

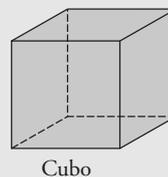
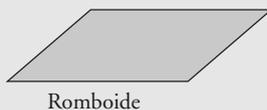
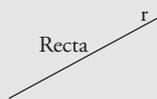


## 1. Elementos básicos en el espacio

### PIENSA Y CALCULA

Dibuja a mano alzada un punto, una recta, un romboide y un cubo.

**Solución:**



**Carné calculista** 489,6 : 7,5 | C = 65,28; R = 0

### APLICA LA TEORÍA

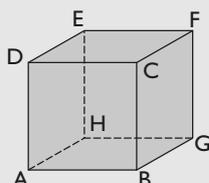
**1** Escribe tres ejemplos reales que representen intuitivamente una recta.

**Solución:**

- Un hilo de coser completamente estirado.
- Una cuerda completamente estirada.
- Un cable completamente estirado.

**2** Dibuja un cubo, ponle letras a los vértices y representa cada una de las caras por las cuatro letras de sus vértices.

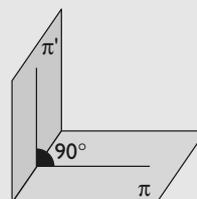
**Solución:**



ABCD, ADEH, EFGH, BCFG, ABGH, CDEF

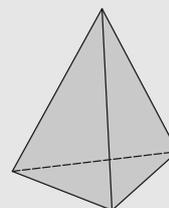
**3** Dibuja un ángulo diedro recto.

**Solución:**



**4** Dibuja un poliedro de cuatro caras y en el que todos los ángulos poliedros estén formados por tres caras.

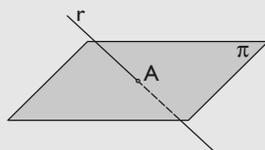
**Solución:**



Es un tetraedro.

**5** Dibuja una recta secante a un plano. ¿Qué tienen en común la recta y el plano?

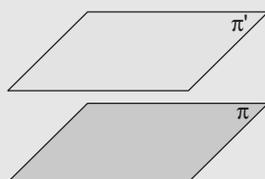
**Solución:**



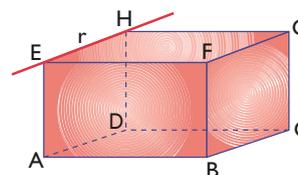
Tienen en común un punto, A

**6** Dibuja dos planos paralelos.

**Solución:**



**7** Dada la recta  $r$  generada por la arista EH del ortoedro:



- ¿qué aristas cortan a la recta  $r$ ?
- ¿qué aristas son paralelas a la recta  $r$ ?
- ¿qué aristas se cruzan con la recta  $r$ ?
- ¿qué caras prolongadas contienen a la recta  $r$ ?
- ¿qué caras prolongadas son paralelas a la recta  $r$ ?
- ¿qué caras prolongadas son secantes con la recta  $r$ ?
- ¿cuánto mide cada uno de los ángulos diedros?

**Solución:**

- |                    |                |
|--------------------|----------------|
| a) AE, DH, EF y HG | b) AD, BC y FG |
| c) AB, DC, BF y CG | d) ADHE y EFGH |
| e) ABCD y BCGF     | f) ABFE y CDHG |
| g) $90^\circ$      |                |

## 2. Poliedros

A partir de los recortables que venden en las papelerías, construye los poliedros regulares.

**Solución:**

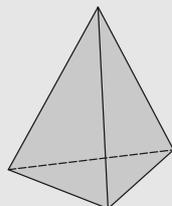
Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

**Carné calculista**

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$

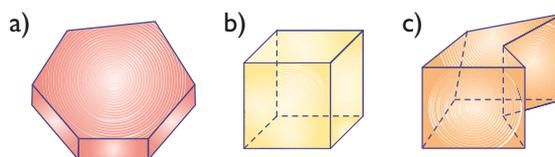
**8** Dibuja un tetraedro y halla el orden de cada vértice.

**Solución:**



Cada vértice es de orden 3

**9** Clasifica los siguientes poliedros:

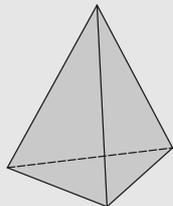


**Solución:**

- Poliedro irregular y convexo.
- Poliedro regular y convexo.
- Poliedro irregular y cóncavo.

**10** Dibuja un tetraedro y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

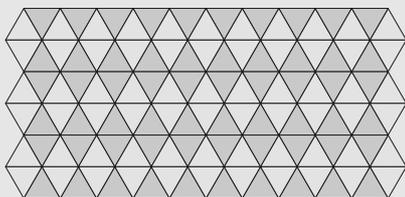


$$C + V = 4 + 4 = 8$$

$$A + 2 = 6 + 2 = 8$$

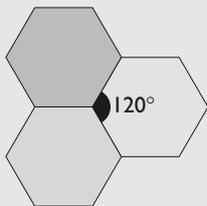
**11** Dibuja un mosaico regular formado por triángulos equiláteros.

**Solución:**



**12** ¿Se puede construir un poliedro regular con caras hexagonales? Justifica la respuesta.

**Solución:**



No se puede.

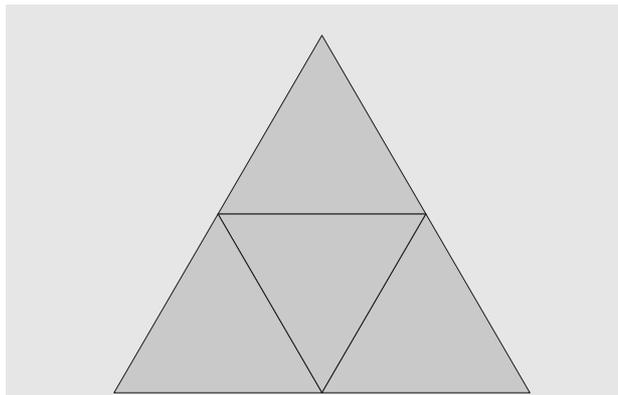
Si unimos tres caras, el ángulo formado es:

$$3 \times 60^\circ = 180^\circ \text{ y se obtiene un mosaico.}$$

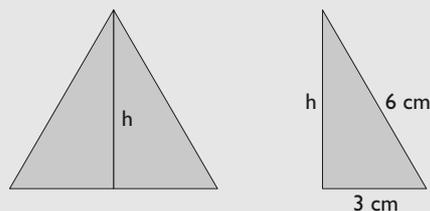
**13** Dibuja el desarrollo plano de un tetraedro de 6 cm de arista. Describe el desarrollo y calcula su área.

**Solución:**

El desarrollo está formado por 4 triángulos equiláteros iguales.



Para calcular el área hay que hallar previamente la altura de uno de los triángulos equiláteros.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

$$h^2 + 9 = 36$$

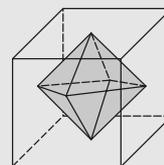
$$h^2 = 27$$

$$h = \sqrt{27} = 5,20$$

$$A = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5,20}{2} = 62,4 \text{ cm}^2$$

**14** Dibuja el poliedro que se obtiene al unir los puntos centrales de las caras de un cubo. ¿Qué poliedro se obtiene? ¿Qué relación hay entre las caras y los vértices de ambos poliedros?

**Solución:**



Se obtiene un octaedro.

	C	6	8	C	
Cubo	V	8	6	V	Octaedro

Que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y por ello son duales.

### 3. Prismas y cilindros

### PIENSA Y CALCULA

A partir de los recortables que venden en la papelería, construye todos los prismas y cilindros.

**Solución:**

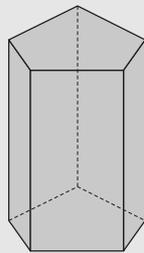
Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

**Carné calculista** 305,26 : 8,5 | C = 35,91; R = 0,025

### APLICA LA TEORÍA

**15** Dibuja un prisma pentagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

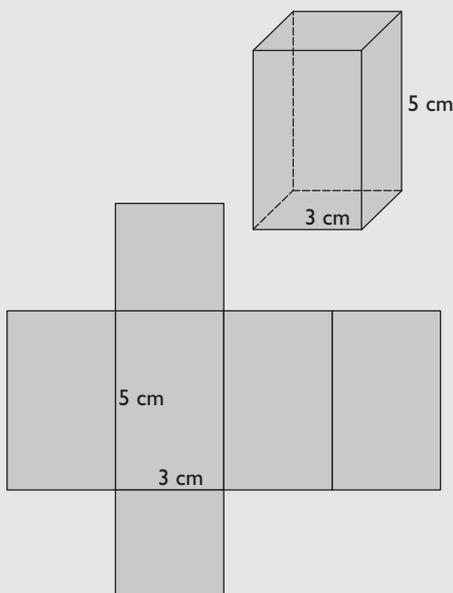


$$C + V = 7 + 10 = 17$$

$$A + 2 = 15 + 2 = 17$$

**16** Dibuja el desarrollo plano de un prisma recto cuadrangular en el que la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

**Solución:**



El desarrollo plano está formado por dos cuadrados iguales que son las bases y cuatro rectángulos iguales.

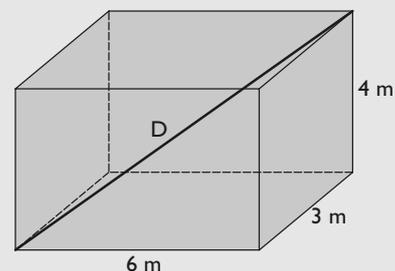
$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 18 + 60 = 78 \text{ cm}^2$$

**17** Dibuja un ortoedro cuyas dimensiones sean 6 m, 3 m y 4 m, y dibuja una diagonal. Calcula la longitud de dicha diagonal.

**Solución:**



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 6^2 + 3^2 + 4^2 = 36 + 9 + 16 = 61$$

$$D = \sqrt{61} = 7,81 \text{ m}$$

**18** Dibuja el desarrollo plano de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 1,5 cm, y la altura, 3,5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

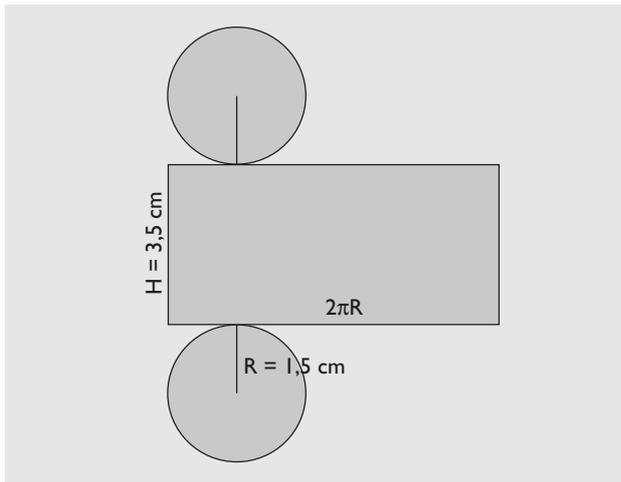
**Solución:**

El desarrollo plano está formado por dos círculos iguales, que son las bases, y un rectángulo.

$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \pi \cdot 1,5^2 = 14,14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 2\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5 = 32,99 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 14,14 + 32,99 = 47,13 \text{ cm}^2$$



**19** Las dimensiones de una caja son 10 cm, 5 cm y 6 cm. Calcula si un lápiz de 12,5 cm cabe en su interior.

**Solución:**

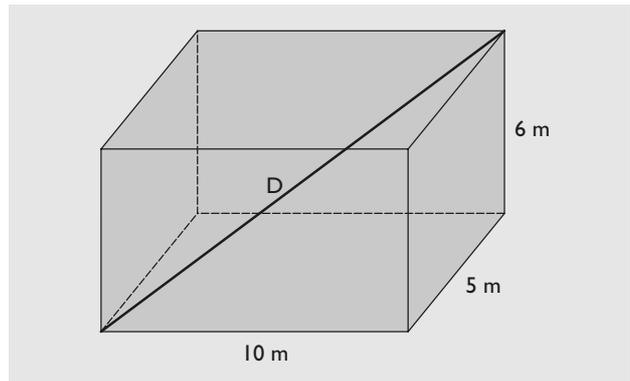
Tenemos que ver si la diagonal es mayor o menor.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 10^2 + 6^2 + 5^2 = 100 + 36 + 25 = 161$$

$$D = \sqrt{161} = 12,69 \text{ cm}$$

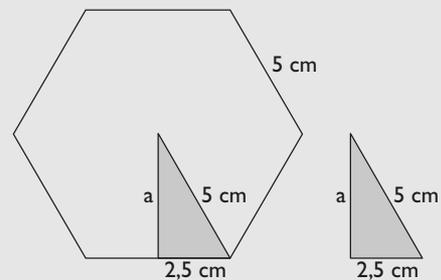
Como:  $D > 12,5 \text{ cm}$ , el lápiz sí cabe en la caja.



**20** Halla la apotema de la base de un prisma regular hexagonal en el que la arista de la base mide 5 cm, y la altura, 9 cm

**Solución:**

Nos piden hallar la apotema de un hexágono regular.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 2,5^2 = 5^2$$

$$a^2 + 6,25 = 25$$

$$a^2 = 18,75$$

$$a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$

## 4. Pirámides y conos

### PIENSA Y CALCULA

A partir de los recortables que venden en las papelerías, construye todas las pirámides y conos.

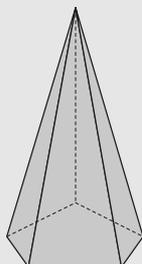
**Solución:**

Consiste en recortar, pegar y observar cuántas caras tiene cada uno y qué son.

**Carné calculista**  $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6} = -\frac{1}{2}$

**21** Dibuja una pirámide pentagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

**Solución:**

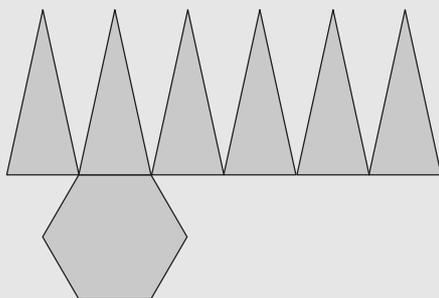


$$C + V = 6 + 6 = 12$$

$$A + 2 = 10 + 2 = 12$$

**22** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide regular hexagonal. Describe el desarrollo.

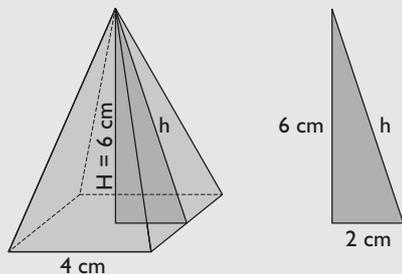
**Solución:**



El desarrollo plano está formado por un hexágono regular y 6 triángulos isósceles iguales.

**23** Dibuja una pirámide recta cuadrangular en la que la arista de la base mida 4 cm, y la altura, 6 cm. Calcula su apotema.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

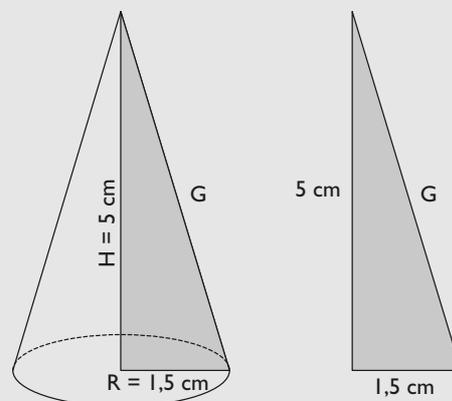
$$h^2 = 2^2 + 6^2$$

$$h^2 = 4 + 36 = 40$$

$$h = \sqrt{40} = 6,32 \text{ cm}$$

**24** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 1,5 cm, y la altura, 5 cm. Calcula su generatriz.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

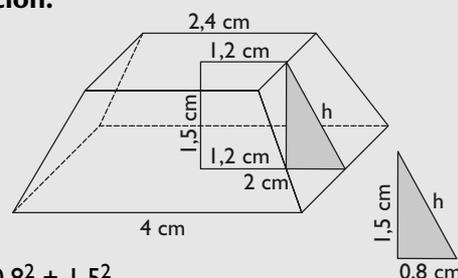
$$G^2 = 1,5^2 + 5^2$$

$$G^2 = 2,25 + 25 = 27,25$$

$$G = \sqrt{27,25} = 5,22 \text{ cm}$$

**25** Dibuja un tronco de pirámide recta cuadrangular en el que la arista de la base mayor mida 4 cm; la arista de la base menor, 2,4 cm, y la altura, 1,5 cm. Halla su apotema.

**Solución:**



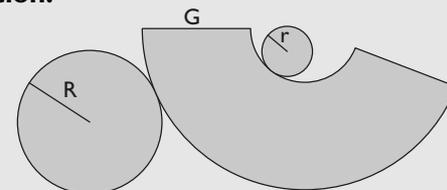
$$h^2 = 0,8^2 + 1,5^2$$

$$h^2 = 0,64 + 2,25 = 2,89$$

$$h = \sqrt{2,89} = 1,7 \text{ cm}$$

**26** Dibuja el desarrollo plano de un tronco de cono recto. Describe el desarrollo.

**Solución:**



El desarrollo plano está formado por dos círculos desiguales y un trapecio circular.

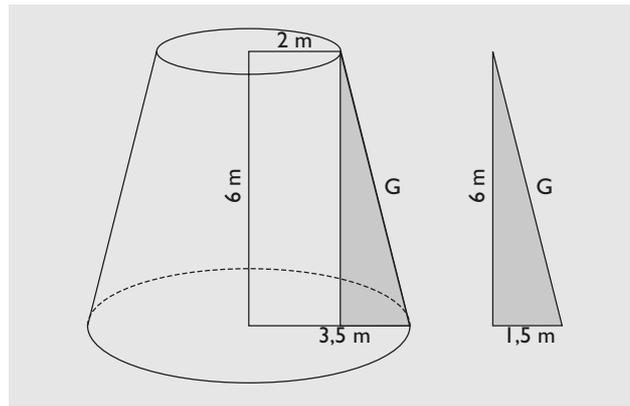
- 27** Dibuja un tronco de cono recto en el que el radio de la base mayor mida 3,5 m; el de la base menor, 2 m; y la altura, 6 m. Halla su generatriz.

**Solución:**

$$G^2 = 1,5^2 + 6^2$$

$$G^2 = 2,25 + 36 = 38,25$$

$$G = \sqrt{38,25} = 6,18 \text{ m}$$



# Ejercicios y problemas

## 1. Elementos básicos en el espacio

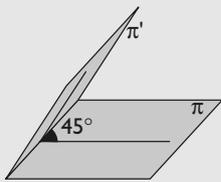
**28** Escribe tres ejemplos reales que representen intuitivamente un plano.

**Solución:**

- a) Una plancha de aluminio.
- b) Un espejo.
- c) Una hoja de un libro.

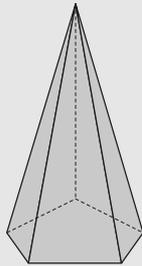
**29** Dibuja un ángulo diedro de  $45^\circ$  aproximadamente.

**Solución:**



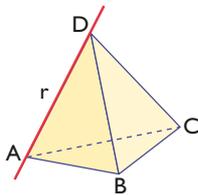
**30** Dibuja un poliedro que tenga un ángulo poliedro formado por 5 caras.

**Solución:**



El vértice superior de una pirámide pentagonal.

**31** Dada la recta  $r$  generada por la arista AD del siguiente tetraedro:



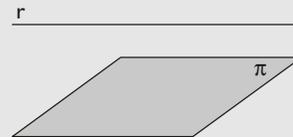
- a) ¿qué aristas cortan a la recta  $r$ ?
- b) ¿qué aristas son paralelas a la recta  $r$ ?
- c) ¿qué aristas se cruzan con la recta  $r$ ?
- d) ¿qué caras prolongadas contienen a la recta  $r$ ?
- e) ¿qué caras prolongadas son paralelas a la recta  $r$ ?
- f) ¿qué caras prolongadas son secantes con la recta  $r$ ?

**Solución:**

- a) AB, AC, BD y CD
- b) Ninguna.
- c) BC
- d) ABD y ACD
- e) Ninguna.
- f) ABC y BCD

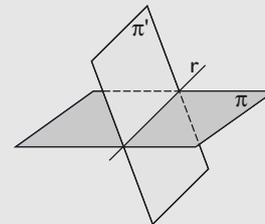
**32** Dibuja una recta paralela a un plano.

**Solución:**



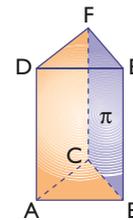
**33** Dibuja dos planos secantes. ¿Qué tienen en común?

**Solución:**



Tienen en común una recta  $r$

**34** Dado el plano  $\pi$  que contiene la cara BCFE del siguiente prisma:



- a) ¿qué aristas están contenidas en el plano  $\pi$ ?
- b) ¿qué aristas son paralelas al plano  $\pi$ ?
- c) ¿qué aristas cortan al plano  $\pi$ ?
- d) ¿qué caras son paralelas al plano  $\pi$ ?
- e) ¿qué caras cortan al plano  $\pi$ ?

**Solución:**

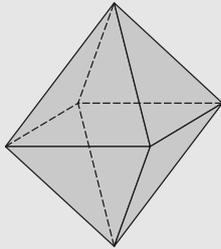
- a) BC, BE, CF y EF
- b) AD
- c) AB, AC, DE y DF
- d) Ninguna.
- e) Todas las demás: ABC, DEF, ABED y ACFD

# Ejercicios y problemas

## 2. Poliedros

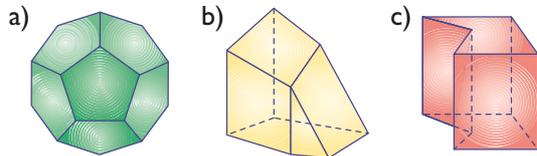
**35** Dibuja un octaedro y halla el orden de cada vértice.

**Solución:**



Cada vértice es de orden 4

**36** Clasifica los siguientes poliedros:

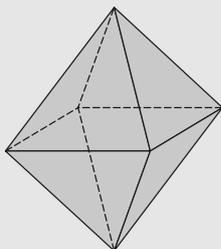


**Solución:**

- a) Poliedro regular y convexo.
- b) Poliedro irregular y convexo.
- c) Poliedro irregular y cóncavo.

**37** Dibuja un octaedro y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

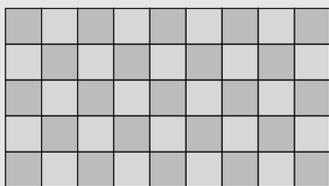


$$C + V = 8 + 6 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$

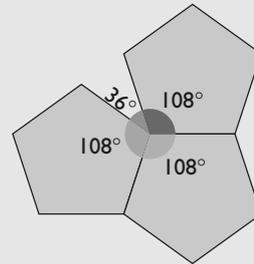
**38** Dibuja un mosaico regular formado por cuadrados.

**Solución:**



**39** ¿Se puede construir un poliedro regular con caras pentagonales? Justifica la respuesta.

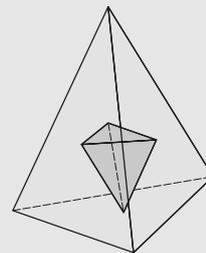
**Solución:**



Si unimos tres caras, el ángulo que se obtiene es  $3 \times 108^\circ = 324^\circ$ , que es menor de  $360^\circ$ , y sí se obtiene un poliedro regular, que es el dodecaedro.

**40** Dibuja el poliedro que se obtiene al unir los puntos centrales de las caras de un tetraedro. ¿Qué poliedro se obtiene? ¿Qué relación hay entre las caras y vértices de ambos poliedros?

**Solución:**



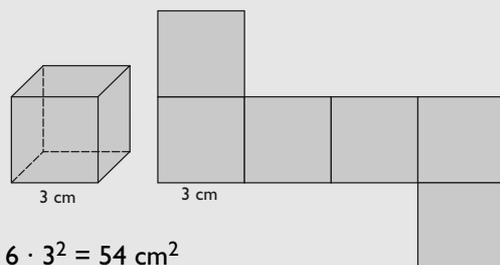
Se obtiene un tetraedro.

Tetraedro	C	4	4	C	Tetraedro
	V	4	4	V	

Que el número de caras de uno es igual al número de vértices del otro, y por ello son duales.

**41** Dibuja un cubo que tenga 3 cm de arista y su desarrollo plano. Calcula su área.

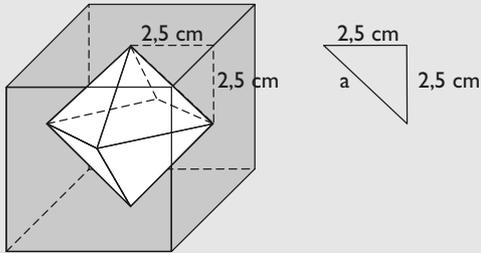
**Solución:**



$$A = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

- 42** Dibuja un cubo que tenga 5 cm de arista y el poliedro dual inscrito. Calcula la longitud de la arista de dicho poliedro.

**Solución:**



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 2,5^2 + 2,5^2$$

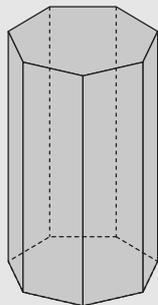
$$a^2 = 6,25 + 6,25 = 12,5$$

$$a = \sqrt{12,5} = 3,54 \text{ cm}$$

### 3. Prismas y cilindros

- 43** Dibuja un prisma heptagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**



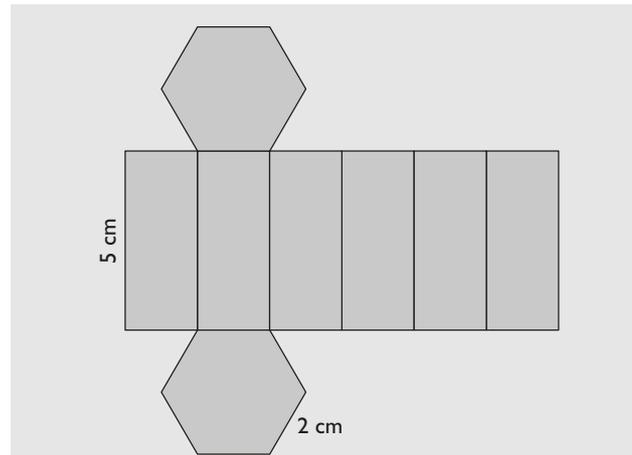
$$C + V = 9 + 14 = 23$$

$$A + 2 = 21 + 2 = 23$$

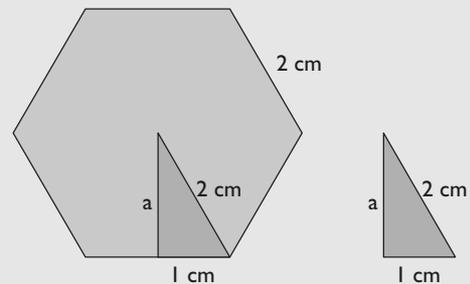
- 44** Dibuja el desarrollo plano de un prisma recto hexagonal en el que la arista de la base mide 2 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

**Solución:**

El desarrollo plano está formado por dos hexágonos regulares iguales y por 6 rectángulos iguales.



Para calcular el área hay que hallar previamente la apotema de la base.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 1^2 = 2^2$$

$$a^2 + 1 = 4$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3} = 1,73 \text{ cm}$$

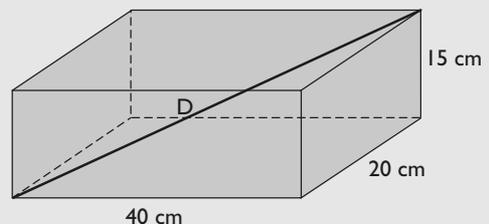
$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,73}{2} = 20,76 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 20,76 + 60 = 80,76 \text{ cm}^2$$

- 45** Las dimensiones de una caja de zapatos son 40 cm, 20 cm y 15 cm. Calcula la longitud de su diagonal.

**Solución:**



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

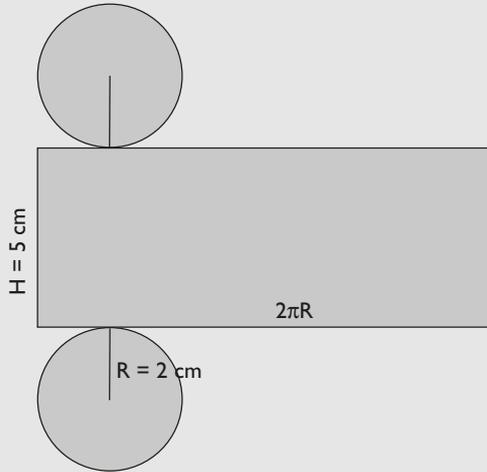
$$D^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2 = 1600 + 400 + 225 = 2225$$

$$D = \sqrt{2225} = 47,17 \text{ cm}$$

# Ejercicios y problemas

- 46** Dibuja el desarrollo plano de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 2 cm, y la altura, 5 cm. Describe el desarrollo y calcula su área.

**Solución:**



El desarrollo plano está formado por dos círculos iguales, que son las bases, y un rectángulo.

$$\text{Área de las bases: } 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 25,13 \text{ cm}^2$$

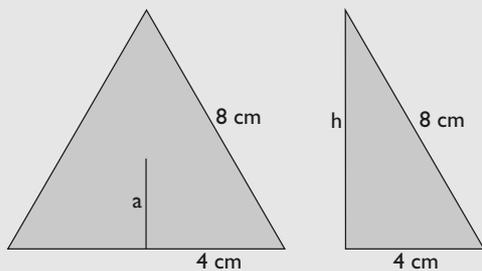
$$\text{Área lateral: } 2\pi \cdot 2 \cdot 5 = 62,83 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } 25,13 + 62,83 = 87,96 \text{ cm}^2$$

- 47** Halla la apotema de la base de un prisma regular triangular en el que la arista de la base mide 8 cm, y la altura, 23 cm

**Solución:**

Nos piden hallar la apotema de un triángulo equilátero.



Aplicando una propiedad de las medianas de un triángulo, la apotema es un tercio de la mediana, que en un triángulo equilátero coincide con la altura.

Para hallar la altura, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 4^2 = 8^2$$

$$h^2 + 16 = 64$$

$$h^2 = 48$$

$$h = \sqrt{48} = 6,93 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 6,93 = 2,31 \text{ cm}$$

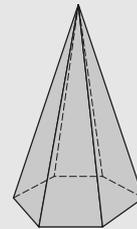
## 4. Pirámides y conos

- 48** Dibuja una pirámide hexagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

**Solución:**

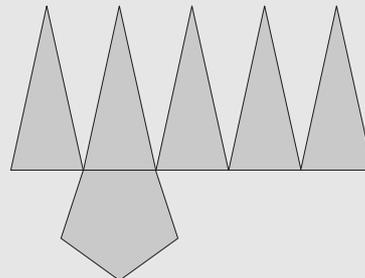
$$C + V = 7 + 7 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$



- 49** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide regular pentagonal. Describe el desarrollo.

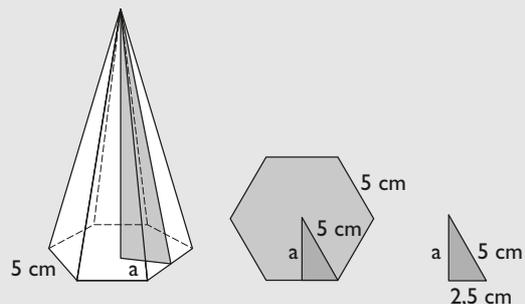
**Solución:**



El desarrollo plano está formado por un pentágono regular y 5 triángulos isósceles iguales.

- 50** Dibuja una pirámide regular hexagonal en la que la arista de la base mide 5 cm, y la altura, 20 cm. Calcula su apotema.

**Solución:**



En primer lugar, hay que hallar la apotema de la base.

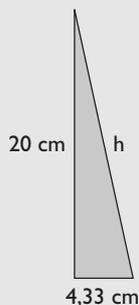
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 2,5^2 = 5^2$$

$$a^2 + 6,25 = 25$$

$$a^2 = 18,75$$

$$a = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ cm}$$



Se aplica otra vez el teorema de Pitágoras:

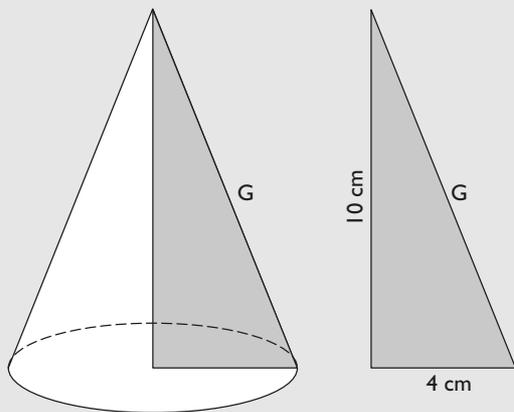
$$h^2 = 4,33^2 + 20^2$$

$$h^2 = 18,75 + 400 = 418,75$$

$$h = \sqrt{418,75} = 20,46 \text{ cm}$$

- 51** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 4 cm, y la altura, 10 cm. Calcula su generatriz.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

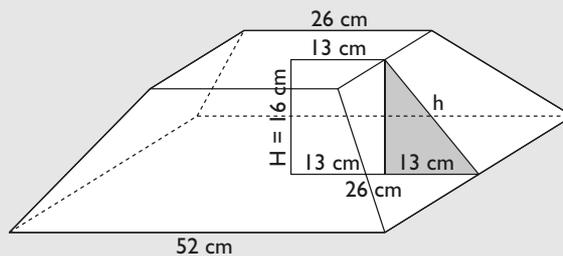
$$G^2 = 4^2 + 10^2$$

$$G^2 = 16 + 100 = 116$$

$$G = \sqrt{116} = 10,77 \text{ cm}$$

- 52** Dibuja un tronco de pirámide recta cuadrangular en el que la arista de la base mayor mida 52 cm; la arista de la base menor, 26 cm, y la altura, 16 cm. Halla su apotema.

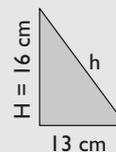
**Solución:**



$$h^2 = 13^2 + 16^2$$

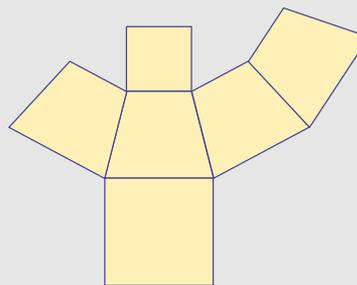
$$h^2 = 169 + 256 = 425$$

$$h = \sqrt{425} = 20,62 \text{ cm}$$



- 53** Dibuja el desarrollo plano de un tronco de pirámide de cuadrangular recta. Describe el desarrollo.

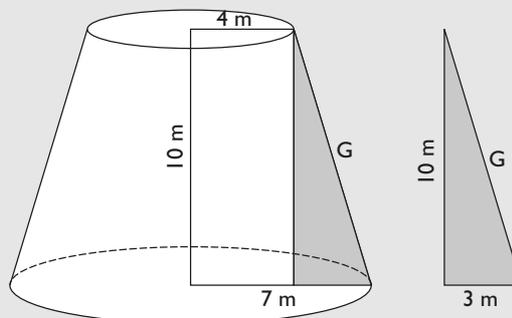
**Solución:**



El desarrollo plano está formado por dos cuadrados desiguales y cuatro trapecios isósceles iguales.

- 54** Dibuja un tronco de cono recto en el que el radio de la base mayor mida 7 m; el de la base menor, 4 m, y la altura, 10 m. Halla su generatriz.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

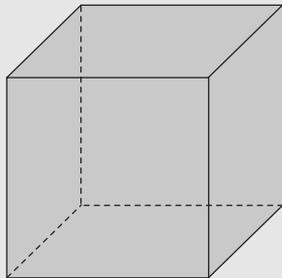
$$G^2 = 3^2 + 10^2$$

$$G^2 = 9 + 100 = 109 \Rightarrow G = \sqrt{109} = 10,44 \text{ m}$$

## Para ampliar

**55** Dibuja un cubo y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

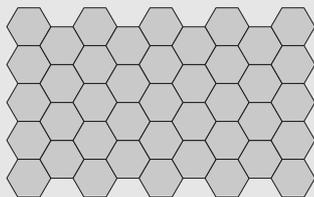


$$C + V = 6 + 8 = 14$$

$$A + 2 = 12 + 2 = 14$$

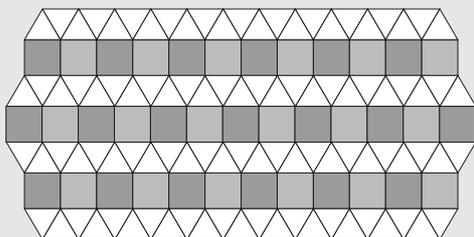
**56** Dibuja un mosaico regular formado por hexágonos regulares.

**Solución:**

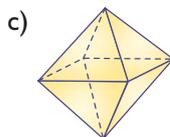
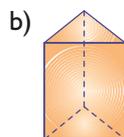
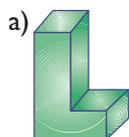


**57** Dibuja un mosaico semirregular formado por cuadrados y triángulos equiláteros.

**Solución:**



**58** Clasifica los siguientes poliedros:



**Solución:**

- a) Poliedro irregular y cóncavo.
- b) Poliedro irregular y convexo.
- c) Poliedro regular y convexo.

**59** Halla la apotema de la base de un prisma recto cuadrangular en el que la arista de la base mide 10 cm, y la altura, 27 cm

**Solución:**

Como la base es un cuadrado, la apotema es la mitad de la arista de la base.

$$a = 5 \text{ cm}$$

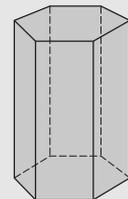


**60** Dibuja un prisma hexagonal y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

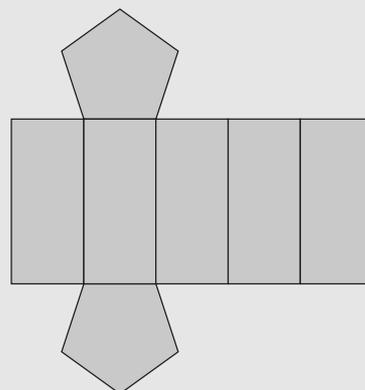
$$C + V = 8 + 12 = 20$$

$$A + 2 = 18 + 2 = 20$$



**61** Dibuja el desarrollo plano de un prisma regular pentagonal. Describe el desarrollo.

**Solución:**



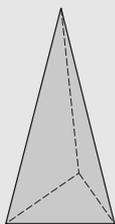
El desarrollo plano está formado por dos pentágonos regulares iguales, que son las bases, y 5 rectángulos iguales.

**62** Dibuja una pirámide triangular y comprueba en ella el teorema de Euler.

**Solución:**

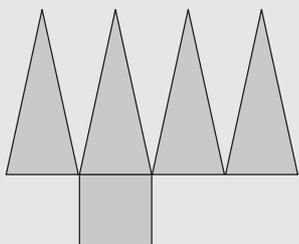
$$C + V = 4 + 4 = 8$$

$$A + 2 = 6 + 2 = 8$$



**63** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide recta cuadrangular. Describe su desarrollo.

**Solución:**



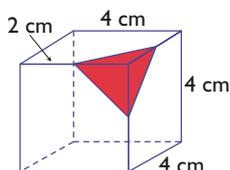
El desarrollo plano está formado por un cuadrado y 4 triángulos isósceles iguales.

**64** ¿Qué poliedro regular tiene como vértices el centro de las caras de un dodecaedro?

**Solución:**

Un icosaedro y por ello son duales.

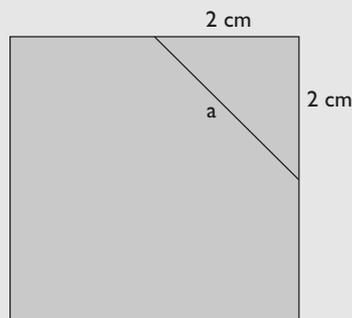
**65** Calcula la longitud de los lados del triángulo coloreado en rojo de la siguiente figura, redondea el resultado a dos decimales y clasifica el triángulo obtenido.



**Solución:**

Cada lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales y miden la mitad del lado, es decir, 2 cm

Se aplica el teorema de Pitágoras:



$$a^2 = 2^2 + 2^2$$

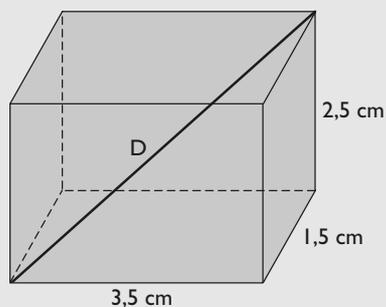
$$a^2 = 4 + 4 = 8$$

$$a = \sqrt{8} = 2,83 \text{ cm}$$

El triángulo es equilátero, porque los tres lados son iguales.

**66** Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3,5 cm, 1,5 cm y 2,5 cm

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2$$

$$D^2 = 12,25 + 2,25 + 6,25 = 20,75$$

$$D = \sqrt{20,75} = 4,56 \text{ cm}$$

## Problemas

- 67** Comprueba el teorema de Euler en el dodecaedro.

**Solución:**

$$C + V = 12 + 20 = 32$$

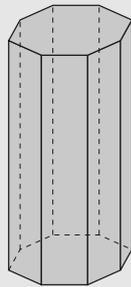
$$A + 2 = 30 + 2 = 32$$

- 68** Dibuja un prisma octogonal y comprueba el teorema de Euler en él.

**Solución:**

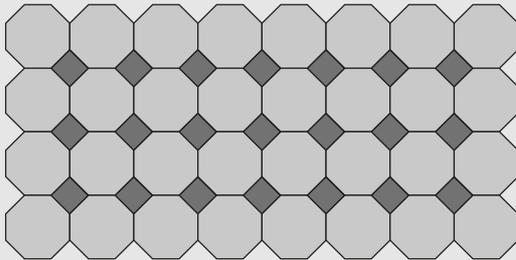
$$C + V = 10 + 16 = 26$$

$$A + 2 = 24 + 2 = 26$$



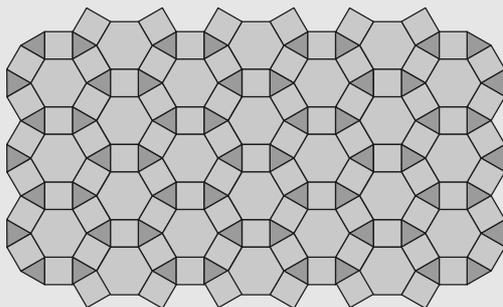
- 69** Dibuja un mosaico semirregular formado por cuadrados y octógonos regulares.

**Solución:**



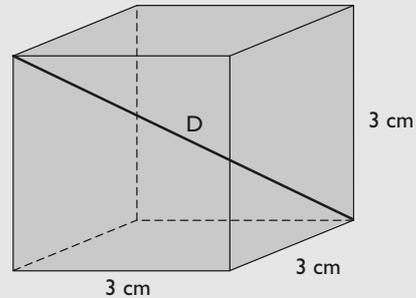
- 70** Dibuja un mosaico semirregular formado por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

**Solución:**



- 71** Dibuja un cubo de 3 cm de arista y halla la longitud de su diagonal.

**Solución:**



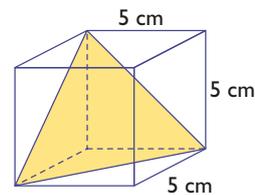
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$$

$$D^2 = 9 + 9 + 9 = 27$$

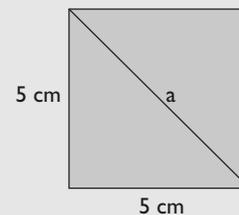
$$D = \sqrt{27} = 5,20 \text{ cm}$$

- 72** Clasifica el triángulo coloreado en amarillo de la figura y calcula la longitud de sus lados.



**Solución:**

Cada lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son dos aristas. Por tanto, es un triángulo equilátero.



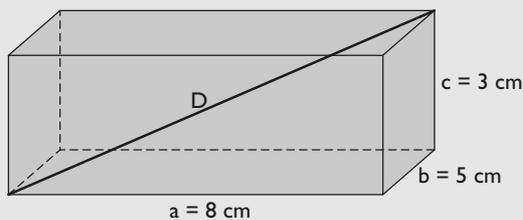
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 5^2 + 5^2$$

$$a^2 = 25 + 25 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$$

- 73** Si tienes un ortoedro cuyas aristas miden  $a = 8 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  y  $c = 3 \text{ cm}$ , ¿cuál será la longitud máxima de una varilla que quieras introducir en su interior?

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

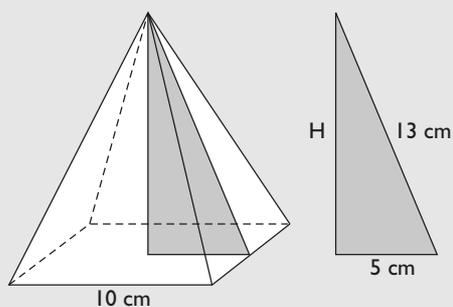
$$D^2 = 8^2 + 5^2 + 3^2$$

$$D^2 = 64 + 25 + 9 = 98$$

$$D = \sqrt{98} = 9,90 \text{ cm}$$

- 74** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mida 10 cm, y la apotema, 13 cm. Calcula su altura.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 5^2 = 13^2$$

$$H^2 + 25 = 169$$

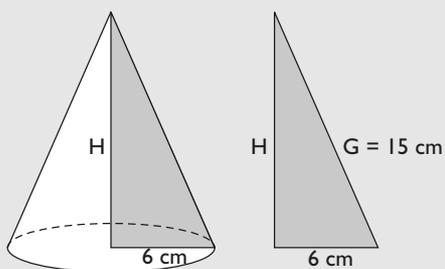
$$H^2 = 144$$

$$H = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

- 75** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mida 6 cm, y la generatriz, 15 cm. Halla su altura.

**Solución:**

Se aplica el teorema de Pitágoras:



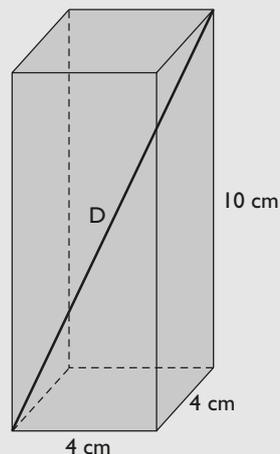
$$H^2 + 6^2 = 15^2$$

$$H^2 + 36 = 225$$

$$H^2 = 189 \Rightarrow H = \sqrt{189} = 13,75 \text{ cm}$$

- 76** Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene de arista 4 cm, y de altura, 10 cm

**Solución:**

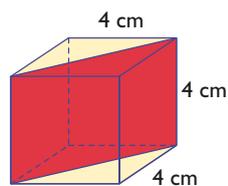


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 4^2 + 4^2 + 10^2$$

$$D^2 = 16 + 16 + 100 = 132 \Rightarrow D = \sqrt{132} = 11,49 \text{ cm}$$

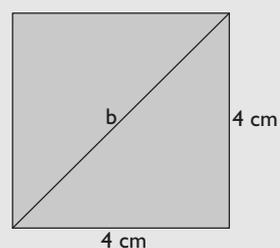
- 77** Calcula las dimensiones del rectángulo coloreado en rojo de la figura siguiente:



**Solución:**

La altura vale 4 cm

La base es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de 4 cm



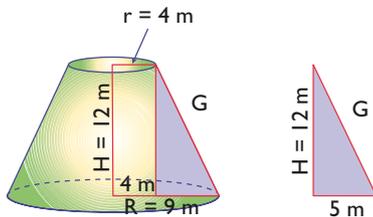
# Ejercicios y problemas

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = 4^2 + 4^2$$

$$b^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow b = \sqrt{32} = 5,66 \text{ cm}$$

**78** Halla la generatriz del tronco de cono siguiente:



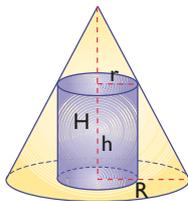
**Solución:**

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$G^2 = 5^2 + 12^2$$

$$G^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow G = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

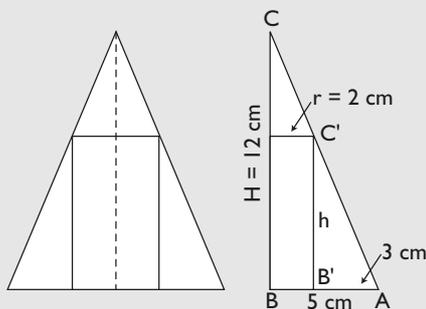
**79** Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que la altura del cono es  $H = 12 \text{ cm}$ , que el radio es  $R = 5 \text{ cm}$  y que el radio del cilindro mide  $r = 2 \text{ cm}$ , halla cuánto mide la altura del cilindro.

**Solución:**

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.

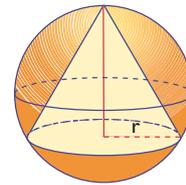


Los triángulos ABC y  $AB'C'$  son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{h}{12}$$

$$x = 7,2 \text{ cm}$$

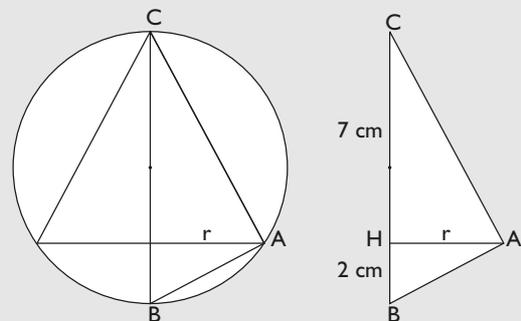
**80** Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que el radio de la esfera es  $R = 9 \text{ cm}$  y que la altura del cono es  $h = 7 \text{ cm}$ , halla cuánto mide el radio de la base del cono.

**Solución:**

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado, es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente:  $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 7 \cdot 2 = 14$$

$$r^2 = 14$$

$$r = \sqrt{14}$$

$$r = 3,74 \text{ cm}$$

**81** Halla el radio de la base de un cono recto que mide 12 m de altura y cuya generatriz es de 13 m

**Solución:**

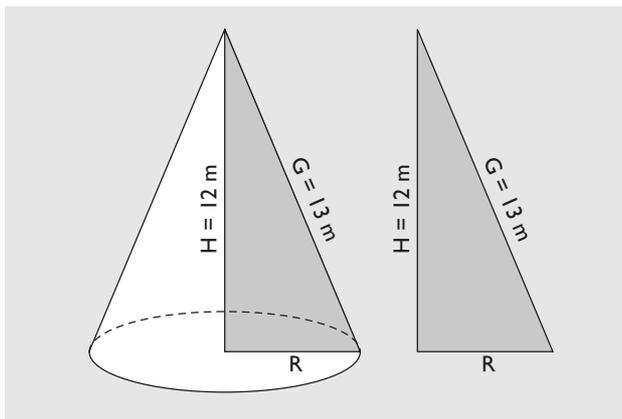
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 12^2 = 13^2$$

$$R^2 + 144 = 169$$

$$R^2 = \sqrt{25}$$

$$R = 25 = 5 \text{ m}$$

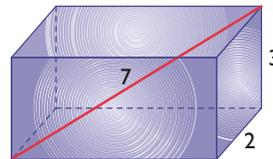


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 8^2 + 15^2$$

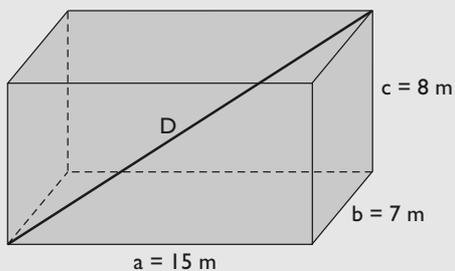
$$h^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow h = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

- 84** La diagonal de un ortoedro mide 7 cm, y dos de sus aristas, 2 cm y 3 cm. Halla la tercera arista.



- 82** Halla la diagonal de un ortoedro de aristas 15 m, 7 m y 8 m. Redondea el resultado a dos decimales.

**Solución:**



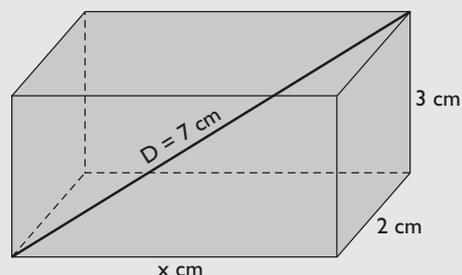
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 15^2 + 7^2 + 8^2$$

$$D^2 = 225 + 49 + 64 = 338$$

$$D = \sqrt{338} = 18,38 \text{ m}$$

**Solución:**



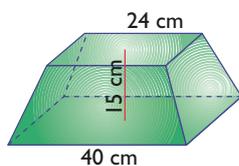
Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$x^2 + 2^2 + 3^2 = 7^2$$

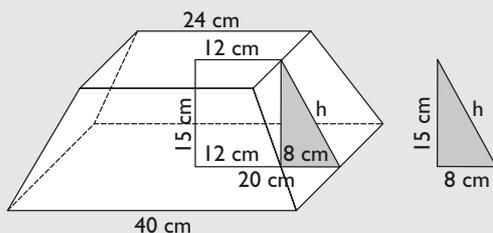
$$x^2 + 4 + 9 = 49$$

$$x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

- 83** Calcula la apotema del siguiente tronco de pirámide:

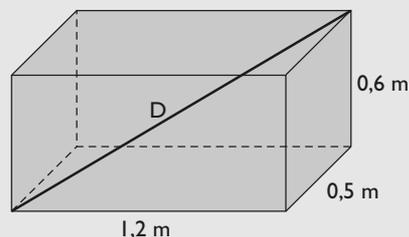


**Solución:**



- 85** Un acuario con forma de ortoedro tiene unas dimensiones de 1,2 m de largo, 0,5 m de ancho y 0,6 m de alto. ¿Se podría introducir en su interior un administrador de oxígeno en forma de varilla de 1,4 m de largo?

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 1,2^2 + 0,5^2 + 0,6^2$$

$$D^2 = 1,44 + 0,25 + 0,36 = 2,05 \Rightarrow D = \sqrt{2,05} = 1,43 \text{ m}$$

Como  $D > 1,4 \text{ m}$ , el administrador de oxígeno sí cabe en el acuario.

# Ejercicios y problemas

## Para profundizar

**86** Comprueba el teorema de Euler en el icosaedro.

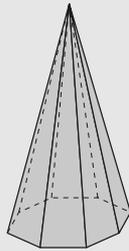
**Solución:**

$$C + V = 20 + 12 = 32$$

$$A + 2 = 30 + 2 = 32$$

**87** Dibuja una pirámide octogonal y comprueba el teorema de Euler en ella.

**Solución:**

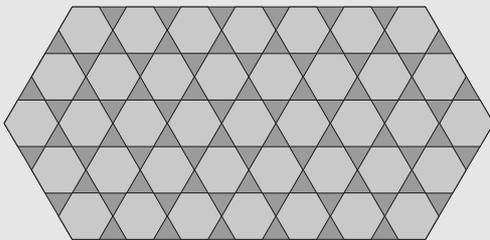


$$C + V = 8 + 9 = 17$$

$$A + 2 = 16 + 2 = 18$$

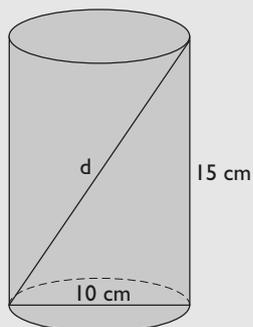
**88** Dibuja un mosaico semirregular formado por triángulos equiláteros y hexágonos regulares.

**Solución:**



**89** Si tienes un bote de forma cilíndrica, que mide 5 cm de radio de la base y 15 cm de altura, ¿cuál será la longitud máxima de un lápiz que quieras introducir en su interior?

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

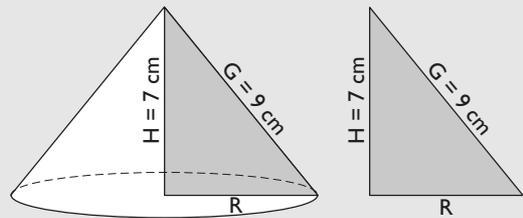
$$d^2 = 10^2 + 15^2$$

$$d^2 = 100 + 225 = 325$$

$$d = \sqrt{325} = 18,03 \text{ cm}$$

**90** Dibuja un cono recto en el que la altura mida 7 cm, y la generatriz, 9 cm. Halla el radio de la base.

**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 7^2 = 9^2$$

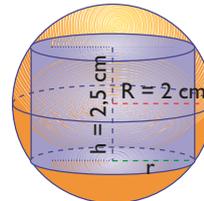
$$R^2 + 49 = 81$$

$$R^2 = 32$$

$$R = \sqrt{32}$$

$$R = 5,66 \text{ cm}$$

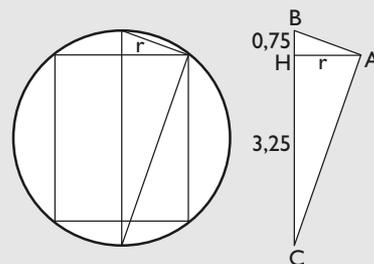
**91** Se tiene un cilindro inscrito en una esfera, como se indica en la figura adjunta.



Sabiendo que el radio de la esfera es  $R = 2 \text{ cm}$  y la altura del cilindro es  $h = 2,5 \text{ cm}$ , halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

**Solución:**

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente:  $180^\circ/2 = 90^\circ$

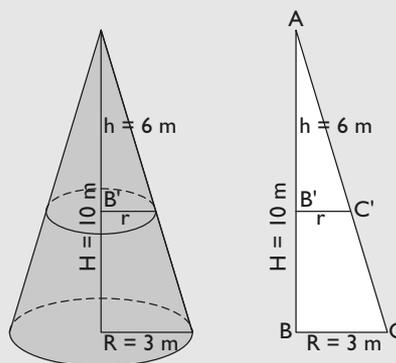
Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 3,25 \cdot 0,75 = 2,44$$

$$r = 1,56 \text{ cm}$$

- 92** Un cono de 10 m de altura se corta, por un plano paralelo a la base, a 4 m de la misma. Si el radio de la base es de 3 m, ¿qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

**Solución:**



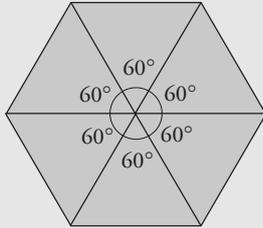
Los triángulos ABC y AB'C' son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = 1,8 \text{ m}$$

# Aplica tus competencias

- 93** Comprueba que con triángulos equiláteros se puede formar un mosaico regular.

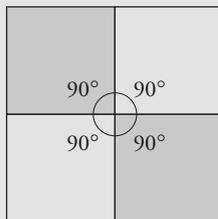
**Solución:**



Si en el plano unimos 6 triángulos equiláteros iguales con un vértice común, se acoplan perfectamente; luego forman un mosaico.

- 94** Comprueba que con cuadrados se puede formar un mosaico regular.

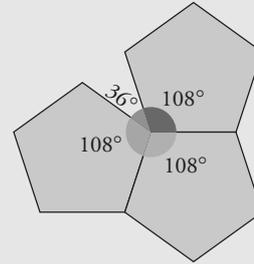
**Solución:**



Si en el plano unimos 4 cuadrados iguales con un vértice común, se acoplan perfectamente; luego forman un mosaico.

- 95** Comprueba que con pentágonos regulares no se puede formar un mosaico regular.

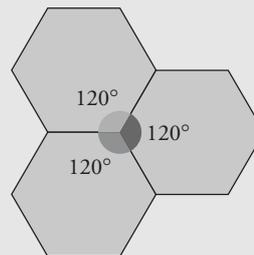
**Solución:**



Si en el plano unimos 3 pentágonos regulares con un vértice común, no encajan perfectamente, y 4 no caben; por tanto, no forman un mosaico.

- 96** Comprueba que con hexágonos regulares se puede formar un mosaico regular.

**Solución:**



Si en el plano unimos 3 hexágonos regulares iguales con un vértice común, encajan perfectamente, luego, forman un mosaico.

# Comprueba lo que sabes

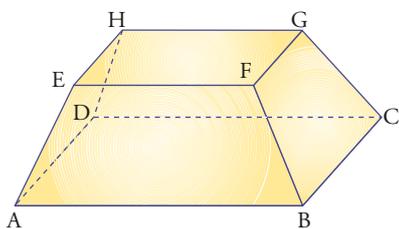
- 1** Define qué es un poliedro regular. Di cuántos hay y cómo se llaman.

**Solución:**

Un **poliedro es regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y los vértices son del mismo orden.

Son cinco: tetraedro, cubo o hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

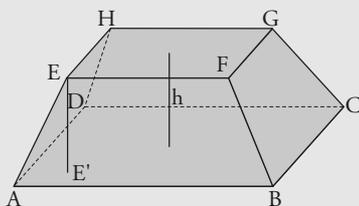
- 2** Dado el plano  $\pi$ , que contiene la cara EFGH del tronco de pirámide:



- ¿qué aristas están contenidas en el plano  $\pi$ ?
- ¿qué aristas son paralelas al plano  $\pi$ ?
- ¿qué aristas cortan al plano  $\pi$ ?
- ¿qué caras son paralelas al plano  $\pi$ ?
- ¿qué caras cortan al plano  $\pi$ ?
- dibuja la distancia del vértice E al plano definido por la cara ABCD

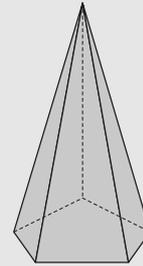
**Solución:**

- EF, FG, GH y HE
- AB, BC, CD y DA
- AE, BF, CG y DH
- ABCD
- ABFE, BCGF, CDHG y ADHE
- Es la altura del tronco de pirámide.



- 3** Dibuja una pirámide pentagonal y comprueba en ella el teorema de Euler.

**Solución:**

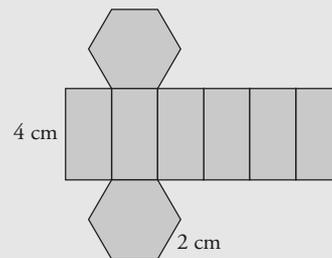


$$C + V = 6 + 6 = 12$$

$$A + 2 = 10 + 2 = 12$$

- 4** Dibuja el desarrollo plano de un prisma hexagonal regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista de la base, y describe su desarrollo.

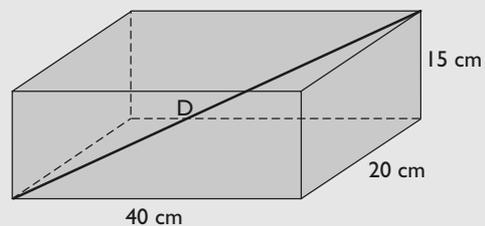
**Solución:**



El desarrollo plano está formado por dos hexágonos regulares iguales que son las bases y de 6 rectángulos iguales.

- 5** Las dimensiones de una caja de zapatos son 40 cm, 20 cm y 15 cm. Calcula la longitud de su diagonal.

**Solución:**



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

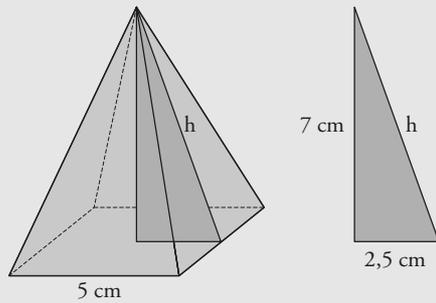
$$D^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2 = 1\,600 + 400 + 225 = 2\,225$$

$$D = \sqrt{2\,225} = 47,17 \text{ cm}$$

# Comprueba lo que sabes

- 6** Calcula la apotema de una pirámide cuadrangular de 5 cm de arista de la base y 7 cm de altura.

**Solución:**



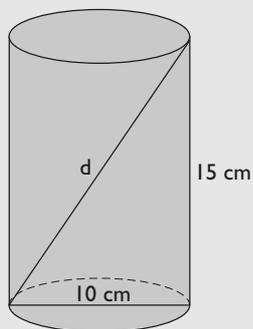
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 2,5^2 + 7^2 = 55,25$$

$$h = 7,43 \text{ cm}$$

- 7** Si tienes un bote de forma cilíndrica, que mide 5 cm de radio de la base y 15 cm de altura, ¿cuál será la longitud máxima de un lápiz que quieras introducir en su interior?

**Solución:**



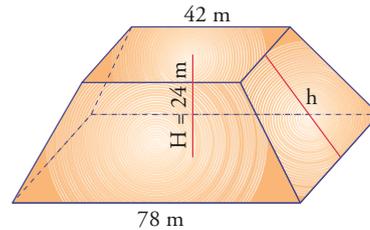
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 10^2 + 15^2$$

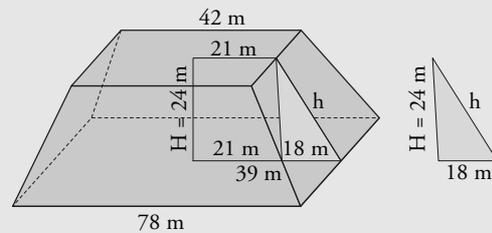
$$d^2 = 100 + 225 = 325$$

$$d = \sqrt{325} = 18,03 \text{ cm}$$

- 8** Calcula la apotema del tronco de la pirámide del dibujo.



**Solución:**



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 18^2 + 24^2 = 900$$

$$h = 30 \text{ m}$$

## Paso a paso

- 97** Dibuja un cubo en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 98** Dibuja el desarrollo plano de un cubo.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 99** **Internet.** Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige **Matemáticas, curso y tema.**

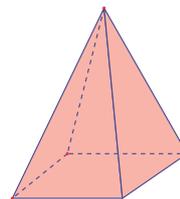
## Practica

- 100** Dibuja un prisma hexagonal en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

**Solución:**

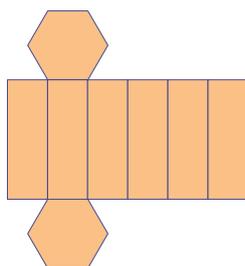
- Dibuja el polígono exterior y rellénalo.
- Dibuja las aristas continuas.
- Dibuja las aristas discontinuas.
- Arrastrando* los vértices mejora el diseño.

- 102** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en perspectiva y las líneas ocultas en trazo discontinuo.

**Solución:**

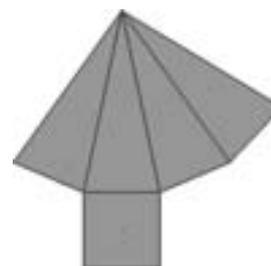
- Dibuja el polígono exterior y rellénalo.
- Dibuja las aristas continuas.
- Dibuja las aristas discontinuas.
- Arrastrando* los vértices, mejora el diseño.

- 101** Dibuja el desarrollo plano de un prisma regular hexagonal.

**Solución:**

- Dibuja un hexágono regular utilizando la herramienta **polígono regular**.
- Rellénalo de color.
- Por simetrías axiales dibuja el resto del desarrollo.

- 103** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular.

**Solución:**

- Dibuja un cuadrado utilizando la herramienta **polígono regular**.
- Rellénalo de color.
- Dibuja el triángulo isósceles que tiene por base un lado del cuadrado.
- Por simetrías axiales dibuja el resto del desarrollo lateral.