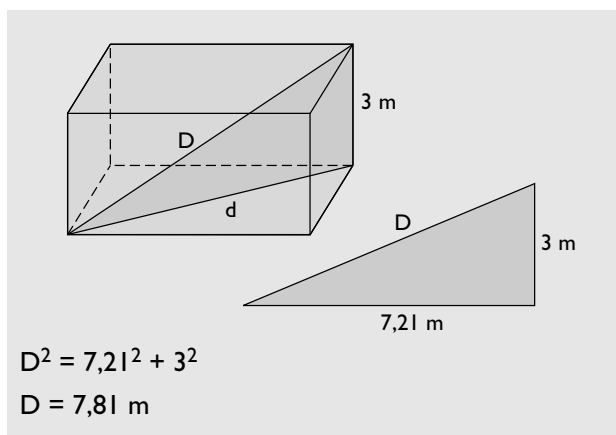
- 77** Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:



$$d^2 = 6^2 + 4^2$$

$$d = 7,21 \text{ m}$$



$$D^2 = 7,21^2 + 3^2$$

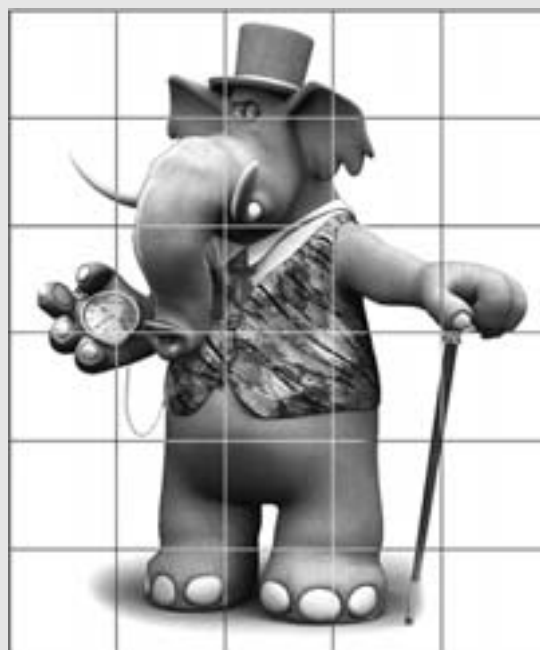
$$D = 7,81 \text{ m}$$

Para profundizar

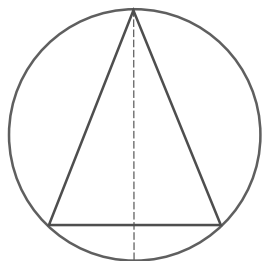
- 78** Mediante la técnica de cuadrículado dibuja un elefante semejante al siguiente, pero que tenga el doble de tamaño.



Solución:

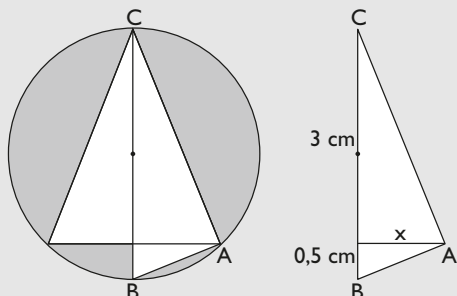


- 79** Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 3,5$ cm y que la altura del triángulo es $h = 3$ cm, halla cuánto mide la base del triángulo.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 3 \cdot 0,5$$

$$x = 1,22 \text{ cm}$$

$$\text{Base del triángulo: } 2x = 2 \cdot 1,22 = 2,44 \text{ cm}$$

- 80** Una esfera cuyo radio es $r = x$ m tiene un área de $314,16 \text{ m}^2$ y un volumen de $523,60 \text{ m}^3$. Halla el área y el volumen de otra esfera cuyo radio es $R = 2,5x$

Solución:

La razón es 2,5

$$\frac{A'}{A} = 2,5^2 = 6,25$$

$$A' = 6,25 \cdot 314,16 = 1963,5 \text{ m}^2$$

$$\frac{V'}{V} = 2,5^3 = 15,625$$

$$V' = 15,625 \cdot 523,60 = 8181,25 \text{ m}^3$$

- 81** Halla el lado de un cuadrado de 6 m de diagonal. Redondea el resultado a dos decimales.

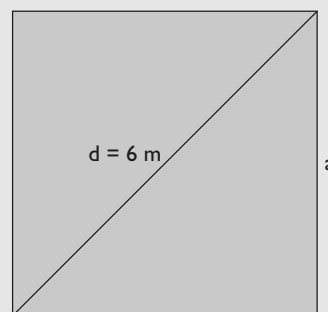
Solución:

$$a^2 + a^2 = 6^2$$

$$2a^2 = 36$$

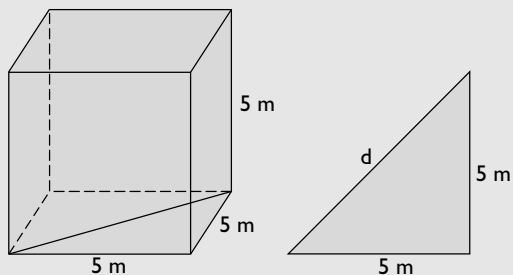
$$a^2 = 18$$

$$a = 4,24 \text{ m}$$

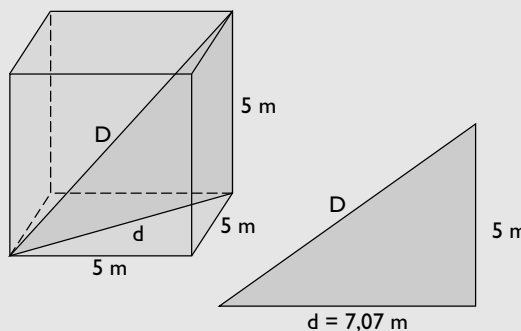


- 82** Halla la diagonal de un cubo de 5 m de arista. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$d^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow d = 7,07 \text{ m}$$



$$D^2 = 7,07^2 + 5^2$$

$$D = 8,66 \text{ m}$$

- 83** Un faro proyecta una sombra de 53 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un árbol de 1,5 m proyecta una sombra de 2,05 m. Calcula la altura del faro.

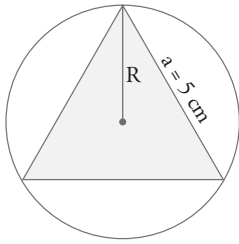
Solución:

$$\frac{2,05}{1,5} = \frac{53}{x}$$

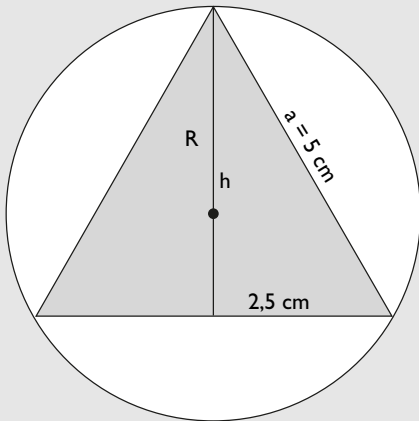
$$x = 38,78 \text{ m}$$

Ejercicios y problemas

- 84** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero:



Solución:



$$h^2 + 2,5^2 = 5^2$$

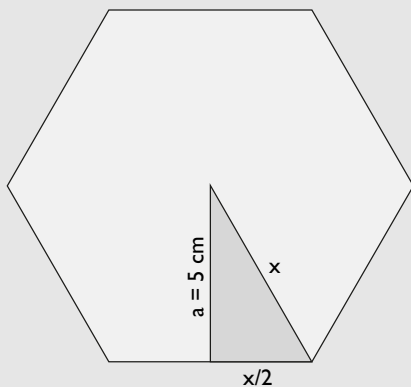
$$h = 4,33 \text{ cm}$$

El radio es los $\frac{2}{3}$ de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$$R = \frac{2}{3} \cdot 4,33 = 2,89 \text{ cm}$$

- 85** La apotema de un hexágono regular mide 5 cm. Calcula cuánto mide el lado.

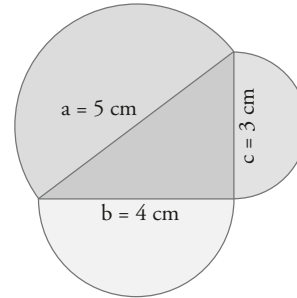
Solución:



$$x^2 = (x/2)^2 + 5^2$$

$$x = 5,77 \text{ cm}$$

- 86** Un triángulo rectángulo tiene los siguientes lados: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ y $c = 3 \text{ cm}$. Cambia el cuadrado por un semicírculo en la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica.



Solución:

Área del semicírculo de radio $a = 5 \text{ cm}$

$$A_1 = \pi \cdot 5^2/2 = 39,27 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $b = 4 \text{ cm}$

$$A_2 = \pi \cdot 4^2/2 = 25,13 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $c = 3 \text{ cm}$

$$A_3 = \pi \cdot 3^2/2 = 14,14 \text{ cm}^2$$

$$A_2 + A_3 = 25,13 + 14,14 = 39,27 \text{ cm}^2$$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

Aplica tus competencias

- 87** Un edificio proyecta una sombra de 25 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 2 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura del edificio.



Solución:

$$\frac{2,5}{2} = \frac{25}{x}$$

$$x = 20 \text{ m}$$

- 88** Un árbol proyecta una sombra de 29,75 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 2,15 m. Calcula la altura del árbol.

Solución:

$$\frac{2,15}{1,5} = \frac{29,75}{x}$$

$$x = 20,76 \text{ m}$$

- 89** Una antena proyecta una sombra de 43 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2,5 m. Calcula la altura de la antena.

Solución:

$$\frac{2,5}{1,75} = \frac{43}{x}$$

$$x = 30,1 \text{ m}$$

- 90** Un acantilado proyecta una sombra de 35 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,25 m proyecta una sombra de 1,5 m. Calcula la altura del acantilado.

Solución:

$$\frac{1,5}{1,25} = \frac{35}{x}$$

$$x = 29,17 \text{ m}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras. Pon un ejemplo de una terna pitagórica.

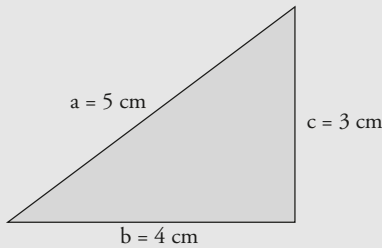
Solución:

El **teorema de Pitágoras** dice: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo

$a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm es una terna pitagórica.

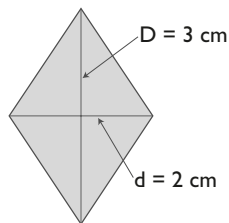


$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

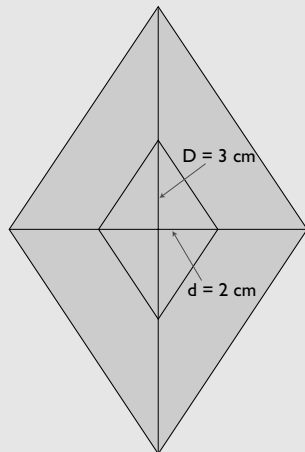
- 2** Mediante una proyección que tenga como centro el centro del rombo, dibuja otro rombo que sea una ampliación al 250%. ¿Cuánto miden las nuevas diagonales?



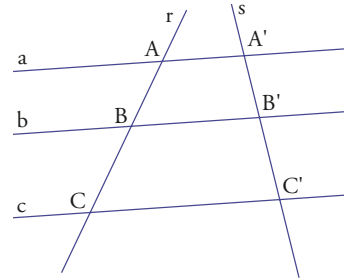
Solución:

$$D' = 2,5 \cdot 3 = 7,5 \text{ cm}$$

$$d' = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ cm}$$



- 3** Sabiendo que $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

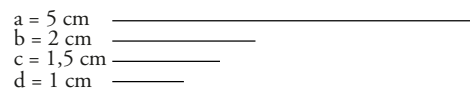
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

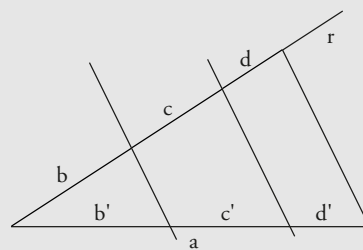
$$B'C' = 15 \cdot 24 : 18 = 20 \text{ cm}$$

Se ha aplicado el teorema de Thales.

- 4** Divide el segmento a en partes proporcionales a los segmentos b , c y d



Solución:



- 5** En una casa, un pasillo mide 6 m, y en su plano, 2,4 cm. Halla la escala.

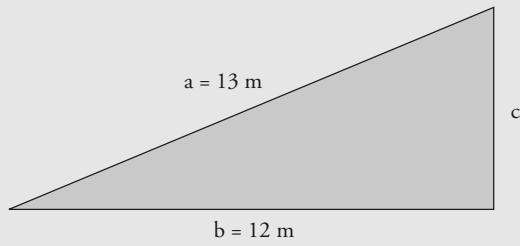
Solución:

Escala:

$$2,4 \text{ cm} : 6 \text{ m} = 2,4 \text{ cm} : 600 \text{ cm} = 1:250$$

- 6** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m, y un cateto, 12 m. Halla cuánto mide el otro cateto.

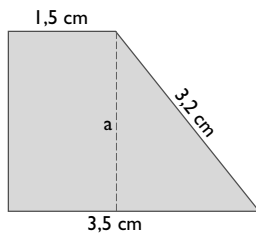
Solución:



$$12^2 + c^2 = 13^2$$

$$c = 5 \text{ m}$$

7 Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

$$a^2 + 2^2 = 3,2^2$$

$$a = 2,50 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } \frac{3,5 + 1,5}{2} \cdot 2,50 = 6,25 \text{ cm}^2$$

8 Un faro proyecta una sombra de 55 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 1,5 m proyecta una sombra de 1,75 m. Calcula la altura del faro.

Solución:

$$\frac{1,75}{1,5} = \frac{55}{x}$$

$$x = 1,5 \cdot 55 : 1,75 = 47,14 \text{ m}$$

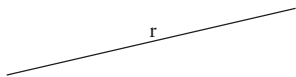
Paso a paso

91 Dibuja un punto **A**

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

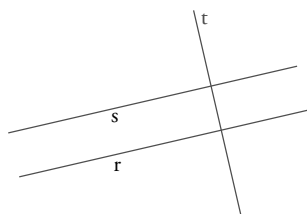
92 Dibuja una recta **r**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

93 Dibuja dos rectas paralelas, **r** y **s**, y una perpendicular, **t**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

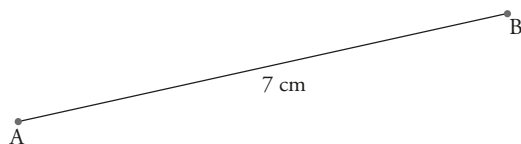
94 Dibuja una semirrecta horizontal de origen **O**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

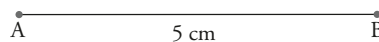
95 Dibuja un segmento **AB** y mide su longitud.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

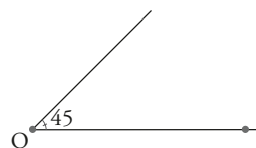
96 Dibuja un segmento **AB** de 5 cm



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

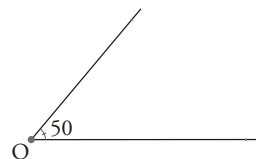
97 Dibuja un ángulo, márcalo y mídelo.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

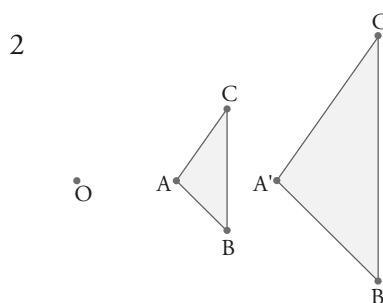
98 Dibuja un ángulo de 50°



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

99 Dibuja un triángulo semejante a **ABC** de razón de semejanza **2**



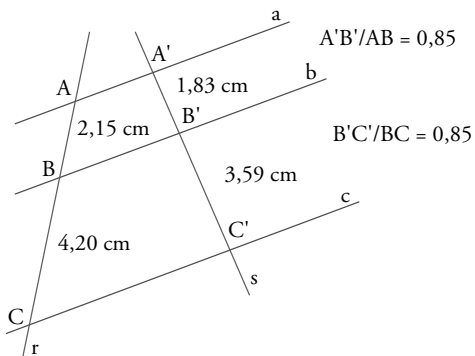
Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

100 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige Matemáticas, curso y tema.

Practica

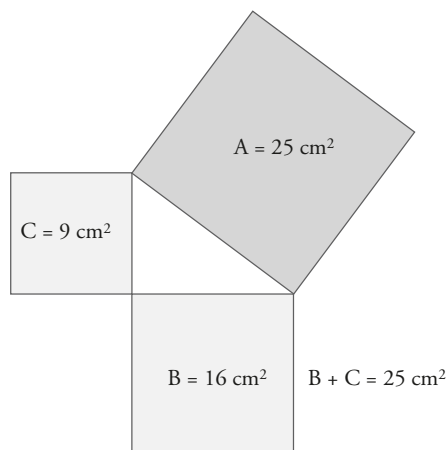
101 Comprueba el teorema de Tales.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

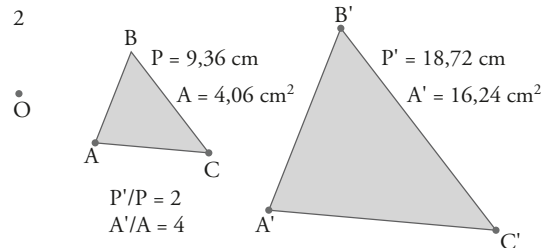
102 Comprueba el teorema de Pitágoras.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

103 Dibuja dos triángulos semejantes, calcula las razones entre sus perímetros y entre sus áreas y comprueba que la segunda razón es el cuadrado de la primera.



Solución:

- Edita el número 2
- Dibuja el punto O
- Dibuja el triángulo ABC
- Rellena el triángulo ABC
- Elige **Transformar/ Homotecia**, haz *click* en el número 2, en el triángulo y en el centro O de homotecia.
- Elige **Ver/ Etiqueta**, haz *click* en el punto A' y escribe la letra A'; haz lo mismo con B' y C'